التصنيف Categorification و نظرية الفئة Category Theory

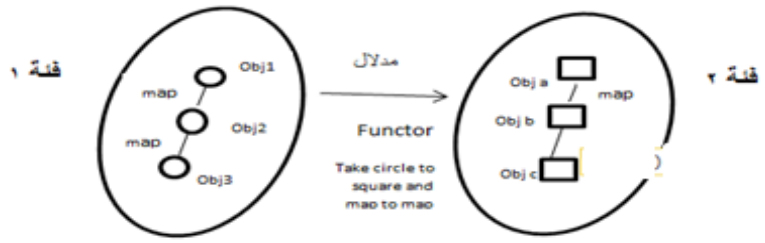
احمد زيني الياسري

في هذا المقال سنقوم بتعريف التصنيف Categorification وإعطاء أمثلة عنه خلال ذلك سنتطرق لتعريف الفئة category و نضع أمثلة عليها. فكرة التصنيف Categorfication تم طرحها في و هذا المصطلح يدل على عملية تبديل نظرية المجموعات Set Theortic بنظرية الفئات Category Theory المقترنة بها و تبديل الدالة function بالمدلال functor (هناك الكثير من الاصطلاحات لل functor باللغة العربية ومنها المدلال , الدلال , المقرن و لكننا اخترنا مصطلح المدلال لل functor) و كذلك المعادلات بين الدوال يتم تبديلها بواسطة الايزومورفيزم بين المدلالات functors أما العناصر elements فنبدلها ببناء رياضي mathematical objects

مجموعة (set) ← فئة category

دالة (function)← مدلال functor

معادلات بين الدوال ← ايزومورفيزم



إن الفكرة الأساسية هي تبديل عنصر أو شيء بسيط *simple object* بعنصر أكثر تعقيد ولكن يحمل معلومات أكثر للحصول على تركيبة رياضية أفضل. مثال ذلك فئة المجموعات المنتهية (*category of finite sets*) والذي عناصره (*objects*) مجموعات مفتوحة و المورفيزم هي الدوال بين المجموعات هو تصنيف *categorfication* لمجموعة لأعداد الطبيعية N حيث أن الاتحاد الانفصالي (*disjointunion*) وحاصل الضرب الديكارتي *cross product* للمجموعات المنتهية تقترن بالجمع و الضرب للمجموعة. إن دراسة التصنيف ستفضي إلى حقائق جميلة مثلاً إن كثير من النتائج و الحقائق التي درسناها في الرياضيات المتقدمة هي بالأصل تصنيف لكثير من الدراسات في المدارس الإعدادية حيث أننا في السابق كنا نتعامل مع مجموعات بسيطة بمفاهيم و شروط بسيطة أما التصنيف فيجعلها معقدة و تحوي على معلومات أكثرو لكن مفيدة و تعطي نتائج أفضل لحساباتنا و دراساتنا و توسيع مداركنا لفهم الموضوع و أخذ صورة أكبرعنه كذلك هو الحال في حال وجود تصنيف *categorification* يوجد أيضاً تصنيف عكسي *decatorification* والذي يقوم بعكس عملية التصنيف أي يبسط التركيب الرياضي من معقد إلى بسيط بمعنى آخر إن عكس تصنيف فئة المجموعات المنتهية يعطينا مجموعة الأعداد الطبيعية. مثال آخر في الثورة النيوترية *Noether* في التبولوجيا الجبرية و التي أهم مفاهيمها الزمرة الهومولوجية *homology group* فإن العمل كان يركز على العدد بيتي *Betti number* و الذي هو يمثل البعد للزمرة الهومولوجية و أيضاً بالإضافة إلى العدد الكاردينالي للمجموعة و بعد فضاء المتجهات *vector space*فإن هذه الأرقام هي بالأصل إجراء عكس التصنيف *decategorification* أي عدنا من تركيبة معقدة كالزمرة أو المجموعة أو فضاء المتجهات إلى تركيب أبسط و هو العدد. نحن نعرف أن فضائي متجهات يكونان متكافئين إذا تساوت أبعادهما. نويثر أشارت أيضاً أن التعامل مع الزمر الهومولوجية بدل العمل مع العدد بيتي سيكون أفضل في حل الكثير من المسائل التبولوجية و الجبرية لأننا سنتعامل ليس فقط مع الزمرة و إنما أيضاً مع دوالها يعني أن الزمرة الهومولوجية النونية $(The\ n^{th}\ homology)$ هو مدلال *(functor)* معرف على فئة الفضاءات التبولوجية بينما العدد بيتي النوني $(The\ n^{th} Betti\ number\ n^{th})$ هو مجرد دالة معرفة على مجموعة صفوف الفضاءات التبولوجية المتكافئة(*isomorphism classes of topological spaces*)

إن عكس التصنيف *decatorification* هو إجراء مباشر لعملية هدم المعلومات التي لدينا و تبسيطها أما التصنيف فيقوم بعملية إصلاح و معالجة المعلومات الضائعة و حتى نكون بصورة أوضح نحتاج إلى تعريف الفئة و المدلال ونأخذ أمثلة عليهم كذلك سنتكلم بصورة أوضح عن العدد بيتي و علاقته بالزمرة الهومولوجية.

تعريف :الفئة(*category*):

إن الفئة عبارة عن مجموعة C تحوي :

1- مجموعة تركيبات$(obj\ C)$ set of objects

2-مجموعة من المورفيزمات Mor_C (X, Y) لكل من X, Y تركيبات داخل الفئة set of morphisms مع عملية التركيب

$$Mor_C(X,Y) \times Mor_C(Y,Z) \rightarrow Mor_C(X,Z)$$

$$(f,g) \rightarrow f \circ g$$

و المورفيزم المحايد identity morphism $1_x \ni Mor_C(X,X)$ لكل تركيب X في الفئة $obj\ C \ni X$

كذلك إن التركيب يجب أن يكون تجميعي associative أي $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$لكل $f \circ g$ و$g \circ h$ معرفة

إن المورفيزم المحايد له الخاصية التالية :

$Mor_C(X,Y) \ni f$ لكل $f = f \circ 1_X = 1_Y \circ f$

أمثلة:

1- فئة المجموعات Sets Category:

التركيبات : المجموعات sets المورفيزم : الدوال بين المجموعات sets maps

2-فئة فضاءات المتجهات : vector space Category

التركيبات : فضاءات المتجهات vector spaces المورفيزم: الدوال الخطية linear maps

3-فئة الزمر:

التركيبات: الزمر Groups المورفيزم : الهومومورفيزم بين الزمر Group homomorphism

4- فئة الحلقات : Ring Category

التركيبات : الحلقات Rings المورفيزم :الهومومورفيزم بين الحلقاتRing homomorphism

5- فئة الفضاءات التبولوجية Topological spaces

التركيبات: الفضاءات التبولوجية Topo.spaces وأيضاً فئة الموديول و فئة المانفولد.

تعريف : فئات ذات تركيبة واحدة **X** :Categories with one object: ليكن C فئة ذات تركيبة واحدة X و بذلك يكون لدينا مجموعة واحدة من المورفيزم $Mor_C(X,X)$ و هنا تركيب الدوال تجميعي و الهومومورفيزم المحايد 1_X لهذه العملية هنا تسمى هذه الفئة بالمونوئيد (Minoid) يعني المونوئيد هو فئة ذات تركيبة واحدة

تعريف (الإيزومورفيزم Isomorphism): إن الإيزومورفيزم في فئة C هو عنصر $Mor_C(X,Y) \ni f$ بحيث يوجد

عنصر $Mor_C(X,Y) \ni g$ يحقق أن : $f \circ g = 1_Y$= و $g \circ f = 1_X$

ليكن C فئة ذات تركيبة واحدة X بحيث كل المورفيزمات هي إيزومورفيزمات و كما نعرف أن $Mor_C(X,X)$ هو مونوئيد Moniod ولكن كل عناصره متناظرة invertible و هذا يعني أنه زمرة. الزمر هي فئات ذات تركيبة واحدة فيها كل المورفيزمات إيزومورفيزمات.

تعريف: الفئة الأبيلية (Preadditive Category) : يقال للفئة بأنها Preadditive إذا كان:

1-$Mor_C(X,Y)$ هي زمرة أبيلية لكل $obj\ C\ \ni X,Y$ (هنا العملية الثنائية هي الجمع)
2-تركيب الدوال توزيعي:

$$(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$$

$$f\circ g+h) = f\circ g + f\circ h$$

متى ماكان التركيب معرف.

مثال:فئة الزمر الأبيلية. إن فئة الزمر التبديلية هي pre additive و الهومومورفيزم هي توزيعية تحت التركيب مع عملية الجمع. ليكن C هي فئة Pre additive و فيها تركيبة واحدة X فإن$Mor_C(X,X)$ تحوي عملية تجميعية(التركيب)

بناء رياضياتي لزمرة أبيلية (عملية جمعية) والتراكب هو توزيعي على الجمع و بذلك تكون $Mor_C(X,X)$ هي حلقة و الضرب هنا هو التراكب نفسه و بذلك يكون الحلقات هي فئة pre additive لتركيبة واحدة Rings are preadditive one-objects Category

تعريف :المدلال (functor): كما قلنا سابقاً هناك الكثير من التسميات مثلاً المدلال ,الدلال, المقرن(تأتي من كلمة اقتران) ليكن C, D فئتان , المدلال F من C إلى D يتضمن:

دالة F: obj C → obj D

لكل $obj\ C\ \ni X,Y$ توجد دالة :

$$F: Mor_C(X,X) \to Mor_C(F(X),F(Y))$$

ويحقق تركيب الدوال

$F(f\circ g) = F(t)\circ F(g)$ لكل تركيب ل $Mor_C \ni f,g$ معرف و كذلك يحافظ على المورفيزم المحايد $F(1_X) = 1_{F(X)}$

مثال :نعرّف المدلال الآتي :

F: فئة الزمر → فئة المجموعات

نعرّف لكل زمرة G المجموعة S التي تولد منها و لأي هومومورفيزم $f: G_1 \to G_2$ بين زمرتين G_2 و G_1 نعرف F(f)هو دالة بين المجموعتين S_1, S_2 التابعتين ل G_2 وG_1

مثال: (الزمرة الأساسية) ليكن Top فئة الفضاءات التبولوجية ذات نقطة معينةx_0 و Group هو فئة الزمر الجبرية , نعرف المدلال F: Top → Group بأنه الزمرة الأساسية $\pi_{x_0}(X)$ Fundamental group. كذلك إن الزمرة الهومولوجية هي أيضاً مدلال بين الفضاءات التبولوجية و الزمر الجبرية. هناك أيضاً عدد أويلر و الذي يتم حسابه عن طريق تثليث المانفولد و حساب العدد يتم حسب قانون يربط رؤوس المثلث و أضلاعه و أوجه المثلث

$$\text{Euler number: Manifold(Top. sp)} \to \text{N(set)}$$

حيث أن Manifold هو فئة المانفولد و هي فضاءات تبولوجية و Nهي فئة مجموعة الأعداد الطبيعية.

تأثيرات الزمرة Group Actions

دائماً في نظرية الزمر يهتم الكثير من الباحثين بتأثير الزمرة على مجموعة معينة .

مثال: الكروب S_n يؤثر على مجموعة متكونة من n من العناصر بواسطة التباديل. لتكن C زمرة و التي هي فئة ذات تركيبة واحدة كما بينا سابقاً.الآن يجب أن نفكر بالمدلال $F: C \to Set$ حيث Set فئة المجموعات. التركيبة الواحدة (single object) في C يذهب إلى مجموعة A في الفئة Set كل مورفيزم من C (طبعاً) هو عنصر من زمرة يجب أن يذهب إلى دالة map $F: A \to A$ بحيث يحافظ على تركيب الدوال composition of maps و بذلك يكون المدلال C → Setهو مثال تأثير زمرة على مجموعة.

مثال: المدلال من C إلى فئة الفضاءات التبولوجية هو تأثير زمرة على الفضاء التبولوجي.

مثال:المدلال من C إلى فئة الفضاءات التبولوجية هو تمثيل representation للزمرة

باستخدام الفكرة أعلاه نستطيع تعريف تمثيلات representations لكثير من التركيبات الجبرية Algebraic obj (مثل مونوئيد ,زمرة,حلقة,...) لكل فئة مناسبة. ليكن لدينا الفئة C نعرف

$$ISO\ C = \{C \text{ مجموعة صفوف الإيزومورفيزم لتركيبات الفئة}\}$$

يمكن إضافة بناء على الفئة (مثل الجمع المباشر Direct sum والضرب التنسوري tensor-product) وهذه الإضافة تعطي إضافة على المجموعة ISO C .

مثال: المجموعات المنتهية (finite sets)

ليكن C هي فئة المجموعات المنتهية: ISO C = N- لأن كل مجموعة منتهية متحددة بواسطة الايزومورفيزم بالكاردينالي -الاتحاد الانفصالي Disjoint union على C يمثل عملية الجمع على مجموعة الأعداد الطبيعية N لأن

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

-حاصل الضرب الديكارتي على C يمثل عملية الضرب على N لأن $|A \times B| = |A| + |B|$

مثال: الفضاءات المتجهة Vector space

ليكن C فئة الفضاءات المتجهة ذات الأبعاد المنتهية finite dimentioal vector spaces المعرفة على الحقل ℂ:

- N = ISO C لأن كل فضاء متجهات ذو بعد محدد يكون معروف عن طريق بعده.

-الجمع المباشر(direct sum) على C تمثل الجمع على N لأن

$$dim(v \oplus w) = \dim(v) + \dim(w)$$

لكل v, w متجهات

-الضرب التنسوري (*tensor product*)على C يمثل عملية الضرب على N لأن

$$dim(v \otimes w) = \dim(v) \cdot \dim(w$$

أهمية التصنيف :(*categorification*): لماذا التصنيف ؟

-لأنه يفتح الغطاء عن الأبنية في التركيبات الجبرية و يعطينا معلومات غنية أفضل و أوسع

-الحصول على تطبيقات في التبولوجيا و الفيزياء مثال المدلال نظرية الحقل الكمي التبولوجية. *Topological quartum field Theory (T Q F T)* و فئة الكوبوردزم *Category of Cobordism* و فئة الكوبوردزم النوني $n-$ $Category\ of\ Cobordism$ و أي ذو بعد n

بناء فئات أفضل Building better Categories

ليكن لدينا فئة C مثلاً فئة المجموعات Sets.هدفنا الآن تكوين فئة أفضل better category مثلاً فئة المركبات المتسلسلة chain complexes لذلك سنقوم بتطوير فئتنا للحصول على بناء رياضي متقدم أكثر و أكثر و مغري للدراسة و يعطينا معلومات أكثر و أفضل و هذا مايتم البحث عنه بصورة واسعة في الدراسات الحديثة و سنبين ذلك في التعريف الآتي:

تعريف: عملية انحناء الفئة **C** على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ (einrichment) : لتكن C فئة نعرّف عملية انحناء الفئة C على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$(einrichment) لتكون فئة جديدة C^+ حيث أن تركيبات الفئة الجديدة لا تختلف عن تركيبات القديمة $obj(C^+) = obj(C)$ ولكن المورفيزم يتوسيعتهم بواسطة $\mathbb{Z}$ خطياً يعني لكل Obj (C^+) $A, B \in obj(C^+)$ لدينا

$$Hom_{C^+}(A,B) = \bigoplus_{f \in Hom_c(A,B)} Z_f$$

و نستطيع تعريف تراكب الدوال بواسطة التوسعة الخطية

$$(f_1 + f_2) \circ (g_1 + g_2) = f_1 \circ g_1 + f_1 \circ g_2 + f_1 \circ g_2 + f_2 \circ g_2 + f_1 \circ g_2 + f_2 \circ g_2$$

هنا C^+ هي فئة preadditive الآن سنقوم بعملية تحسين أخرى.

تعريف: الانغلاق الجمعي additive closure: لتكن C^+ هي فئة preadditive نعرّف الانغلاق الجمعي additive closure ل $Mat(C^+)$ ليكون فئة بحيث:

-التركيبات (objects)هي حاصل الجمع المباشر لتركيباتC^+

-إذا كان $A = \bigoplus_{i=1}^{m} A_i$ و $B = \bigoplus_{j=1}^{n} B_j$

تركيبتان في فئة الانغلاق الجمعي فإن المروفيزم بينهم يكون مصفوفة $m \times n$ حيث إن كل تركيب داخل المصفوفة ذو موقع i, j هو مورفيزم للتركيبتين A_i, B_j في C^+ أما تركب المروفيزم فإنه يعرّف بضرب المصفوفات الآن نستطيع أن نكوّن مخطط يوضح عملية التصنيف و التصنيف المعاكس:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\text{categorification}"] \arrow[d, "f"'] & Mat(C^+) \arrow[d, "F"] \\
\text{Invariants} & \text{Category of Invariants} \arrow[l, "\text{decategorification}"]
\end{tikzcd}$$

مثال: ليكن لدينا الفئة $C = \text{Set}$ فإنه من الممكن تصنيفها إلى الزمر الأبيلية الحرة free abelian groups فيكون بذلك المخطط :

$$\begin{tikzcd}
\text{set} \arrow[r, "\text{categorification}"] \arrow[d, "f"'] & \text{Free abelian groups} \arrow[d, "F"] \\
N & \text{Category of Invariants} \arrow[l, "\text{decategorification}"]
\end{tikzcd}$$

الآن حتى نكمل المخطط ممكن أن يكونcategory of invariant هو فئة الزمر الأبيلية بصورة عامة و الزمر الأبيلية الحرة هي محتواة بداخلها

$$\begin{tikzcd}
\text{set} \arrow[r, "\text{categorification}"] \arrow[d, "f"'] & \text{Free abelian groups} \arrow[d, "i"] \\
N & \text{Ab.Groups} \arrow[l, "\text{decategorification}"]
\end{tikzcd}$$

الانحلال Resolution: من ضمن آلية تطوير عملية التصنيف تفكيك بعض التركيبات و جعلها أصغر لتكون حسابات الثوابت لها أسهل و أفضل و لهذا يفضّل استخدام التفكيك دائماً في حال وجوده

$$|A \cup B| = |A| \cup |B| - |A \cap B|$$

لتكن لدينا $\{A_i\}_{i\in I}$ مجموعة من المجموعات فإن المبدأ الأساسي للاحتواء \ الإقصاء (inclusion\exclusion) كالآتي:

$$\left|\cup A_{i_{i\in I}}\right| = \sum_{\propto\subset I} (-1)^{|\propto|+1} \ \left|\cap A_{i_{i\in\propto}}\right|$$

و حتى نفهم فكرة الانحلال نأخذالمثال التالي :

مثال: ليكن $A = A_1 \ \cup A_2 \cup A_3$ الآن نكوّن المثال المخطط التالي:

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[dr] & A_1 \arrow[dr] & \\
A_1 \cap A_2 \cap A_3 \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[r] \arrow[dr, "\subseteq"'] & A_1 \cap A_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & A_2 \arrow[r] & A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\
 & A_2 \cap A_3 \arrow[ur] \arrow[r] & A_3 \arrow[ur, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd}$$

هنا اتجاه السهم يمثل عملية الاحتواء $\subseteq$ الآن إذا لدينا انحلال resolution و مدلال F نسأل عن إمكانية الحصول على متسلسلة مضبوطة exact sequence و من ثم نطبّق المدلال على المركب complex للحصول على سلسلة مركبة chain complex

$$\begin{tikzcd}
\text{C} \arrow[r, "\text{Categorifications}"] \arrow[d, "\text{decategorification}"] & \text{Mat } C^+ \arrow[r, "Res^*"] \arrow[d, "F"] & \text{Ch(Mat } C^+ \text{)} \arrow[d, "F"] \\
\text{Invariants} & \text{category of invariants} \arrow[l] & \text{Ch(Invariants)} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

الآن كيف يمكن للانحلال Res^* أن يكمل المخطط أعلاه و حتى نحقق ذلك نحتاج تعريف مميز أويلر بالصيغة التالية:

تعريف: مميز أويلر ليكن لدينا التركيبة $C \ni X$ تنتمي إلى الفئة C و ليكن $Res * (Cat(x))$ يكون الانحلال الإسقاطي projective Res فإنه يمكن تعريف مميز أويلر بأن يكون :

$$(X) = \sum_i (-1)^i DeCat(Res^i(Cat(X)))$$

الآن عندما نطبق الهومولوجي للسلسلة المركبة *chain complex* بذلك نحصل على الكثير من الثوابت الرياضية *invariants* و بذلك نوسّع كمية المعلومات التي لدينا و عندما نعود لمخططنا السابق و توسعه نحصل على :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\text{Categorifications}"] \arrow[d, "\text{decategorification}"] & \text{Mat } C^{+} \arrow[r, "Res^{*}"] \arrow[d, "F"] & \text{Ch(Mat } C^{+}\text{)} \arrow[d, "F"] \\
\text{Invariants} & \text{category of invariants} \arrow[l] & \text{Ch(Invariants)} \arrow[l] \arrow[dl, bend left, "x \text{ مميز أويلر}"] \arrow[d, "H^{i}"] \\
\text{new Index Invariant} & & \text{Category of Invariatnts} \arrow[ll, "\text{DeCat}"]
\end{tikzcd}$$

الآن لدينا معلومات مخزونة في السلسلة المركبة لأن السلسلة تحوي معلومات إضافية عن التركيبة المراد دراستها X

لنعود إلى المثال السابق و نحاول تطبيق المدلال

مثال: ليكن $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ الآن نكوّن المخطط التالي ن كل A_i هي مجموعة

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[dr] & A_1 \arrow[dr] & \\
A_1 \cap A_2 \cap A_3 \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[r] \arrow[dr, "\subseteq"] & A_1 \cap A_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & A_2 \arrow[r] & A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\
 & A_2 \cap A_3 \arrow[ur] \arrow[r] & A_3 \arrow[ur, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}$$

الآن نطبق المدلال بأخذ كل مجموعة إلى زمرة حرة *free group* تتولد بعناصر A فنحصل على المخطط:

$$\begin{tikzcd}
 & Z\{A_1 \cap A_2\} \arrow[r] \arrow[dr] & Z\{A_1\} \arrow[dr] & \\
Z\{A_1 \cap A_2 \cap A_3\} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & Z\{A_1 \cap A_3\} \arrow[ur] \arrow[dr] & Z\{A_2\} \arrow[r] & Z\{A_1 \cup A_2 \cup A_3\} \\
 & Z\{A_2 \cap A_3\} \arrow[ur] \arrow[r] & Z\{A_3\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

و هذه متوالية مضبوطة و هنا الهومولوجي صفر في كل مكان. الآن نستطيع أن نتحدث عن مبدأ الاحتواء\ الإقصاء و حسب المبرهنة الأساسية

مبرهنة: ليكن $C_{\cdot}$ سلسلة مركبة فإنه :

$$\sum_i (-1)^i \dim(C_{\cdot}) = \sum_i (-1)^i \dim(H_i\,(C_{\cdot}))$$

و بالعودة إلى المثال أعلاه نحصل على :

$$0 = \sum_i (-1)^{\mathrm{i}} \dim(H_i(ch_i(A)) = \sum_i (-1)^i \dim(Ch_i(A)) = \sum_{\propto} (-1)^{|\propto|} |\cap_{i\in\propto} A_i|$$

و هذا يبين لنا أن مجموعة المساقط التي لها بالضبط نفس خواص مساقط الزمر الآبيلية.

لاحظ أن قاعدة الفصل *Decomposition Rule*

$$|A \cup B| = |A| \cup |B| - |A \cap B|$$

والتي تعطينا المتوالية المضبوطة :

$$0 \to H_0(A \cap B) \to H_0(A) \oplus H_0(B) \to H_0(A \cup B) \to 0$$

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr] & \\
H_0 & A \cap B \arrow[ur] \arrow[dr] & \oplus & A \cup B \arrow[dl] \\
 & & B &
\end{tikzcd}$$

و هذا هو المدخل لعمل الباحث كوفانوف في كيفية تصنيف متعددة حدود جونز و استخدام الهومولوجيا كمدلال للحصول على نتائج أفضل في تصنيف العقد و الروابط الرياضية إلى فئات أكثر حسب الخواص الجديدة.