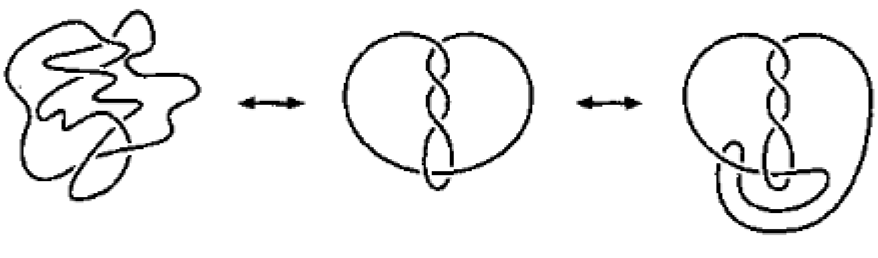
جولة سريعة في العقد الرياضية Knot Theory

احمد زيني الياسري 2020

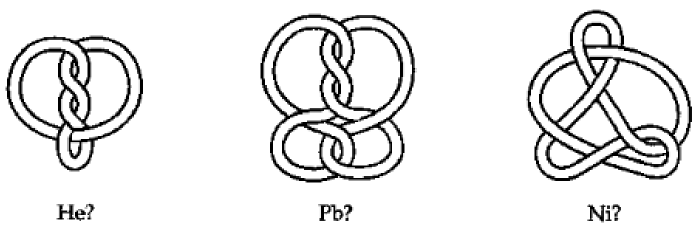
تعد نظرية العقد الرياضية إحدى فروع علم التبولوجيا والتي تدرس العقد الرياضية (Knots) والروابط (Links).و العقدة فكرتها انه اذا كان لدينا حبل فإننا نستطيع تكوينها بعمل بعض الحركات ثم نقوم بلصق اطرافه لنحصل على عقدة. اذا لم نستخدم المقص لن نستطيع حل التشابكات في الحبل. هنا يتم دراسة العقدة تبولوجيا كونها مانفولد من البعد الاول(One Dimensional Manifold) تسبح في الفضاء الثلاثي. لقد تم ترتيب هذا الفصل بتقديم تعاريف و امثلة للعقدة الرياضياتية و الرابط الرياضياتي و من ثم عرض حركات رايدمايستر كونها احد اهم صيغ التكافوء في العقدة و من ثم اعطاء بعض الثوابت الرياضياتية العددية للعقدة و الرابط لنمر بعدها على ثوابت افضل و هي متعددات الحدود المقترنة مع العقد الرياضياتية و الروابط الرياضياتي و اهمها متعددة حدود جونز و التي حاولنا تقديمها بصورة افضل.

العقدة هي ذلك الحبل المتشابك لكن باعتباره بدون سماكة , نفكر في العقدة و كأنها مصنوعة من مطاط مرن قابل للتشويه و لا يوجد فرق بين العقدة و تشويهاتها التي لا تسمح للحبل بأن يجتاز نفسه. اي انه خلال سباحتها في الفضاء الثلاثي يمكن ان يتغير شكلها و تتشوه بشرط ان لا تقاطع نفسها و هذه تدعى بالسباحة الايزوتوبية.

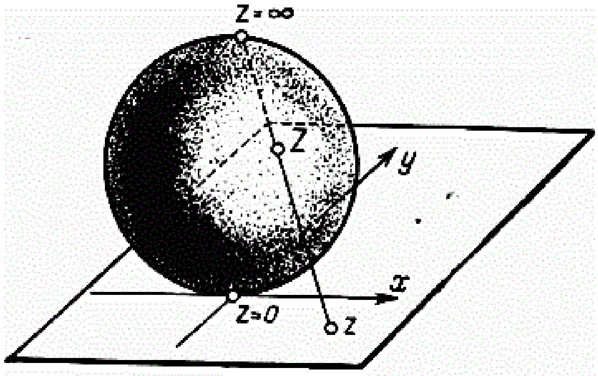


نظرية العقد تهتم بالإجابة على السؤال التالي أي العقد ذات الأشكال المختلفة هي نفس العقدة أو مختلفة عنها, أي هل يمكن اللعب بالحبل بحركات مختلفة للتحول من شكل الى اخر بدون استخدام القص واللصق؟ و السؤال الرياضياتي يكون بما ان العقدة مانفولد (فضاء تبولوجي) هل يمكن دراسة اختلافها و صفاتها و ثوابتها الرياضياتية التبولوجية؟

الكثير من الاهتمام في نظرية العقد كان ملحوظ من قبل الكيمائيين. لورد كالفن و وليام ثوماس Lord Kelvint 1880s و William Thomson افترضوا أن الذرات هي عقد مختلفة سوف تقابلها ذرات مختلفة فكانت هذه الدراسات مفيدة لدراسة العقدة و اشكالها الكثيرة.



ذلك أقنع الفيزيائي بيتر تايت Peter Tait أنه لو أنشأ جدول لكل العقد المختلفة الممكنة سيكون قد أنشأ جدولاً لكل العناصر و أمضى سنوات عديدة محاولاً ذلك. في عام 1887 تبين أن ذلك الافتراض خاطئ و فقد الكيميائيون اهتمامهم بنظرية العقد لكن الرياضياتين اهتموا بها بعد ذلك. الرياضياتي C.F Gauss و طالبه Listing كان لهما اهتمام في نظرية العقد J.W Alexander كان أول من أظهر أن نظرية العقد مهمة جداً في دراسة التبولوجيا الثلاثية الأبعاد في عام 1930 كان هناك نشاط لدراسة العلاقة بين نظرية العقد و الهندسة الجبرية في عام 1970 تبين أن نظرية العقد متصلة بنظرية الأعداد الجبرية و في عام 1980 ارتبطت نظرية العقد بالفيزياء و الميكانيك الإحصائي كما أن علماء الكيمياء الحيوية اكتشفوا أن جزئيات ال DNA هي عقد و خصائص هذه الجزئيات تحددها انماط العقد. هناك دراسات حديثة لشريط DNA عن طريق دراسة التبولوجيا الخاصة به. إن الكرة S^3 دائماً يفكر بها على انها R^3 مع نقطة ∞ ولذلك يفضل دائماً التفكير على إغمار العقدة الرياضية K داخل S^3 بدلا من R^3 لان اذا كان لدينا خيط و نريد ان نلصق اطرافه تبولوجيا في الفضاء الثلاثي فأن امكانية الربط تكون عند نقطة الانفنتي او تعرف بنقطة القطب و التي هي نقطة التراص للحصول على منحني مغلق. لذلك الدراسات في الفضاءات المرصوصة و المغلقة تكون افضل و اجمل عند الرياضياتيين لان نقطة الانفنتي هي حل لكثير من المشاكل.



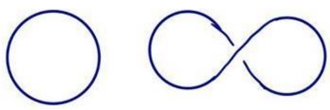
في هذا الفصل سنقدم العقدة الرياضياتية و الرابط الرياضياتي حتى نستطيع تقديم نظرية حساب الزمرة الهومولوجية و من ثم نقدم بشيء مبسط نظرية البيان (Graph) حتى نبين كيفية حساب الزمرة الهومولوجية لها و من ثم الربط بين الزمرة الهومولوجية للبيان و العقدة (ألرابط). لاحظ ان العقدة هي بيان و لكن من دون رؤوس. سنبدأ الان بتقيم التعاريف الرياضياتية للعقدة و نتبعها بعدة نظريات تبولوجية مع امثلة.

العقدة الرياضية Knot :هي دائرة أو منحني مغلق بسيط (ذو بعد واحد) مغمورة في الفضاء الاقليدي الثلاثي الأبعاد.

الرابط (Link): هي عائلة من العقد الرياضية المنفصلة والمغمورة فيR^3. و هذه العائلة تكون اما منفصلة او متشابكة

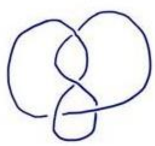
امثلة على العقدة الرياضياتية و الرابط الرياضياتي

العقدة التافهة (Trivial Knot)

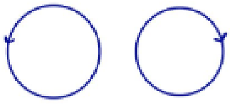


العقدة ثلاثية الاوراق (Trefoil Knot)

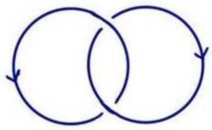
عقدة الشكل -8 او ما تسمى بالعقدة الثمانية (Fig-8 Knot)



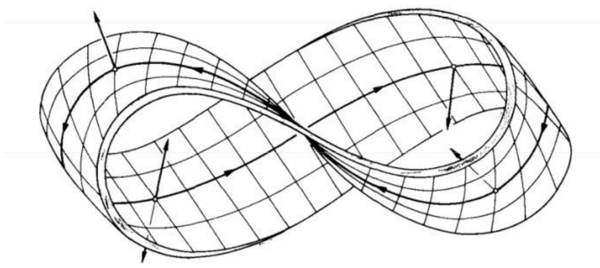
الرابط التافه (Trivial Link)



الرابط هوبف (Hopf Link)



الان سنقوم باستخدام بعض المفاهيم التبولوجية في دراسة العقدة الرياضياتية و صفاتها و خواصها في R^3. في الرياضيات، إن التوجيه Orientablity هي خاصية الأسطح في الفضاء الإقليدي الذي يقيس ما إذا كان من الممكن إجراء اختيار ثابت لمتجه السطح الطبيعي عند كل نقطة. سطح S في الفضاء الإقليدي R^3 قابل للتوجيه (Orientable Surface) إذا كان لا يمكن تحريك جسم ثنائي الأبعاد حول السطح والعودة إلى حيث بدأ بحيث تبدو صورة المرآة الخاصة به وإلا فإن السطح غير قابل للتوجيه. فالسطح التجريدي (أي المجسم ثنائي الأبعاد) قابل للتوجيه إذا كان من الممكن تعريف مفهوم ثابت للدوران في اتجاه عقارب الساعة على السطح بطريقة مستمرة. وهذا يعني أنه لا يمكن أبدًا أن تتشوه إحدى الحلقات في اتجاه واحد (دون تداخل نفسها) إلى حلقة تسير في الاتجاه المعاكس. معظم السطوح التي نواجهها في العالم المادي قابلة للتوجيه. على سبيل المثال الكرة (Sphere) ، المستوي(Plane) هي قابلة للتوجيه ،. لكن شرائط موبس(Möbius)، والمستويات الإسقاطية الحقيقية ، وزجاجات كلاين غير قابلة للتوجيه. و لنقولها بصورة مبسطة السطح يقال عنه موجه اذا كلما تحركت على جانب معين فانك تبقى على هذا الجانب و لا يمكنك الانتقال الى الجانب الاخر لوجود حافة لا تستطيع عبورها اما السطح الغير موجه فهو السطح الذي اذا تحركت على احد جوانبه ستجد نفسك في الجانب الاخر بدون الوصول للحدود و مثال ذلك شريط موبس Möbius Band



في هذا الجزء سنقدم مجموعة من التعاريف و المبرهنات الضرورية و التعريفية لدراستنا للعقدة الرياضياتية و الرابط الرياضياتي.

لتكن f دالة من فضاء تبولوجي X الى فضاء تبولوجي Y مستمرة ومتباينة وغامرة و f^{-1} أيضا مستمرة فإن f تدعى دالة تشاكل تبولوجي (Homeomorphism) و في حالة كون X وY لديهم اتجاة مرتبط معهم فان f تكون دالة محافظة على الاتجاه (Preserving orientation) إذا كان الاتجاه الأصلي لـ Y يتطابق مع تأثير f على اتجاه X.

يقال لعقدتان رياضيتان K_1 وK_2 متكافئتان (equivalent) اذا وجدنا تشاكل تبولوجي محافظ على الاتجاه preserving (orientation) في R^3 يربط K_1 ب K_2 (يتم التفكير بالعقدة على انها مانفولد ذو بعد واحد اي انها فضاء تبولوجي فضاء تبولوجي. و المانفولد هو فضاء تبولوجي يشابه موقعيا R^n و في حالة العقدة فهو يشابه R^1)

رابطان L_1 و L_2 يقال عنها متكافئتان اذا كان لهما نفس العدد من مركبات العقدة الرياضياتية و وجد تشاكل تبولوجي من R^3 إلى نفسها يربط L_1بـ L_2.

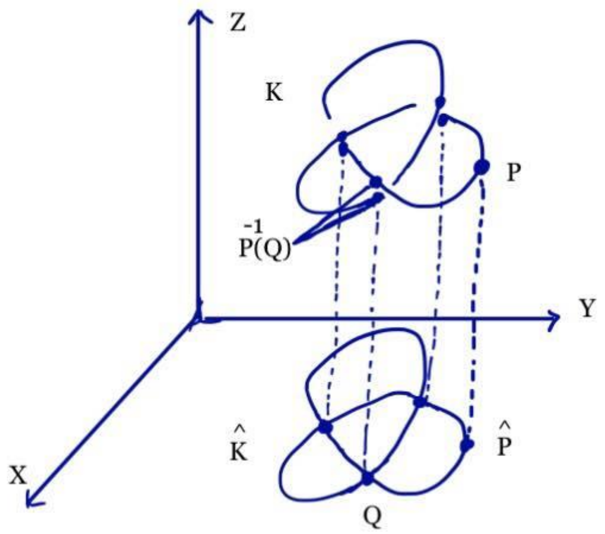
رابطان أو عقدتان يقال عنهما متكافئتان ازوتوبياً (Isotopic) equivalence اذا وجدت عوائل من التشاكلات التبولوجية ϕ_t لـR^3 $t \in [0,1]$ تبدأ بالعنصر المحايد $L_1 = \phi_0(L_1)$ وتنتهي بالتشاكل التبولوجي ϕ_1 حيث $L_2 = \phi_1(L_1)$. إن التكافؤ التبولوجي يولد صف تكافؤ يدعى نوع الرابط (link type). تخيل ان تقوم العقدة او الرابط بتغيير شكلها او شكله عند كل لحظة $t \in [0,1]$ حتى تصل الى الشكل النهائي L_2. هنا في كل زمن t تتشوه العقدة و نحصل على شكل جديد و بذلك يكون لدينا مجموعة من الاشكال لنفس العقدة.

مبرهنة : لتكن $f: R^3 \to R^3$ دالة تشاكل تبولوجي والتي تربط العقدتان الرياضيتان K_1 بـ K_2 فيR^3 فإذا كانت الدالة محافظة على الاتجاه فان K_1 تكافئ ازوتوبياً K_2 اي ان العقدة K_1 تسبح في الفضاء الثلاثي و تتخذ اشكال متكافئة تبولوجيا حتى تصل الى شكل معين K_2 عند لحظة معينة.

ليكن K_1 و K_2 عقدتان رياضيتان متكافئتان ازوتوبياً في S^3 ولتكن $f: S^3 \to S^3$ دالة تشاكل تبولوجي محافظ على الاتجاه على S^3 مع $f(K_1) = K_2$ فان المقصور (restriction) $f: (S3 \backslash K1) \to (S3 \backslash K2)$ هو أيضا تشاكل تبولوجي .وبذلك عقدتان رياضيتان متكافئتان ازوتوبياً تعطينا مكملاتها متشاكله تبولوجياً. إن دراسة العقدة الرياضية تكون في الفضاء الثلاثي البعد و لكن لصعوبة رسمها لغرض الدراسة فإنه يتم إسقاطها على المستوي و من ثم يتم تغيير نقاط التقاطع حسب العقدة فتظهر على شكل أضلاع تمر فوق بعضها كما هو في العقدة حتى نستطيع على الأقل تصور العقدة في الفضاء الثلاثي لأغراض الدراسة و حتى نبين ذلك نعرف دالة الإسقاط P رياضياً .

لتكن P دالة إسقاط (Projection Map) تسقط النقاط $P(x, y, z)$ في الفضاء الثلاثي على النقاط $P(x, y, 0)$ في الفضاء الثنائي البعد R^2. الان اذا كانت K عقدة رياضية (أو رابط رياضياتي) فإنه يمكن تعريف $P(K) = \widehat{K}$ إسقاط العقدة K في R^2 .نلاحظ أنه اذا كانت العقدة K ذات اتجاه في R^3 سيرث الإسقاط $\widehat{K}$ نفس الاتجاه في R^2 هنا الإسقاط $\widehat{K}$ ليس منحني بسيط مغلق في المستوي لكون $\widehat{K}$ تمتلك نقاط تقاطع و مع ذلك فإننا نستطيع تحريك K في الفضاء الثلاثي بحيث يمكن أن نضع الشروط الآتية:

إذا كانتQ نقطه تقاطع في $\widehat{K}$ فان $P^{-1}(Q) \cap K$ تمتلك بالضبط نقطتين في K بمعنى آخر Q هي نقطة مضاعفة في $\widehat{K}$. أي نقطة في K لا تقترن بنقطة واحدة فقط في $\widehat{K}$ حسب الشكل التالي :

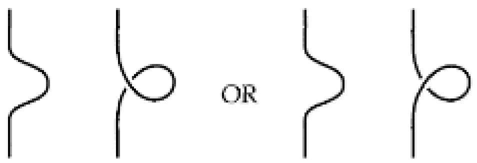


مخطط العقدة الرياضية (Diagram) D يدعى متناوب (Alternating) اذا كنا نستطيع التحرك على العقدة لنجد أنفسنا نمر أعلى ـــ أسفل ـــ أعلى على كل نقطة تقاطع .ومثال ذلك الشكل التالي

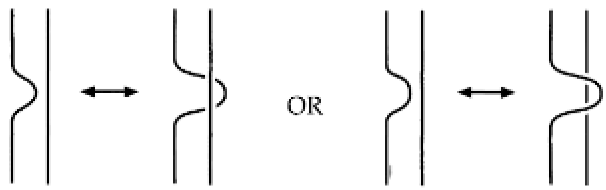
حركات رايدمايستر (Reidemeister moves)

كما اوضحنا سابقا ان دراسة العقدة في الفضاء تكون اصعب من رسمها على الورق لذلك يفضل دراستها على الورقة و رسمها لفهم الخواص اي ان الدراسة تكون لمخطط العقدة الساقط على المستوي XY. إذا كان لدينا مخططان (Diagrams) مختلفان لنفس العقدة

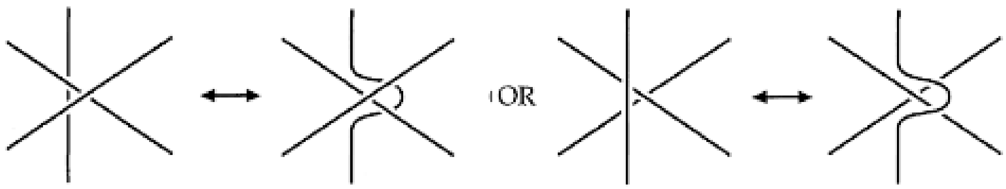
الرياضية فإنه نستطيع الحصول على أحدهما من الآخر بواسطة حركات منتهية بسيطة تدعى حركات رايدمايستر. تعتبر حركات رايدمايستر من اهم الثوابت التي تميز العقد عن بعضها. في العام 1930 لاحظ رايدمايستر بأنه توجد عقد رياضياتية تختف عن العقدة التافهة (الحلقة) و فسر ذلك بكون كل التشوهات (الالتواءات) على العقد يمكن اختصارها بسلسلة من ثلاث حركات. إن اي حركة رايدمايستر هي واحدة من ثلاثة حركات تغير أمكنة التقاطعات داخل مخطط العقدة الرياضية . حركة رايدمايستر الأولى تسمح لنا بوضع أو رفع تقاطع في العقدة الرياضية



أما حركة رايدمايستر الثانية تسمح لنا بـ إما أن نضيف تقاطعين أو نرفعهما



الحركة الثالثة لرايدمايستر تسمح لنا بانزلاق سلك (Strand) أو ضلع قصير من جانب واحد لتقاطع على الجانب الآخر له.



إن كل حركة تغير لنا المخطط على المستوي للعقدة الرياضية لذلك ان عدد منته من الحركات يعطينا أشكال أخرى و مخططات أخرى لنفس العقدة الرياضية .

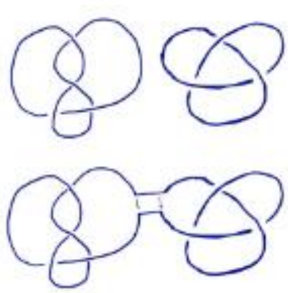
نظرية : مخططان يمثلان نفس العقدة الرياضية والرابط (Link) إذا وفقط إذا كنا نستطيع الحصول على أحدهما من الآخر عن طريق متتالية منتهية من حركات رايدمايستر .إن نظرية رايدمايستر تعطينا تعريف آخر لتكافؤالعقد الرياضية الإيزوتوبي بالاعتماد على المخططات .ومن هذه التعاريف نستطيع أن نعرّف صف التكافؤ:

$$[K] = \{K_1; K_1 \text{عقدة رياضية} \; K_1 \approx K\}$$

إن كل صف تكافؤ للعقدة رياضية يدعى نوع العقدة الرياضية. في القسم القادم سنقدم الية جبرية توجد علاقة بين عقدتين او اكثر تشبه عملية الجمع في الارقام و تدعى بالتركيب للعقد.

تركيب العقد الرياضية :(Composition of knot)

اذا كان لدينا عقدتان رياضيتان فيR^3 فإنه نستطيع أن نعرف عقدة رياضية جديدة بواسطة رفع قوس صغير من كل منهما ثم نلصق الأطراف الاربعة مع بعضها البعض لنحصل على قطعة واحدة بدل الاثنين .نسمي العقدة الرياضية الجديدة بالعقدة المركبة ونرمز لها بالرمز $K_2 + K_1$

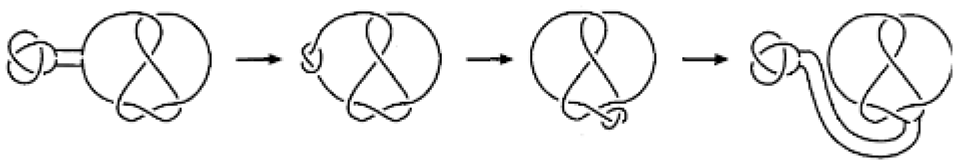


العقدة الرياضية K تدعى عقدة مركبة (Composite knot) اذا كان من الممكن أن يتم التعبير عنها كجمع ترابطي connected sum لعقدتين غير تافهتين. العقدتان K_2 , K_1 تدعى عوامل (factors) للعقدة الرياضية $K_2 + K_1$

ملاحظة: إن التركيب مستقل عن اختيار القوسين المراد إزاحتهما بشرط ان نختارهما بعيدا عن التقاطعات في العقدة و بحيث ان الاقواس الجديدة لا تقطع المخطط الاصلي للعقدة. كذلك إن التركيب وحيد للعقد الرياضية في حال عدم وجود اتجاه ولكن مع وجوده سيكون هناك ناتجين ربما يكونان مختلفين.

نظرية: إن التركيب $K_2 + K_1$ وحيد إذا وفقط إذا كانت إحدى العقدتين الرياضيتين K_2 , K_1 متناظرة (إذا كان بالإمكان تغييرها عن طريق التكافؤ الايزوتوبي للحصول على نفس العقدة الرياضية ولكن ذات اتجاه معاكس)

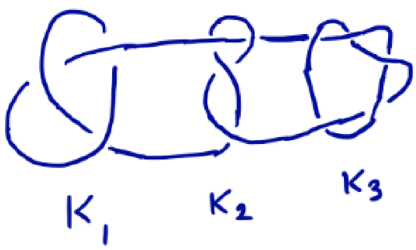
نظرية: إن تراكب العقد الرياضية إبدالي $K + L \approx L + K$ مع أو بدون اتجاه.



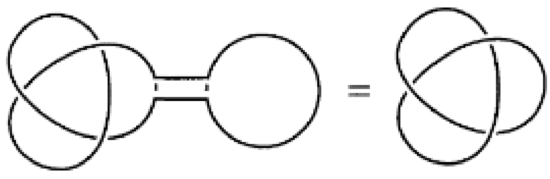
ملاحظة:

1) إن عملية التراكب بين العقد الرياضية تجميعية.

لتكن K_3, K_2, K_1 ثلاث عقد رياضية في R^3 فإن $K_3 + (K_2 + K_1) \approx (K_3 + K_2) + K_1$



2) $K_1 + 0 = K_1$ بمعنى أخر لا يوجد تركيب و0 هنا تمثل الحلقة و تسلك سلوك العنصر المحايد لذالك نريد أن يكون كلاً من K_2 و K_1 عقد رياضية غير تافهة.



K unknot K

3) إذا كانت العقدة الرياضية ليست جمع ترابطي لأي عقدتين رياضيتين غير تافهتين فإننا نطلق عليها عقدة رياضية أولية . Prime (knot)

مثال :عقدة Trefoil 

4) كل عقدة إما تكون أولية أو مركبة من عقدتين غير تافهتين وهذه العقدتان تكونان إما أوليتان أو كلاهما مركبتان من عقد غير تافهة وهكذا.

5) إن العقدة التافهة او الحلقة O ليست مركبة من أي عقد غير تافهة ولبيان ذالك افترض إن $O = K_1 + K_2$ حيث K_1 و K_2 عقدتان غير تافهة وعلى الأقل احدهما أولي وليكن $K_1 = O + K_1 = K_2 + K_1 + K_1$ وهذا تناقض كون K_1 أولي

6) لا يجب ان نخلط بين الرابط الرياضياتي و العقدة الرياضياتية المركبة.

نظرية الوجود والوحدانية لتحليل العقد الرياضية : كل عقدة رياضية يمكن تحليلها إلى عدد منته من العقد الرياضية الأولية. إن التحليل يحافظ على الترتيب ووحيد بمعنى آخر إذا كان k يمكن تحليله بطريقتين مختلفتين إلى

$K_1, K_2 \dots, K_n$ ، $\acute{K}_1, \acute{K}_2 \dots, \acute{K}_m$ فإن $m = n$

و $K_1 \approx \acute{K}_1 \quad , K_2 \approx \acute{K}_2, \dots K_n \approx \acute{K}_m$

إذا كانت العقدة الرياضية K ذات اتجاه فإن العقدة الرياضية المعاكسة بالاتجاه يرمز لها بالرمز $-K$

هنا يمكن لأي شخص أن يسأل إذا كانت مجموعة كل العقد الرياضية (متجهة او لا) مع عملية الجمع الترابطي + تكون زمرة أم لا؟. إن الإجابة على هذا السؤال هو بالنفي لأنه لا يوجد حسب الملاحظة رقم(2) نظير للعقدة الرياضية K بحيث$K + K^{-1} = O$ لذلك مجموعة العقد الرياضية مع عملية الجمع الترابطي تكون شبه زمرة مع O عنصر محايد.

ثابت العقدة (Knot invariant): لنفرض أن لكل عقدة K نستطيع أن نحدد كمية معينة او ثابت عددي او متعدة حدود او اي كائن رياضياتي $\rho(K)$. اذا كانت العقدتان متكافئتان فالكميات المحددة لكل عقدة متساوية. نسمي مثل هذه الكمية $\rho(K)$ بثابت العقدة. الآن اذا كانت $K_1 \approx K_2$ وفق أي تعريف كان من التكافؤ بالتالي فإن $\rho(K_1) = \rho(K_2)$

هل تكون العقدة و صورتها في المرآة متكافئتان؟ لنفرض أننا نستخدم الهوموموموفيزم المحافظ على الاتجاه. ليكن التطبيق

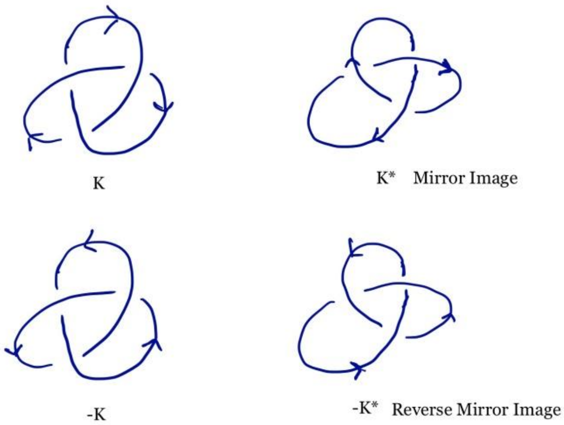
$$r: R^3 \to R^3: (x, y, z) \to (-x, -y, -z)$$

هذا التطبيق يسمى انعكاس في المنطقة. الصورة $r(K)$ تسمى صورة العقدة في المرآة و يرمز لها بالرمز K^* . اذا كانت $K \approx K^*$ تسمى العقدة عندئذ عقدة متناظرة (achiral knot) مثال ذلك عقدة الشكل 8 هي عقدة متناظرة بينما العقدة ثلاثية الورق ليست متناظرة.

العقدة القابلة للانعكاس (Reversible Knot)

نحن نعلم أنه يوجد اتجاهين متعاكسين للعقد الموجهة K و $K-$. اذا كانت $K \approx -K$ عندها تسمى K قابلة للانعكاس.

العقد ذات عدد صغير نسبياً من التقاطعات تكون بشكل عام قابلة للانعكاس. العقدة $-K^*$ تسمى معكوس صورة K في المرآة



ليكن $r: K \to K^*$ و $s: K \to -K$ و $t = r \circ s$ أي $t: K \to -K^*$ و بما أن

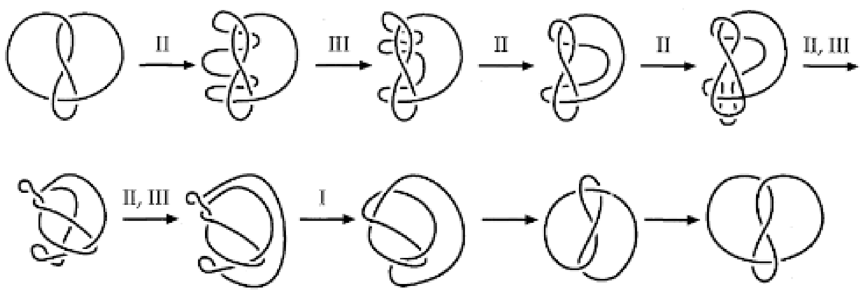
$$-(-K) = K, (K^*)^* = K, (-K)^* = -(K^*)$$

فإن التطبيقات r, s, t تشكل زمرة.

∘	1	r	s	t
1	1	r	s	t
r	r	1	t	s
s	s	t	1	r
t	t	s	r	1

صفة التناظر:(Achiral)

اذا كان لدينا عقدة رياضية K فيR^3 فإن صورتها وفق انعكاس عبر المستوي يسمى صورة العقدة في المرآة. هذا الانعكاس هو تشاكل تبولوجي يعكس الاتجاه في R^3. اذا كانت K مكافئة ازوتوبياً لصورتها في المرآة فإنها تدعى متناظرة (achiral) وإذا لم تكن متكافئة ازوتوبياً فإنها تدعى فاقدة التناظر (chiral) كمثال على ذلك العقدة الرياضية Fig8 باستخدام حركات رايدمايستر التي هي بالاصل حركات ايزتوبية



بعض الثوابت للعقد والروابط الرياضية

إن ثابت العقدة الرياضية Knot invariant هو كمية رياضياتية يقترن مع كل عقدة رياضياتية بطريقة معينة بحيث إن هذا الثابت يكون منسوب لـعقدتين رياضيتين متكافئتين ازوتوبياً. هذه الثوابت يتم دراستها مع المخططات للعقدة في المستوي حيث انه من الممكن الحصول على اكثر من مخطط لعقدة تسبح في الفضاء فكلما تغير شكلها في الفضاء ايزوتوبيا يتغير شكل مسقطها على المستوي و بذلك نحصل على الكثير من المخططات لنفس العقدة و هذا يعني ايضا ان نقاط التقاطع تتناقص و تتزايد بحسب سباحة العقدة في الفضاء و تغيراتها ايزوتوبيا لذلك نبحث دائما عن افضل مخطط لعقدة يمثلها بشكلها النهائي. في الجزء القادم سنقدم ثوابت عددية و جبرية (متعددات حدود) للعقدة و الرابط.

أصغر عدد لنقاط التقاطع إن أي مخطط D لعقدة رياضية K له على الأكثر عدد منتهي من نقاط التقاطع ويرمز لها بالرمز $C(D)$, إن هذا العدد لا يمثل ثابت للعقدة الرياضية

مثال: إن $C\left(\right.$  $\left.\right) = 1$, $C($  $) = 0$ لنفس العقدة الرياضية لذلك نستطيع أن نغير التعريف كآلاتي:

إن أصغر عدد لنقاط التقاطع لكل المخططات للعقدة الرياضية K يرمز له بالرمز $\mathrm{C(K)}$ وهو ثابت للعقدة الرياضية.

بما ان العقدة لها اكثر من مخطط على المستوي لذلك نبحث عن اصغر عدد من نقاط التقاطع لكل المخططات لنفس العقدة بعد اجراء عدد منتهي من حركات رايدمايستر و هذا العدد يكون هو $C(K)$ و هو يكون ثابت العقدة و لكن لصعوبة الحصول على كل المخططات فان هذا الثابت يكون مفيد بصورة جزئية.

نظرية: $C(K) = min_D C(\mathrm{D})$ هو ثابت للعقدة الرياضية وD يمثل مجموعة كل المخططات للعقدة الرياضية D والتي يمكن الحصول عليها ببعض حركات رايد ماستر.

ملاحظة : لا يوجد لحد الآن طريقة معروفة لحساب $\mathrm{C(K)}$ بصورة دقيقة لعدم وجود طريقة احتساب كل المخططات للعقدة. هنالك حدس موجود عن كيفية حساب نقاط التقاطع للتراكب بين عقدتين رياضيتين كالآتي

$$\mathrm{C(K_1 + K_2) = C(K_1) + C(K_2)}$$

في حالة خاصة عندما K_2, K_1 عقدتان ذات نقاط تقاطع متناوبة فإن هذا الحدس صحيح

العدد غير العقدي The UNKNOTTING NUMBER

في أي مخطط يوجد نقاط تقاطع وحتى نميز التقاطع جيداً فإن التقاطع يجب أن يكون من النوع السفلي او العلوي. فكرة هذا الثابت انه نقوم بتبديل في التقاطع نفسه اي نجعل التقاطع العلوي سفلي و السفلي علوي و ندرس اذا كانت العقدة قد تحولت الى العقدة التافهة ام لا في حال نعم نتوقف و يكون الناتج يساوي واحد اما اذا لا فنتابع نفس العملية على التقاطع الذي بعده حتى نصل الى العقدة التافهة

لذلك فإن فكرة العدد غير العقدي تعتبر موضعية وعند كل نقطة تقاطع نقوم بتبديل أي بجعل المستقيم العلوي سفلي والسفلي و علوي وبذلك نحصل على عقدة رياضية أخرى جديدة. ان عدد مرات التغير عند كل تقاطع يسمى العدد الغير عقدي.

مثال : عقدة الأوراق الثلاثية (Trefoil knot)

في المثال أعلاه عندما قمنا بتبديل واحد من نقاط التقاطع بجعل الأعلى أسفل حصلنا على عقدة رياضية جديدة العقدة الرياضية التافهة

نظرية: نستطيع تحويل مخطط D لعقدة رياضية عشوائية إلى مخطط للعقدة الرياضية التافهة بتبديل علوي (سفلي) عند عدد معين من نقاط التقاطع. ان العملية أعلاه تدعى العملية غير العقدية (unknotting operation) اي بمعنى عدد عمليات التبديل للحصول على الحلقة الخالية من التقاطعات.

العدد غير العقدي هو أصغر عدد للعمليات غير العقدية المطلوبة لتحويل المخطط D لعقدة رياضية K إلى مخطط العقدة الرياضية التافهة ويرمز له بالرمز $\mathrm{U(D)}$ ولكن$\mathrm{U(D)}$ لا يمثل ثابت للعقدة الرياضية إنما يرتبط بمخطط العقدة الرياضية فقط.

نظرية: إذا كانت K عقدة رياضية فان $U(K) = min_D\, U(D)$ أصغر عدد للعمليات غير العقدية لكل المخططات التي يمكن إقرانها للعقدة الرياضية K هو ثابت للعقدة الرياضية ويدعى U(D) العدد غير العقدي.

ملاحظة :

1) اذا كانت K عقدة غير تافهة فإن $U(K) \geq 1$

2) إن حساب U(K) مسألة صعبة جداً حتى لبعض العقد البسيطة لا توجد لحد الآن طريقة فعالة لإيجاد العدد غير العقدي.

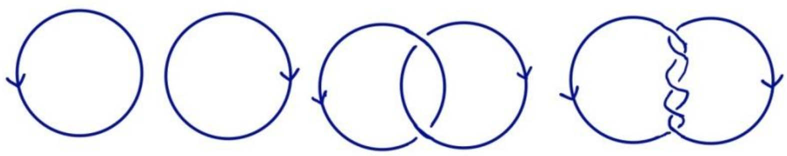
العدد الارتباطي LINKING NUMBER

هذا الثابت هو لرابط Link و ليس للعقدة Knot و ايضا يعتمد على التقاطعات في الرابط بين العقد. هنا يفضل ان تكون العقدة موجهة بحيث نجد عند كل تقاطع تكون الاضلاع ذات اتجاه مع او عكس عقارب الساعة. إن نقطة التقاطع c لأي مخطط تحتوي حالتين السالبة والموجبة

+1 -1

نلاحظ في حالة الاتجاه الموجب + يكون دوران المستقيم السفلي بنفس اتجاه عقارب الساعة لالتقاء الأسهم وفي حالة الاتجاه السالب - يكون دوران المستقيم السفلي عكس عقارب الساعة لالتقاء الأسهم. افترض أن D مخطط متجه لرابط مكون من مركبتين (عقدتين رياضيتين) $L = \{K_1, K_2\}$ وافترض أيضا أن نقاط التقاطع للمخطط D عند تقاطع العقدتين K_2, K_1 هي $c_2, c_1 \ldots \ldots c_m$ فإنه يمكن اعريف عدد الارتباط (Linking Number) كلاتي:

$$(\mathrm{LK}) = {}^{1}\!/_{2}[\,(\mathrm{sign}\ (c_1)\ + \mathrm{sign}\ (c_2)\ + \cdots \ldots \mathrm{sign}\ (c_m)]$$



ويدعى العدد الرابطي لـK_1 وK_2 ويرمز له بالرمز $\mathrm{LK}(K_1, K_2)$ في الروابط أعلاه الحالة الاولى يكون العدد الرابطي 0 و الثاني 2 و الثالث 1 على التوالي

نظرية: إن العدد الارتباطي $\mathrm{LK}(K_1, K_2)$ هو ثابت للرابط L بمعنى آخر إذا كان لدينا مخطط آخر D ذو اتجاه للرابط L فإن قيمة العدد الارتباطي هو نفسه للمخطط الأصلي لـ L لذلك سوف نطلق على هذا العدد الارتباطي لـ L يرمز له بالرمز LK(L) .

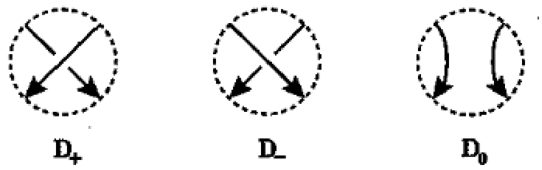
متعددات الحدود للعقد الرياضياتية Polynomials of Knots

في هذا الجزء من الفصل سنقدم ثابت جبري افضل من الاعداد الجبرية السابقة المرتبط بالعقدة الرياضياتية و تعطي دراسة موسعة لايجاد الفروقات بين العقد. هذه الثوابت الجبرية تكون على شكل متعددات حدود ترتبط مع العقد حيث ان معاملات هذه المتعددات يتم حسابها عن طريق خواص العقدة نفسها. و كمثال سنبدأ بمتعددة حدود الكساندر كونوي Alexander-Counway polynomial

لتكن K عقدة (أو L رابط) موجهة معطاة نستطيع ربط متعددة حدود لورانت بها $\nabla_K(\mathrm{Z})$ مستخدمين الفرضيات التالية:

1 - اذا كانت العقدة تافهة فإن $\nabla_K(\mathrm{Z}) = 1$

2 - لتكن D_{-}, D_{+}, D_{0} مخططات نظامية لثلاث عقد أو روابط K_{-}, K_{+}, K_{0} متماثلة بكل شيء في مخططاتها ماعدا التقاطع الظاهر في الشكل (اي بمعنى يوجد تقاطع معين له ثلاثة اشكال مختلفة)

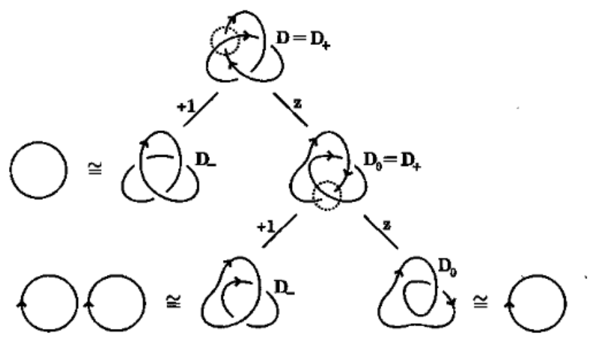


عندئذ ترتبط متعددات الحدود لهذه العقد أو الروابط بالعلاقة التالية التي تسمى علاقة **Skein**:

$$\nabla_{D_{+}}(Z) - \nabla_{D_{-}}(Z) = z\nabla_{D_{0}}(Z)$$

فرضية: متعددة حدود Alexander - Counway للرابط التافه ب m مركبة حيث $m \geq 2$ تساوي الصفر.

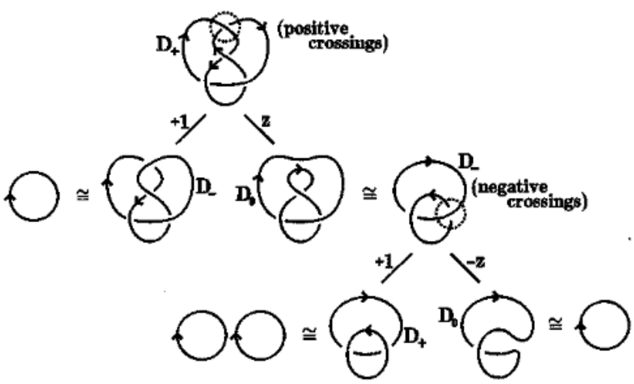
مثال : right-hand trefoil



$$\nabla_{K}(Z) = 1.\nabla_{0}(Z) + z\nabla_{00}(Z) + z^{2}\nabla_{0}(Z)$$

و بما أن $\nabla_{0}(Z) = 1, \nabla_{00}(Z) = 0$ فإن $\nabla_{K}(Z) = 1 + z^{2}$

مثال: عقدة الشكل ثمانية



$$\nabla_{K}(Z) = 1.\nabla_{0}(Z) + z\nabla_{00}(Z) - z^{2}\nabla_{0}(Z) = 1 - z^{2}$$

نلاحظ أن متعددتي الحدود في المثالين مختلفتين و هذا يظهر الاختلاف بين العقدتين الثلاثية الورق و الثمانية الشكل.

متعددة حدود هومفلي Homfly polynomial متعددة حدود بمتحولين $P(v, w)$ تعرف عن طريق الفرضيات :

$P_{0}(v, w) = 1$ (1

$\frac{1}{v} P_{D_+}(v,w) - vP_{D_-}(v,w) = w\, P_{D_0}(t)$ (2

متعددة حدود كوفمان The Kauffman Polynomial

ليكن D مخطط موجه لعقدة موجهة او رابط المجموع$w(D)$ لإشارات كل نقاط التقاطع في D تسمى Tait number ل D أو writh number

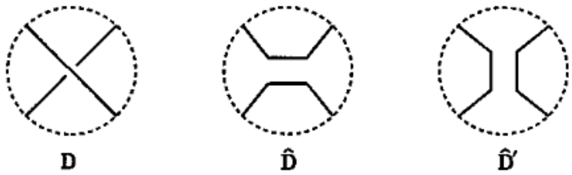
$$w(D) = \sum_{c \in c(D)} sign\,(c)$$

ليكن D مخطط موجه للعقدة أو الرابط غير الموجه عندئذٍ يوجد متعددة حدود لورانت وحيدة بمتحول واحد $P_D(A)$ تسمى Kauffman's bracket polynomial تحقق: $P_D(A)$ ثابت تحت حركات رايد ماستر الأولى والثانية.

$P_0(A) = 1$

$P_{D_1 \cup D_2}(A) = -(A^2 + A^{-2}) P_{D_1}(A).P_{D_2}(A)$

$P_D(A) = A.P_{\hat{D}}(A) + A^{-1}.P_{\hat{D}'}(A)$

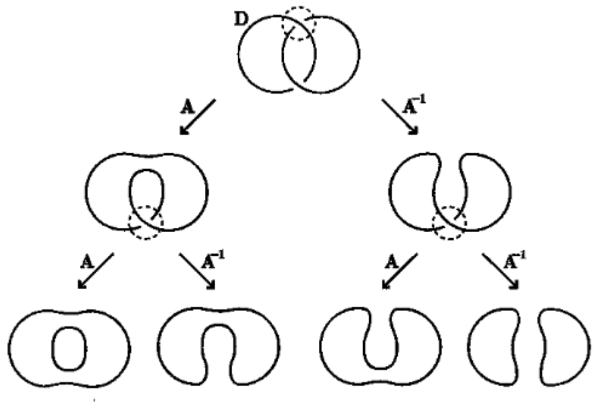


ملاحظة : $P_D(A)$ ليست ثابتة تحت حركة رايد ماستر الأولى .

نظرية: ليكن D مخطط موجه لعقدة أو رابط نعرف:

$$\hat{P}_D(A) = (-A^{-3})^{W(D)} P_D(A)$$

وهذه متعددة الحدود ثابتة للعقد الموجهة أو الروابط كما في المثال الاتي لرابط هوبف



$$P_D(A) = A^2\big(-(A^2 + A^{-2})\big) + 1 + 1 + A^{-2}\big(-(A^2 + A^{-2})\big)$$

$$= -A^4 - A^{-4}$$

و بما أن $w_D(D) = 2$ فإن :

$$\hat{P}_D(A) = -A^{-2} - A^{-10}$$

متعددة حدود جونز Jones Polynomial

هي ثابت للعقدة في الفضاء الثلاثي اكتشفت بالاصل من قب العالم جونز في حوالي العام 1983 [JV] كنقطة انطلاق في عمله على جبر فون نيومان (Von neuman) حيث يتم حساب متعددة حدود لورانت للعقدة و الرابط. تعتبر متعددة حدود جونز نوع من انواع الثورة بالفيزياء النظرية. هذه الثورة جائت بعد ان تم اكتشاف المتعددة كثابت رياضياتي للعقدة الرياضياتية. تنبه الباحث الكبير ميشيل عطية لهذا الموضوع خلال دراساته في الفيزياء الكمية في العام 1988 و قدم مسألة في نظرية في الفيزياء الكمية تعتمد بصورة مباشرة على متعددة حدود جونز. بالنسبة الى متعددة حدود جونز فأنها تتعامل مع خفايا العقدة الرياضياتية في الفضاء الثلاثي الابعاد. هذه المتعددة هي رابط رياضياتي للعقدة في الفضاء الثلاثي و لكن ليس لديها تعريف لائق لها في الفضاء الثلاثي كون حسابها يكون في المستوي الثنائي الابعاد. هنالك الكثير من التعاريف اللائقة لمتعددات الحدود للعقد الرياضياتية و لكنها تاتي في اسقاط العقدة في الفضاء الثنائي كما رأينا ذلك في هذا الفصل و من ثم ايجاد طريقة حساب في البعد الثاني و بعد ذلك يتم اثبات ان الناتج مستقل عن طريقة اسقاط العقدة في المستوي حسب حركات رايدماسيتر التي تم تقديمها سابقا. سنحاول هنا تقديم صيغها المتعدة و الية حسابها بمختلف الطرق و من اهمها طريقة المكعب النوني التي سيستخدمها كوفمان احقا في حساب الزمرة الهومولوجية.

لتكن K عقدة موجهة (او رابط) و D مخطط لها عندئذ يمكن تعريف كثيرة حدود جونز $\mathrm{J_K}\,(t)$ وفق الفرضيتين التاليتين:

1- اذا كانت العقدة تافهة فإن $\mathrm{J_K(t)} = 1$

2- علاقة **Skein** التالية محققة :

$$\frac{1}{t}\mathrm{J}_{\mathrm{D}_+}(\mathrm{t}) - \mathrm{t}\mathrm{J}_{\mathrm{D}_-}(\mathrm{t}) = (\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}})\mathrm{J}_{\mathrm{D}_0}(\mathrm{t})$$

ملاحظة :

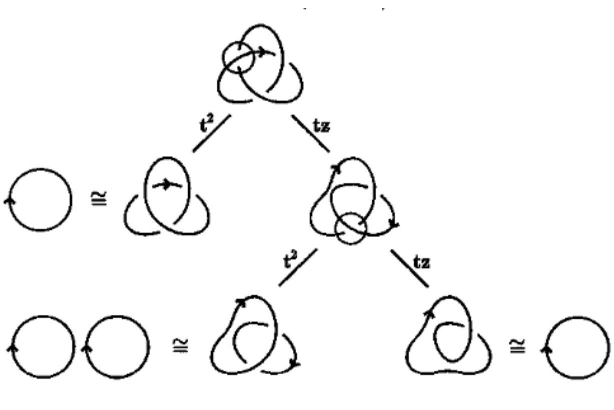
1- متعددة حدود جونز هي متعددة حدود لورانت بالمتغير $\sqrt{t}$

2- متعددة حدود جونز ثابتة للعقدة .

3- كثيرة الحدود للرابط التافه ب m مركبة

$$\mathrm{J}_{0_m}(\mathrm{t}) = (-1)^{m-1}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{m-1}$$

مثال : right-hand trefoil



$$\mathrm{J}_K(\mathrm{t}) = t^2 J_0(t) + t^3 z J_{00}(t) + t^2 z^2 J_0(t)$$
$$= t + t^3 - t^4$$

ملاحظة:

$$J_{D\cup 0_m}(t) = (-1)^m\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^m J_D(t)$$

$$J_{K_1+K_2}(t) = J_{K_1}(t).J_{K_2}(t)$$

$$J_{D_1\cup D_2}(t) = -(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}})J_{D_1}(t).J_{D_2}(t)$$

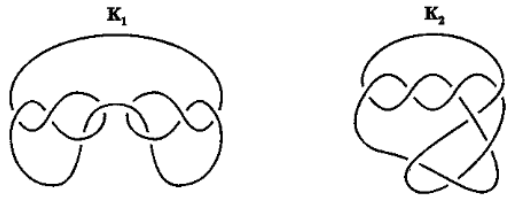
لتكن K^* صورة K في المرآة عندئذ :

$$J_{K^*}(t) = J_K(t^{-1})$$

نستنتج أنه عندما تكون متعددة الحدود ليست متناظرة تكون العقدة غير متكافئة مع صورتها في المرآة لاختلاف متعددتي الحدود.
لتكن $-K$ العقدة K نفسها و لكن باتجاه معاكس عندئذ: $J_{-k}(t) = J_K(t)$

ملاحظة: على الرغم من أن متعددة حدود جونز ثابت قوي لكنه ليس كامل لأنه يوجد عدد غير منته من العقد غير المتكافئة التي لها نفس كثيرة الحدود.

مثال :

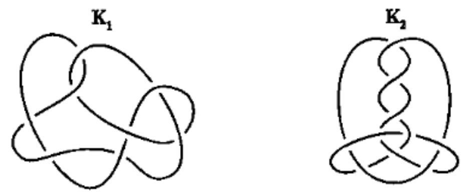


$$J_{K_1}(t) = J_{K_2}(t) = (t^{-2}-t^{-1}+1-t+t^2)^2$$

الاختلاف بين هاتين العقدتين ظهر في كثيرتي حدود أليكساندر .

إذاً هناك حالات لا تستطيع بها كثيرات حدود جونز التمييز بين العقد بينما تنجح كثيرات حدود أليكساندر في ذلك و العكس صحيح.
هناك حالات تتساوى فيها كثيرات حدود جونز و أليكساندر بالرغم من كون العقد مختلفة

مثال



عند حساب العدد غير العقدي للعقدتين نجد أن $M(K_1) = 2, M(K_2) = 1$ إذاً العقدتان مختلفتان.

ملاحظة: ان متعددة حدود هامفلي هي تعميم لمتعددة حدود جونز حيث تتحقق المساواة :

$$J_K(t) = P(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})$$

ملاحظة: في متعددة حدود كوفمان عندما نبدل $A = t^{-\frac{1}{4}}$ نحصل على كثيرة حدود جونز

$$\hat{P}_D\left(t^{-\frac{1}{4}}\right) = J_K(t)$$

سنقوم الان باعطاء تصور اكبر للكثيرات و كيفية ايجاد افكار و طرق لحسابها بحيث تكون مفيدة خلال تقديمنا فكرة حساب هومولوجيا كوفانوف. في البداية نقوم بتعريف أقواس كوفمان Kauffman brackets هذه الطريقة تعطي الفكرة المشابهة لتعريف كوفانوف هومولوجي.

نريد أن نبين في البداية ان كثيرة حدود لورانت على حلقة R هو جمع منته $\sum_{k=m}^{n} a_k x^k$ (finite sum) بحيث أن $a_k \in R, m, n \in \mathbb{Z}$ (بمعنى اخر يسمح للأسس السالبة) هذا التعريف لكثيرة حدود لورانت سيساعدنا في تعريف اقواس كوفمان و لهذا سنعود مرة اخرى لاستخدام مفاهيم كوفمان

اقواس كوفمان Kauffman brackets : اقواس كوفمان لمخطط D لعقدة رياضية K و يرمز له بالرمز $< D >$ هو كثيرة حدود لورانت بالمتغير q مع معاملات في $\mathbb{Z}$ و تحقق الثلاث شروط الاتية :

1- $< \emptyset >= 1$

2- $< O \cup D >= (q + q^{-1}) < D >$

3- $\langle \times \rangle = \langle)(\rangle - q \langle \asymp \rangle$

هنا $\emptyset$ تمثل الرابط الفارغ .(Empty link). العلاقة الاولى تعرف اقواس كوفمان للرابط الفارغ.

اما العلاقة الثانية تعرف اقواس كوفمان للاتحاد المنفصل بين الحلقة ومخططD لأي عقدة رياضية حيث أن اقواس كوفمان$< D >$ قد تم حسابها سابقاً اما العلاقة الثالثة فهي تعطينا اقواس كوفمان للمخطط D عن طريق حساب اقواس كوفمان لمخطط آخر و لكن بتقاطعات أقل. لاحظ أن العلاقة الثالثة لأقواس كوفمان تكون مكافئة ل $\langle \times \rangle = \langle \asymp \rangle - q \langle)(\rangle$ و هو بصورة بسيطة مجرد تدوير التقاطع 90 درجة.بتطبيق العلاقة الثالثة بصورة مستمرة يستطيع شخص أن يختزل كل العقد الى جمع من اقواس كوفمان للحلقات البسيطة. ان العلاقة الاولى و الثانية تحدد اقواس كوفمان ل K من الحلقات الغير مترابطة

$$< K \; unlinked \; unknot >= (q + q^{-1})^k$$

لاحظ ان اقواس كوفمان ليس ثابت للعقدة ولكن بعد ان يتم وضع توجيه على العقدة و المخطط فتصبح ثابت و تحسب كمتعددة حدود جونز .

مجموع عمليات التمليس في العقدة Total smoothings of a knot

لتكن D مخطط عقدة لها n من النقاطعات. ان عملية تمليس العقدة هي بأن يتم فك التقاطع بطريقتين عمودية $)($ و أفقية $\asymp$ عملية التمليس الأفقية تسمى 0-smoothing و عملية التمليس العمودية تسمى 1-smoothing نحصل على مجموع عمليات التمليس عند حدوث استبدال أو فك كل تقاطع بأحد هاتين العمليتين الأفقية و العمودية .

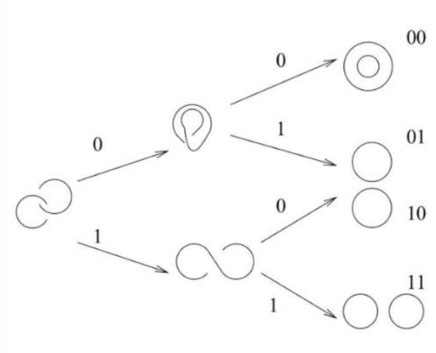
لاحظ أنه بعد إجراء العمليات أعلاه سنحصل بالنهاية على منحنيات مغلقة (حلقات غير مرتبطة) و بدون أي تقاطع حيث نستطيع حساب اقواس كوفمان لها . وبما أنه لدينا عمليتين فقط افقية و عمودية و لدينا n من التقاطعات فيكون لدينا 2^n من حالات الاستبدال و الفك.

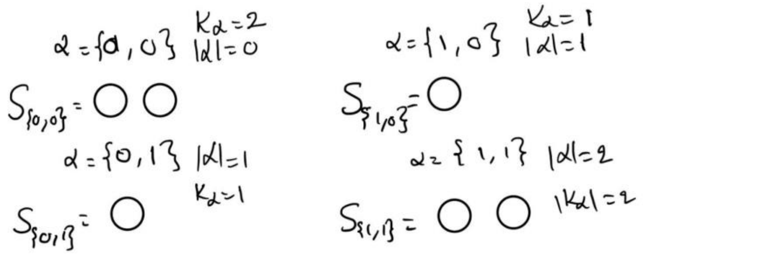
سنقوم الآن بإيضاح الفكرة بواسطة عناصر α تدعى كلمات من المجموعة $\{0,1\}^n$ (خيط بطول n من عناصر المجموعة $\{0,1\}$) و هنا n تمثل عدد التقاطعات في مخطط العقدة الرياضية D.

نقوم بترقيم كل تقاطع بالأرقام $1,2,\dots,n$ الآن في التقاطع رقم i حيث $1 \le i \le n$ سيتم فكه واستبداله بإحدى عمليتي التمليس الأفقية أو العامودية و هذا يعتمد على *0* أو *1* في الموقع i في داخل الكلمة α بمعنى انه اذا كان في التقاطع i عملية التمليس عمودية نكتب *1* و اذا كانت أفقية فيكون *0* ثم نذهب بعدها الى التقاطع الذي بعده $i+1$ و نطبق نفس الآلية إما *1* أو *0*.

1.6 مثال ذلك رابط هوبف 

في هذا الرابط يوجد تقاطعين أي أن شريط الكلمة α سيكون من عنصرين و بذلك يكون





الآن في حال ترتيب التقاطعات في مخطط العقدة و بذلك يكون اقتران طبيعي شامل بين عدد عمليات تمليس مع عدد التقاطعات n و عناصر $\{0,1\}^n$ و سنشير لناتج عمليات التمليس المرتبطة ب α ب S_α ان عدد مرات ظهور 1 في α يدعى ارتفاع عمليات التمليس و يرمز له بالرمز$|\alpha|$ أو r_α كذلك عدد عمليات التمليس الأفقية 0_smoothings (عدد عمليات التمليس العمودية 1_smoothing) تشير الى عملية التمليس و هو عملية التمليس$S_{0\,0\dots0}$ ($S_{1\,1\dots1}$) التي في كل تقاطع في المخطط D ثم ابداله بإما عملية تمليس أفقية (عملية تمليس عمودية) سنرمز لعدد المنحنيات المغلقة (الحلقات) الناتجة من عملية التمليس بالرمز k_α و بذلك يكون أقواس كوفمان لS_α كالآتي :

$$< S_\alpha >= (q + q^{-1})^{k_\alpha}$$

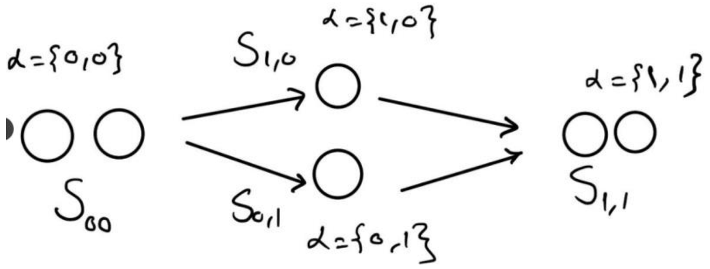
المكعب النوني الأبعاد The n-Dimensional Cube

ليكن لدينا $\alpha, \acute{\alpha} \in \{0,1\}^n$ بحيث أن α تختلف عن $\acute{\alpha}$ في موقع واحد على الأقل (في موقع معين في $\acute{\alpha}$ يوجد 1 و في نفس الموقع في α يوجد 0) وبذلك يكون $|\alpha| < |\acute{\alpha}|$ نعرف المكعب النوني الأبعاد بأنه مخطط موجه(directed graph) مع رؤوس على شكل عناصر $\alpha \in \{0,1\}^n$ و أضلاع موجهة $\alpha \to \acute{\alpha}$ حيث أن$\alpha, \acute{\alpha}$ قد تم تعريفهما اعلاه .الآن لنأخذ المثال التالي:

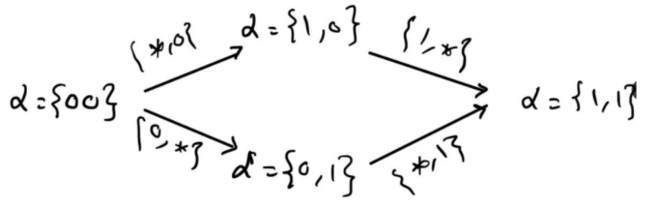
مثال : رابط هوبف  حصلنا على تمليس كالآتي:

لنعود الى α في المثال السابق يكون لدينا :

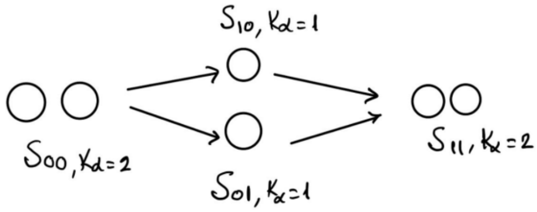
$n = 2$



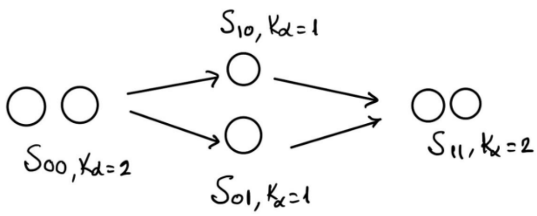
لنعود الى α في المثال السابق يكون لدينا



هنا لدينا $\alpha=\{0,0\} \to \acute{\alpha}=\{0,1\}$ و نعرف الدالة ξ_* بين $\alpha, \acute{\alpha}$ حيث تكون $\xi_{*,0}:\{0,0\} \to \{1,0\}$ هنا $*$ تمثل الموقع الذي تغير فيه العنصر من *0* الى *1* يعني من عملية التمليس الافقية الى عملية التمليس العمودية. الآن نقدم آلية افضل في حساب اقواس كوفمان و التي هي كما أسلفنا كثيرة حدود لورانت باستخدام المكعب النوني الأبعاد.لقد وصلنا الى أن S_α هو ناتج عملية التمليس بعد فك أي تقاطع اما بصورة أفقية أو عمودية و حصلنا على أن $S_\alpha=(q+q^{-1})^{k_\alpha}$ حيث أن k_α يمثل عدد الحلقات في كل S_α.
الآن لنحسب أقواس كوفمان لرابط هوبف كما اوضحنا سابقاً بأن المكعب النوني الأبعاد للمكعب يكون كالآتي :



حسب الشرط الثاني و الثالث مع S_α فيها تساوي عدد عمليات التمليس الأفقية و العمودية فإن كثيرة الحدود ل S_α تكون $< S_\alpha > (-q)^{|S_\alpha|}$ لاحظ أن في الشرط الثالث حصلنا على الاشارة السالبة بعد تدوير التقاطع بدرجة 90° وبذلك تكون لدينا كثيرة حدود أقواس كوفمان كالآتي :



$$(q+q^{-1})^2+2(-\mathrm{q})(q+q^{-1})\ +(-q)^2(q+q^{-1})^2$$

هذه الحسابات تقودنا الى النظرية الأتية :

نظرية :ليكن D مخطط لعقدة رياضية K مع n من التقاطعات.العلاقات في تعريف أقواس كوفمان تعرف كثيرة حدود وحيدة بغض النظر عن التقاطع الذي ندرسه و كيفية ترقيمه و التي يمكن كتابتها بالشكل الاتي :

$$< D >=\sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}(-q)^{r_\alpha}\,(q+q^{-1})^{k_\alpha}$$

البرهان:البرهان سيكون بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد التقاطعات لمخطط العقدةD في المستوي. في حال كون عدد التقاطعات يساوي صفر فقد بينا سابقاً اذا كان D مخطط لعقدة بدون تقاطعات ولها k من المنحنيات المغلقة (حلقات) فإن أقواس كوفمان ل D هي $(q+q^{-1})^k$ والتي تحقق المعادلة السابقة
نفرض أن النظرية صحيحة ل $n=k$ من التقاطعات أي أن

$$< D >= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} (-q)^{r_\alpha} (q+q^{-1})^{k_\alpha}$$

و نريد أن نبرهن صحتها عندما $n=k+1$ ليكن D مخطط عقدة ذو n من التقاطعات. نختار احد التقاطعات فيها و لنرمز له بالرمز $i\ th$. ليكن D_0 مخطط عقدة مشابهة بالضبط ل D في التقاطعات ماعدا في التقاطع i يفك بواسطة عملية تمليس أفقية و ليكن D_1 أيضاً مخطط عقدة يشابه D ماعدا في التقاطع i يفك بصورة عمودية فإنه حسب العلاقة الثالثة في تعريف أقواس كوفمان نحصل على $< D >=< D_0 > -q < D_1 >$ الآن حسب الفرضية الثانية في الاستقراء الرياضي فإن

$$< D_0 >= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^k} (-q)^{r_\alpha} (q+q^{-1})^{k_\alpha}:$$

وكذلك

$$< D_1 >= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^k} (-q)^{r_\alpha} (q+q^{-1})^{k_\alpha}$$

الآن ليكن α_j لكل $1\le j\le n$ العنصر j داخل $\alpha\in\{0,1\}^n$ لبعض حالات $\alpha\in\{0,1\}^k$ ليكن α^1 , α^0عناصر من $\{0,1\}^{k+1}$ بحيث أن العنصر i في α^0 قيمته 0 و $(\alpha^0)_{j<i}=\alpha_j$ و $(\alpha^0)_{j>i}=\alpha_{j-1}$ و بنفس الفكرة فإن العنصر i في α^1 قيمته 1 و يحقق$(\alpha^1)_{j<i}=\alpha_j$ و $(\alpha^1)_{j>i}=\alpha_{j-1}$ و بذلك يكون α^0 (نفس الحالة ل α^1) يمثل مجموع عمليات التمليس ل D و هو بالضبط عدد عمليات التمليس ل D_0 و كذلك D_1. ليكن k_α^0 هو عدد المنحنيات المغلقة في D_0 مع عملية التمليس α و ليكن k_α^1 هو عدد المنحنيات المغلقة في D_1 مع عملية التمليس α فإنه , $k_\alpha^0=k_{\alpha^0}, k_\alpha^1=k_{\alpha^1}$ لاحظ أن r_α يعتمد فقط على α و ليس على عملية التمليس و هذا يعني أن $r_{\alpha^0}=r_\alpha=r_{\alpha^1}-1$

$$< D >=< D_0 > -q < D_1 >$$

$$= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^k} (-q)^{r_\alpha} (q+q^{-1})^{k_{\alpha^0}} + (-q) \sum_{\alpha\in\{0,1\}^k} (-q)^{r_\alpha} (q+q^{-1})^{k_{\alpha^1}}$$

$$= \sum_{\alpha^0\in\{0,1\}^{k+1}} (-q)^{r_{\alpha^0}} (q+q^{-1})^{k_{\alpha^0}} + (-q) \sum_{\alpha^1\in\{0,1\}^{k+1}} (-q)^{r_{\alpha^1}} (q+q^{-1})^{k_{\alpha^1}}$$

$$= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^{k+1}} (-q)^{r_\alpha} (q+q^{-1})^{k_\alpha}$$

وآخر مساواة تتحقق بسبب:

$$\{\alpha^0 : \alpha\in\{0,1\}^k\} \cup \{\alpha^1 : \alpha\in\{0,1\}^k\} = \{0,1\}^{k+1}$$

$$\{\alpha^0 : \alpha\in\{0,1\}^k\} \cap \{\alpha^1 : \alpha\in\{0,1\}^k\} = \emptyset$$

في هذه المرحلة سنقدم تعريف اخر لمتعدة حدود جونز نحتاج أن نعرف التقاطع الموجب (positive crossing) والتقاطع السالب (Negative crossing)

+1 -1

ليكن D مخطط لعقدة رياضية مع n_+ تقاطعات موجبة و n_- تقاطعات سالبة فإن كثيرة حدود جونز الغير قياسية (unnormalized Jones polynomial) للمخططD والتي يرمز لها بالرمز $\hat{J}(D)$ هي كثيرة الحدودالتالية :

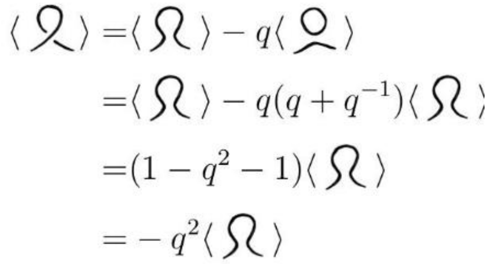
$$\hat{J}(D) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} < D >$$

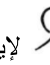
و حتى يتم حسابها نحتاج لحساب اقواس كوفمان ل D

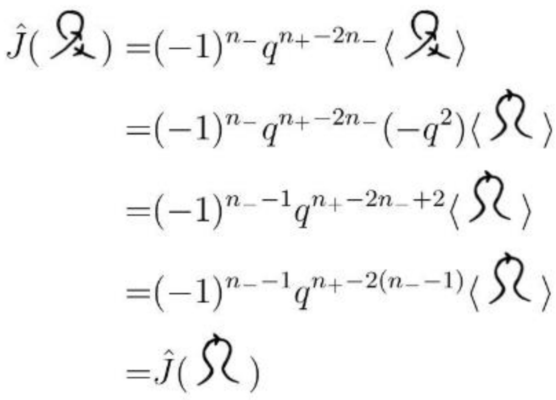
نظرية :متعددة حدود جونز هي ثابت للعقد الموجهة.

البرهان : نريد فقط أن نبين أن كثيرة حدود جونز ثابتة مع حركات رايد ماستر الثلاثة و التي هي ثابت للمخطط التابع للعقدة الرياضية. في البداية نحتاج حساب أقواس كوفمان ثم بعد ذلك نقرن الاتجاهات لإيجاد التقاطعات الموجبة و السالبة لحساب كثيرة حدود جونز

الحركة الأولى :

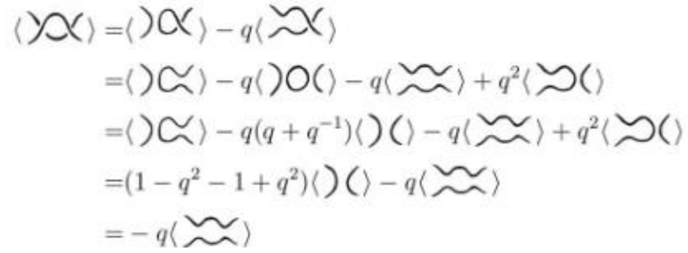


الآن نضيف توجيه ل  لإيجاد نقاط التقاطع الموجبة و السالبة. ليكن  له n_+ من نقاط التقاطع الموجبة و n_- من نقاط التقاطع السالبة . الآن اذا  يحافظ على نفس توجه  فإنه يحوي على نقطة تقاطع سالبة أقل لذلك:



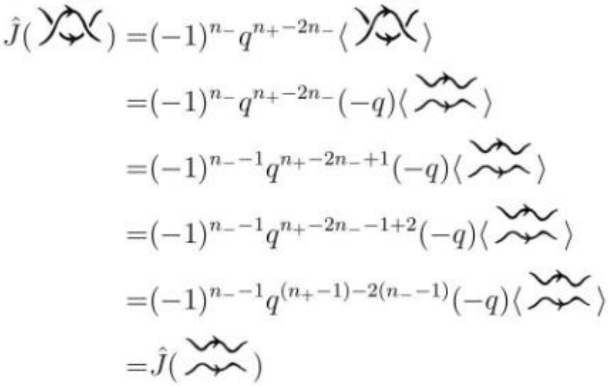
اذا غيرنا التوجه سنحصل على نفس الناتج.

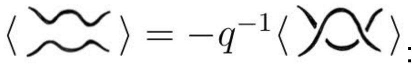
الحركة الثانية:



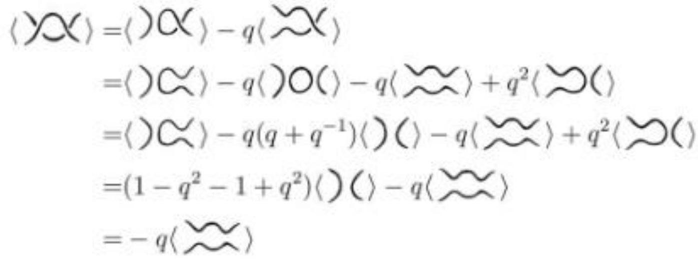
هناك أربعة حالات لتوجيه هذا الضلع و في كل حالة توجه سيكون هناك تقاطع موجب وتقاطع سالب .

ليكن له n_+ من التقاطعات الموجبة و n_- من التقاطعات السالبة فإن سيكون لديه $n_+ - 1$ من التقاطعات الموجبة و $n_+ + 1$ من التقاطعات السالبة لذلك:

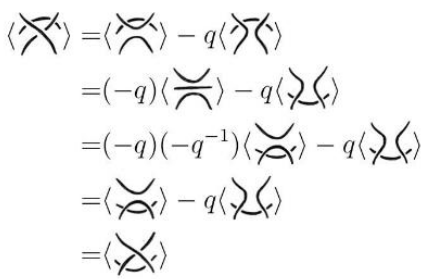


الحركة الثالثة نحتاج استخدام الايزوتوبي و الحركة الثانية بمعنى آخر نستخدم : 

و 



الآن:



لاحظ أنه لا يهم كيف نوجه  لأنه سيكون عدد التقاطعات الموجبة و السالبة نفس  و بذلكسيكون من الواضح أن

$\hat{J}\Big($  $\Big) = \hat{J}\Big($  $\Big)$ لأي توجيه و بذلك تكون كثيرة حدود جونز ثابتة لكل مخطط D إن $\hat{J}(D)$ هي كثيرة حدودجونز الغير قياسية و هناك كما بينا سابقاً توجدطرق أخرى لحساب كثيرة حدود جونز القياسية $J(D)$ حيث أن :

$J(D) = \hat{J}(D) * (q + q^{-1})$ أو $\hat{J}(D) = \frac{J(D)}{(q+q^{-1})}$