Topological Quantum Field Theory and Frobenius Objects and Cobordisms

نظرية الحقل الكمي التبولوجية و كائنات فروبينس و الكوبوردزم

احمد زيني الياسري

الغرض من هذه الأوراق هو وصف التكافؤ للفئات (equivalence of categories) بين نظرية الحقل الكمي لتبولوجية و فئة جبر فروبينس.الفائدة المستقبلية هي أن نظرية الحقل الكمي التبولوجية تساعدنا في تبديل بعض الأدوات و العلاقات الجبرية بما يماثلها تبولوجياً هنا نختصر كلمة نظرية الحقل الكمي التبولوجية بالرموز TQFT من (Topological Quantum Field theory) نهدف في الأقسام القادمة في وصف التشاكل بين الفئات

$$\mathrm{SymMon\ Cat}(\mathrm{X},\mathrm{V}) \cong cFrob(V)$$

بين فئة المدلال و المونويدال المتناظر Symetric Monoidal functor category كائنات فروبينس (Frobenius objects) في فئة V و هذا يتضمن البناء لفئة مونودال حرة X(free Monoidal Category) مع وصف العلاقات و كذلك سنقوم بالوصف التبولوجي لفئة الكوبوردزم (Cobordism Category)

بعض التعاريف المهمة في نظرية الفئة :

لأي فئة C نعرف $\mathrm{ob}(\mathrm{C})$ بأنها مجموعة كائنات أو عناصر C و لتكن $Mor(C)$ ترمز إلى مجموعة المورفزمات ل C.

التكافؤ بين الفئات نرمز له بالرمز $\cong$. اذا كان القارئ غير ملم بموضوع الفئات فإننا ننصحه بقراءة مقالات و محاضرات عن الموضوع . سنبدأ الآن بتعريف فئات المنويدال المتناظرة

Symetric Monoidal functor categories

تعريف1:فئات المنويدال الصارمة strict Monoidal Categories

ليكن $\{*\}$ فئة من عنصر واحد $*$ و مورفزم واحد id_* فإن فئة المنويدال الصارمة هي فئة V مع مدلال ثنائي $m\ bi\_functor$ و مدلال h بحيث :

$$m: V \times V \to V, h: \{*\} \to V$$

والتي تحقق:

$$m \circ (m \times id_V) = m \circ (id_V \times m)$$

$$m \circ (h \times id_V) = id_V = m \circ (id_V \times h)$$

بحيث يكون المخطط التالي ابدالي :

$$\begin{tikzcd} V \times V \times V \arrow[r, "m \times id_V"] \arrow[d, "id_V \times m"'] & V \times V \arrow[d, "m"] \\ V \times V \arrow[r, "m"'] & V \end{tikzcd}$$

(Diag 1)

$$
\begin{tikzcd}
V \times \{*\} \arrow[r, "id_V \times h"] \arrow[dr, "\cong"'] & V \times V \arrow[d, "m"] \\
 & V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{*\} \times V \arrow[r, "h \times id_V"] \arrow[dr, "\cong"'] & V \times V \arrow[d, "m"] \\
 & V
\end{tikzcd}
$$

(Diag 2)

لاحظ أن التشاكلات $\{*\} \times V \xrightarrow{\cong} V \xleftarrow{\cong} V_{*}\{*\}$ هي مساقط على V (*projection morphisms*) و التي هي تشاكلات الفئة *category isomorphisms*

سيكون من الملائم تعريف الكائن $I = h(*)$ و تعريف الكائن $X \blacksquare Y = m(X,Y)$ لكل من $ob(V) \ni X, Y$

و بنفس الفكرة بتعريف المورفزمان$f, g \in Mor(V)$ فإن $f \blacksquare g = m(f,g)$.

لاحظ أن *(Diag 1)* يبين لنا أن $\blacksquare$ تجميعية أي أن $(X \blacksquare Y) \blacksquare Z = X \blacksquare (Y \blacksquare Z)$ و المخطط الثاني *(Diag 2)* يعرف لنا العنصر المحايد $h(*)$ و الذي نرمز له بالرمز I و يكون ابدالي مع كل العناصر من X أي أنه $X \blacksquare I = X = I \blacksquare X$

ان المدلال الثاني $m\ bi - functor$ يمثل كضرب المونويدال و العنصر I يمثل العنصر الطبيعي في V لذلك فإن فئة المونويدال V يرمز لها بالثلاثي $(V, \blacksquare, I)$

ان كلمة الصارمة (strict) في التعريف فئة المونويدال الصارمة strict Monoidal Category تشير الى المساواة $(X \blacksquare Y) \blacksquare Z = X \blacksquare (Y \blacksquare Z)$ و $X \blacksquare I = X = I \blacksquare X$ المورفزم التالي هو طبيعي لكل $ob(V) \ni X, Y, Z, W$

$$\alpha = \alpha_{X,Y,Z} : (X \blacksquare Y) \blacksquare Z = X \blacksquare (Y \blacksquare Z)$$

كما هو الحال للمخطط الخماسي التالي :

$$
\begin{tikzcd}
X \blacksquare (Y \blacksquare (Z \blacksquare W)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id_X \blacksquare \alpha"'] & (X \blacksquare Y) \blacksquare (Z \blacksquare W) \arrow[r, "\alpha"] & ((X \blacksquare Y) \blacksquare Z) \blacksquare W \arrow[d, "\alpha \blacksquare id_W"'] \\
X \blacksquare ((Y \blacksquare Z) \blacksquare W) \arrow[rr, "\alpha"] & & (X \blacksquare (Y \blacksquare Z)) \blacksquare W
\end{tikzcd}
$$

و هذا يبين العملية التجميعية لضرب المونويدال بواسطة التشاكل الطبيعي natural isomorphism

الآن لدينا التشاكل الطبيعي لكل $X \in ob(V)$

$$\lambda_X : I \blacksquare X \cong X, \quad \rho_X : X \blacksquare I \cong X$$

و أن $\lambda_I = \rho_I :\ I \blacksquare I \cong I$

و كذلك المخططات الآتية ابدالية:

$$
\begin{tikzcd}
X \blacksquare (I \blacksquare Z) \arrow[r, "\alpha_{X,Y,I}"] \arrow[d, "id_X \blacksquare \lambda_Z"'] & (X \blacksquare I) \blacksquare Z \arrow[d, "\rho_X \blacksquare id_Z"] \\
X \blacksquare Z \arrow[r, equal] & X \blacksquare Z
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
I\blacksquare(Y\blacksquare Z) \arrow[r, "\alpha_{I,Y,Z}"] \arrow[d, "\lambda_{Y\blacksquare Z}"'] & (I\blacksquare Y)\blacksquare Z \arrow[d, "\lambda_Y\blacksquare id_Z"] \\
Y\blacksquare Z \arrow[r, equal] & Y\blacksquare Z
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X\blacksquare(Y\blacksquare I) \arrow[r, "\alpha_{X,Y,I}"] \arrow[d, "id_X\blacksquare\rho_Z"'] & (X\blacksquare Y)\blacksquare I \arrow[d, "\rho_{X\blacksquare Y}"] \\
X\blacksquare Y \arrow[r, equal] & X\blacksquare Y
\end{tikzcd}$$

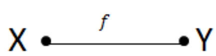
وهذا كان فكرة الفئة المونويدال الصارمة .

لقد تم برهان نظرية تعطي تشاكل بين وترين من عناصر الفئة V أي أنه ليكن لدينا مصفوفة نونية من $ob(V)$ أو عنصر من $ob(V^n)$ و ليكن w, v تأتي لنا بكل عنصر مرتب إلى مركبات الضرب المونويدال من الأقواس (brackets) و العنصر المحايد للوتر المرتب و مثال على ذلك:

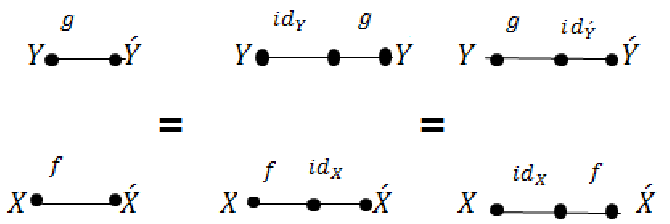
لتكن w تربط $(X_1\blacksquare I)\blacksquare X_2$ ب (X_1, X_2) لاحظ هنا يجب أن يبقى الترتيب X_i كما هو عليه. سيكون من الأفضل تصور عناصر الفئة المونويدال على شكل مجموعة عمودية من النقاط بحيث:

$$X_1\blacksquare X_2\blacksquare X_3\blacksquare \ldots \blacksquare X_n \xrightarrow{\text{يمكن تمثيلها}} \begin{array}{l} \cdot X_n \\ \vdots \\ \cdot X_3 \\ \cdot X_2 \\ \cdot X_1 \end{array}$$

أما المورفزم يمكن تمثيلها بخطوط بين النقاط يعني أن يكون المجال و المجال المقابل نقاط للخط مثال ذلك المورفزم $f: X \longrightarrow Y$ يكون بالشكل :



بالإضافة إلى ذلك سيكون من الأفضل استخدام الخواص في الفئة المونويدال مثال : ليكن $f: X \longrightarrow \acute{X}$ و $g: Y \longrightarrow \acute{Y}$ مورفزمان في V فإن التالي يكون متكافئ :



و بخصوصية أكبر هذا يعني أن :

$$f\blacksquare g = (id_{\acute{X}}\blacksquare g)\circ(f\blacksquare id_Y) = (f\blacksquare id_{\acute{Y}})\circ(id_X\blacksquare g)$$

تعريف 2: مدلال المونويدال الصارم strict Monoidal Functor

يعرف المدلال الصارم بين فئتين مونويدال$(V,\blacksquare,I)$, و $(\acute{V},\acute{\blacksquare},\acute{I})$ بأنه مدلال

$F: V \rightarrow V$ بحيث :

$$\acute{m} \circ (F \times F) = F \circ m \,, F \circ h = \acute{h}$$

بحيث تكون المخططات التالية ابدالية :

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "F \times F"] \arrow[d, "m"'] & \acute{V} \times \acute{V} \arrow[d, "\acute{m}"] \\ V \arrow[r, "F"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, equal] \arrow[d, "h"'] & \{*\} \arrow[d, "\acute{h}"] \\ V \arrow[r, "F"] & \acute{V} \end{tikzcd}$$

و لذلك فكل زوج من العناصر X, Y في V يكون :

$$F(X \blacksquare Y) = FX \acute{\blacksquare} FY$$

و لكل زوج من المورفزمات f, g في V يكون :

$$F(f \blacksquare g) = Ff \acute{\blacksquare} Fg$$

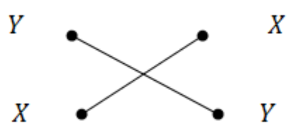
و كذلك $FI = \acute{I}$

تعريف3: فئة المونويدال المتناظر Symmetric Monoidal Category

إن فئة المونويدال المتناظر الصارم هو فئة مونويدال صارم $(V,\blacksquare,I)$ مع دالة التواء (twist map) لكل X, Y في $ob(V)$:

$$\tau_{X,Y} = X \blacksquare Y \cong Y \blacksquare X$$

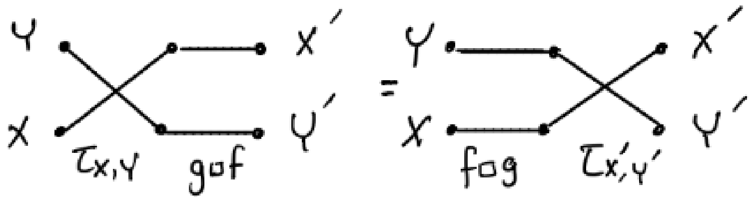
نستطيع رسم $\tau_{X.Y}$ بالمخطط التالي :



إن دالة الالتواء هي تشاكل و لديها الخواص التالية:

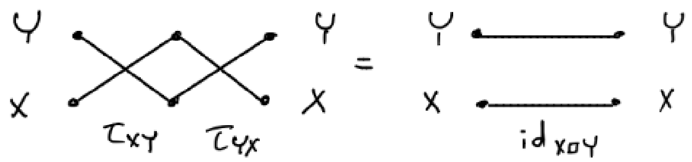
1 - لكل مورفزم $f: X \longrightarrow \acute{X}$ و $g: Y \longrightarrow \acute{Y}$ في V فإن المخطط التالي يكون إبدالي:

$$\begin{tikzcd} X \blacksquare Y \arrow[r, "\tau_{X,Y}"] \arrow[d, "f \blacksquare g"'] & Y \blacksquare X \arrow[d, "g \blacksquare f"] \\ \acute{X} \blacksquare \acute{Y} \arrow[r, "F"] & \acute{Y} \blacksquare \acute{X} \end{tikzcd}$$



-2 $\tau_{YX}\tau_{XY} = id_{X\blacksquare Y}$

$$\begin{tikzcd}
X\blacksquare Y \arrow[r, "\tau_{X,Y}"] \arrow[dr, "id_{X\blacksquare Y}"'] & Y\blacksquare X \arrow[d, "\tau_{Y,X}"] \\
 & X\blacksquare Y
\end{tikzcd}$$



-3 قانون الوحدة Unit Law

$$\begin{tikzcd}
I\blacksquare X \arrow[r, "\tau_{I,X}"] \arrow[dr, "id"'] & X\blacksquare I \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X\blacksquare I \arrow[r, "\tau_{X,I}"] \arrow[dr, "id"'] & I\blacksquare X \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

-4 تجميعية Associativity:

$$(id_Y \blacksquare \tau_{X,Z}) \circ (\tau_{X,Y} \blacksquare id_Z) = \tau_{X,Y\blacksquare Z}$$

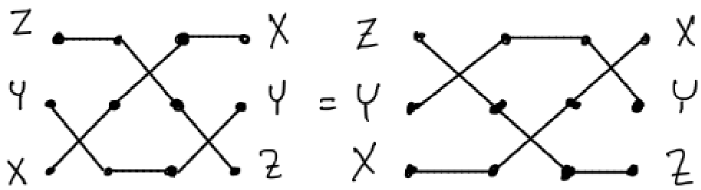
و

$$(id_X \blacksquare \tau_{Y,Z}) \circ (\tau_{X,Z} \blacksquare id_Y) = \tau_{X\blacksquare Y,Z}$$

$$\begin{tikzcd}
X\blacksquare Y\blacksquare Z \arrow[r, "\tau_{X,Y\blacksquare Z}"] \arrow[dr, "\tau_{X,Y}\blacksquare\, id_Z"'] & Y\blacksquare Z\blacksquare X \arrow[d, "\mathrm{id}_Y\blacksquare\tau_{X,Z}"] \\
 & Y\blacksquare X\blacksquare Z
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X\blacksquare Y\blacksquare Z \arrow[r, "\tau_{X\blacksquare Y,Z}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X\blacksquare\,\tau_{Y,Z}"'] & Z\blacksquare X\blacksquare Y \arrow[d, "\tau_{X,Z}\blacksquare\, idY"] \\
 & X\blacksquare Z\blacksquare Y
\end{tikzcd}$$

ومن الشرطين الثاني و الرابع تتحقق المساواة التالية :



تعريف 4:مدلال المونويدال المتناظر Symmetric Monoidal functor

مدلال المونويدال المتناظر الصارم بين فئتين مونويدال صارمة $(V, \blacksquare, I, \tau)$ و $(\acute{V}, \blacksquare, \acute{I}, \acute{\tau})$ هو مدلال مونويدال $F: V \to \acute{V}$ بحيث كل زوج من العناصر $X, Y \in V$ فإن المدلال يرسل $\tau_{X,Y}$ إلى $\acute{\tau}_{FX,FY}$

$$\begin{tikzcd}
X\blacksquare Y \arrow[dd, "\tau_{X,Y}"'] & & & FX\acute{\blacksquare}FY \arrow[dd, "\tau_{FX,FY}"] \\
& {} \arrow[r, "F"] & {} & \\
Y\blacksquare X & & & FY\acute{\blacksquare}\, FX
\end{tikzcd}$$

تعريف5: التحويلات الطبيعية للمونويدال Monoidal natural transformations:

ليكن لدينا فئتين مونويدال صارمتين $(V, \blacksquare, I)$ و$(\acute{V}, \acute{\blacksquare}, \acute{I})$ و مدلالين مونويدالين صارمين :

$$F, G: V \rightrightarrows \acute{V}$$

إن التحويلات الطبيعية من F إلى G و تكتب $u: F \to G$ هي مجموعة من الدوال (maps):

في $\{u_X\text{: FX} \to \text{GX}\}_{X \in ob(V)}$

$(\acute{V}, \acute{\blacksquare}, \acute{I}\ )$ بحيث أن لكل مورفزم في $V\ :\ f: X \to Y$ فإن المخطط التالي يكون إبدالي في $\acute{V}$

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
FY \arrow[r, "u_Y"] & GY
\end{tikzcd}$$

أما التحويل الطبيعي الصارم للمونويدال من F إلىG هو تحويل طبيعي $u: F \to G$ بحيث لكل كائنين X, Y في V فإن $u_X \acute{\blacksquare} u_Y = u_{X\blacksquare Y}$ و $u_I = id_{\acute{I}}$ بحيث يكون المخططان الآتيان إبداليان:

$$\begin{tikzcd}
F(X\blacksquare Y) \arrow[r, "u_{X\blacksquare Y}"] \arrow[d, equal] & G(X\blacksquare Y) \arrow[d, equal] \\
FX\acute{\blacksquare}FY \arrow[r, "u_X\acute{\blacksquare}u_Y"] & GX\acute{\blacksquare}GY
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FI \arrow[r, "u_I"] \arrow[d, equal] & GI \arrow[d, equal] \\
\acute{I} \arrow[r, "id_{\acute{I}}"] & \acute{I}
\end{tikzcd}$$

إن المساواة العمودية تأتي من فرضية كون كل من F و G هم مدالين مونويدال صارمين (strict Monoidal functors) إن مجموعة التحويلات الطبيعية للمونويدال يرمز لها بالرمز $MonCat(V,\acute{V})$ تكون فئة بحيث أن كائناتها (عناصرها)عبارة عن مدلالات مونويدال: $F: V \to \acute{V}$ و المورفزم هي التحويلات الطبيعية للمونويدال.

نستطيع الآن تعريف فئة مدلالات المونويدال المتناظرة في $MonCat(V,\acute{V})$ أي أنها فئة جزئية من $MonCat(V,\acute{V})$

و يرمز لها بالرمز $SymmMonCat(V,\acute{V})$.إن الكائنات (العناصر) هي مدلالات المونويدال المتناظرة: $F: V \to \acute{V}$

و المورفزم هي نفسها في الفئة $MonCat(V,\acute{V})$. نصل الآن إلى تعريف كائن (عنصر) المونويد في فئة المونويدال

تعريف: لتكن لدينا فئة المونويدال $(V, \blacksquare, I)$ المونويد في V هو كائن (عنصر) M في V مع مورفزمين :

$$\mu: M\blacksquare M \to M, \eta: M \longrightarrow I$$

و الذي يحقق الآتي :

$$\mu(\mu\blacksquare id_M) = \mu(id_M \blacksquare \mu)$$

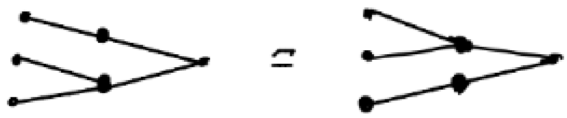
$$\mu(\eta\blacksquare id_M) = id_M = \mu(id_M\blacksquare \eta)$$

$$\begin{tikzcd}
M\blacksquare M\blacksquare M \arrow[r, "id_M\blacksquare\mu"] \arrow[d, "\mu\blacksquare id_M"'] & M\blacksquare M \arrow[d, "\mu"] \\
M\blacksquare M \arrow[r, "\mu"] & M
\end{tikzcd}$$

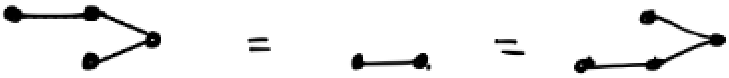
$$\begin{tikzcd} I\blacksquare M \arrow[r, "\eta\blacksquare id_M"] \arrow[dr, "\cong"'] & M\blacksquare M \arrow[d, "\mu"] \\ & M \end{tikzcd}$$

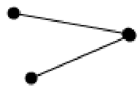
$$\begin{tikzcd} M\blacksquare I \arrow[r, "id_M\blacksquare\eta"] \arrow[dr, "\cong"'] & M\blacksquare M \arrow[d, "\mu"] \\ & M \end{tikzcd}$$

المخطط الأول يضمن لنا أن عملية الضرب μ تجميعية و الذي يمكن رؤيته أفضل بواسطة البيان التالي :



أما المخططان في الأسفل و اللذين يوحدان العنصر المحايد (identity) فيمكن رؤيتهما بواسطة :



نرمز للمونويد في V على شكل كائن ثلاثي مع دالة الضرب μ و دالة الوحدة η بمعنى أفضل فإن المونويد يرمز له بالرمز (M,μ,η) سيكون من الأفضل أن يمثل الضرب كالآتي :  والدالة المحايد 

تعريف 6: (تشاكلات المونويد): تشاكل المونويد: $\psi : M \longrightarrow \acute{M}$ هو مورفزم في فئة مونويدال $(V,\blacksquare,I)$ بين اثنين مونويد M و $\acute{M}$ و يحافظ على بنائهم المونويدالي بمعنى أن :

$\psi\blacksquare\eta = \acute{\eta}$ و $\mu(\psi\blacksquare\psi) = \psi\mu$

$$\begin{tikzcd} M\blacksquare M \arrow[r, "\psi\blacksquare\psi"] \arrow[d, "\mu"'] & \acute{M}\blacksquare\acute{M} \arrow[d, "\acute{\mu}"] \\ M \arrow[r, "\psi"] & \acute{M} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, equal] & I \\ M \arrow[u, dash, "\eta"] \arrow[r, "\psi"] & \acute{M} \arrow[u, dash, "\acute{\eta}"'] \end{tikzcd}$$

إن مجموعة المونويد في فئة المونويدال $(V,\blacksquare,I)$ تكون فئة يرمز لها بالرمز $Mon(V)$ إن كائنات أو عناصر هذه الفئة هم المونويد (M,μ,η) والمورفزم هو التشاكل بين المونويدات ψ

تعريف7 :(المونويد الإبدالي): ليكن لدينا فئة مونويدال (صارمة) متناظرة $(V,\blacksquare,I,\tau)$. المونويد M في V يقال بأنه إبدالي (commutative) اذا كانت دالة الضرب μ (multiplication map) غير متأثرة بعملية تراكب الدوال مع دالة الالتواء τ أي أنه $\mu\tau = \mu$ هنا τ هو $\tau_{M,M}$ بحيث يكون المخطط التالي إبدالي:

$$\begin{tikzcd} M\blacksquare M \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"'] & & M\blacksquare M \arrow[dl, "\mu"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

إن مجموعة المونوبد الإبدالي يولد فئة تسمى $C\ Mon(V)$ تكون عناصرها المونويد الإبدالي و المورفزم هو التشاكل بينهم .

تعريف8 : المونويد المقابل (Co monoid) :

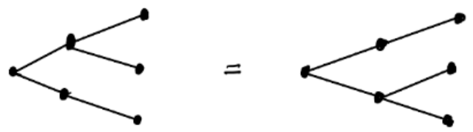
ليكن $(V,\blacksquare,I)$ مونويدال صارم والمونويد المقابل هو كائن أو عنصر في V مع مورفزمان :

$$\delta: M \to M\blacksquare M, \qquad \epsilon: M \to I$$

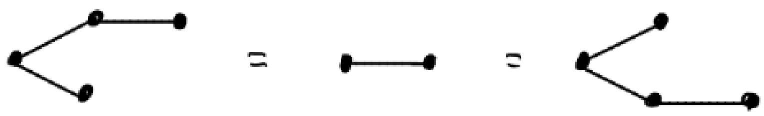
والذي يحقق $(\delta\blacksquare id_M)\delta = (id_M \delta\blacksquare)\delta$

$$\delta(\epsilon\blacksquare id_M) = id_M = \delta(id_M \epsilon\blacksquare)$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & M\blacksquare M \arrow[d, "\delta\blacksquare id_M"] \\ M\blacksquare M \arrow[r, "id_M\blacksquare\delta"'] & M\blacksquare M\blacksquare M \end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "id_M"'] & M\blacksquare M \arrow[d, "id_M\blacksquare\epsilon"] \\ & M\blacksquare I \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "id_M"'] & M\blacksquare M \arrow[d, "\epsilon\blacksquare id_M"] \\ & I\blacksquare M \end{tikzcd}$$



التشاكل للمونويد المقابل $\psi: M \longrightarrow \acute{M}$ هو مورفزم في فئة المونويدال $(V, \blacksquare, I)$ بين اثنين مونويد متقابلين $M, \acute{M}$ بحيث أن التشاكل يحافظ على خواصهم أي أن :

$$\acute{\delta}\psi = (\psi\blacksquare\psi)\delta, \qquad \acute{\epsilon} = \epsilon\blacksquare\psi$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\delta"'] & \acute{M} \arrow[d, "\acute{\delta}"] \\ M\blacksquare M \arrow[r, "\psi\blacksquare\psi"] & \acute{M}\blacksquare\acute{M} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\epsilon"'] & \acute{M} \arrow[d, "\acute{\epsilon}"] \\ I \arrow[r, equal] & I \end{tikzcd}$$

وبنفس الفكرة $Mon(V)$ فإن المونويد المقابل في فئة المونويدال $(V, \blacksquare, I)$ يكون فئة يرمز لها بالرمز $Comon(V)$

العناصر لهذه الفئة هي المونويد المقابل (M, δ, ϵ) و المورفزم بينهم هو التشاكل بين المونويد المقابل ψ

تعريف 9 : المنويد المقابل الإبدالي المقابل :

ليكن $(V, \blacksquare, I, \tau)$ فئة مونويدال صارمة متناظرة .المنويد المقابل M في V يقال له إبدالي مقابل (Co-commutative) اذا كانت دالة الضرب المقابل δ إبدالية مع دالة الالتواء τ أي أنه : $\tau\delta = \delta$ و الذي يحقق إبدالية المخطط التالي :

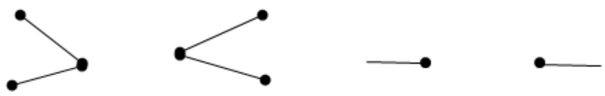
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\ M \blacksquare M \arrow[rr, "\tau"'] & & M \blacksquare M \end{tikzcd}$$

إن مجموعة المنويد المقابل الإبدالية المقابلة تكون فئة .يكتب بالشكل $c\ Comon(V)$.المورفزم هي التشاكلات بين المونويد المقابل . إذا كان لدينا فئة C نعرف الفئة العكسية للفئة C (opposite Category) بأنها فئة لديها نفس عناصر C و المورفزم f^{op} مقترنة واحد لواحد مع المورفزم f في C. اذا كان لدينا مورفزم $f: a \to b$ في C فإن $f^{op}: b \to a$ في الفئة العكسية C^{op}

نظرية 1: الفئة $(c\ Mon\, V, \blacksquare, I, \tau)$ هي فئة مونويدال متناظرة أي اذا كان $M, \acute{M}$ كائنات (عناصر) في $c\ Mon\, V$ فإن $M \blacksquare \acute{M}$ أيضاً في $c\ Mon\, V$

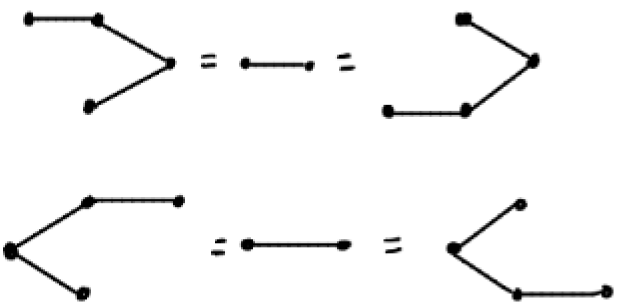
كائنات (عناصر) فروبينس(*Frobenius objects*):

تعريف *10:*(كائنات فروبينس) : إن عنصر (كائن) فروبينس في فئة منويدال صارمة $(V, \blacksquare, I)$ هو كائن A مع المورفزمات التالية :

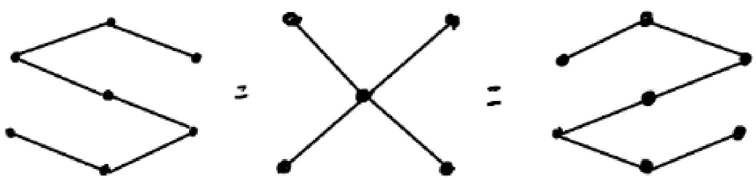


$\mu: A \blacksquare A \to A$ $\quad$ $\delta: A \to A \blacksquare A$ $\quad$ $\eta: I \longrightarrow A$ $\quad$ $\epsilon: A \to I$

مع العلاقات التالية للعنصر المحايد و العنصر المحايد المقابل :



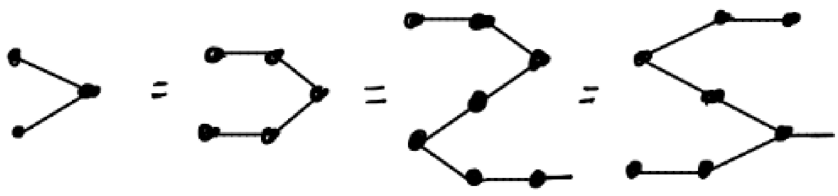
مع علاقات فروبينس:



حيث أن كل نقطة تمثل الكائن A

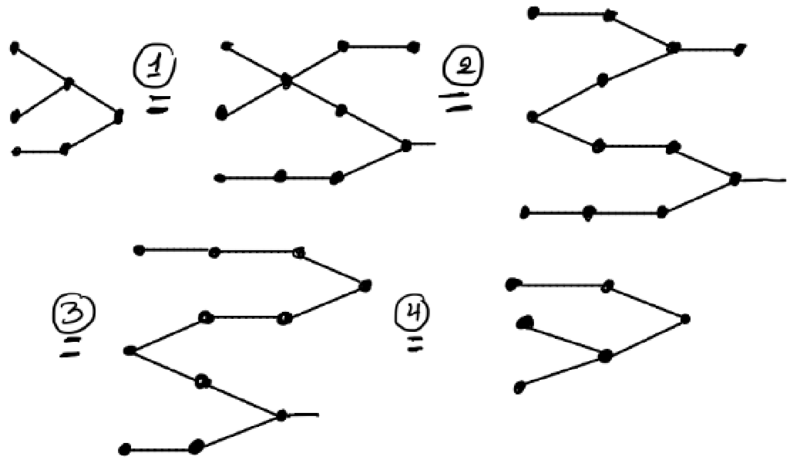
نظرية 2: إن كائن (عنصر) فروبينس هو منويد و بنفس الوقت منويد في V و إن دالة الضرب μ هي تجميعية و دالة الضرب المقابل δ هي أيضاً تجميعية مقابلة

البرهان :في البداية سنقوم بإيجاد دوال مكافئة ل μ :



في المساواة الثانية تم استخدام علاقة المحايد المقابل Co-unit و في المساواة الثالثة تم استخدام علاقات فروبينيس

الآن في حالة التجميعية :

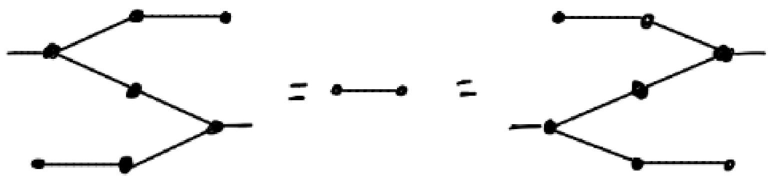


إن المساواة الثالثة هي إعادة ترتيب بسيطة لضرب المنويدال مع دالة الوحدة أما المساواة الأولى و الرابعة هي تعويض للدالة μ أما المساواة الثانية فهي استخدام لعلاقات فروبينيس .إن برهان حالة التجميعية المقابل هي بالضبط نفس البرهان و لكن بالعكس .إن مجموعة عناصر (كائنات)فروبينيس في الفئة V المورفزمات $(\mu, \delta, \epsilon, \eta)$ تكون فئة يرمز لها بالرمز $(Forb\ V)$

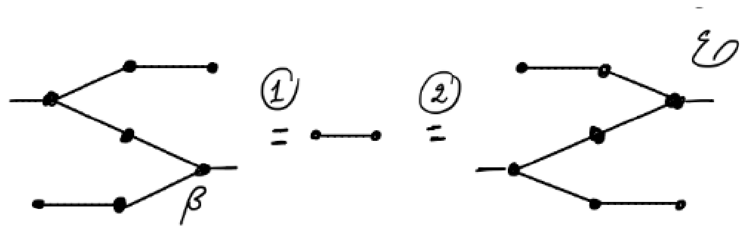
نظرية 3: ليكن M كائن (عنصر) في $(Forb\ V)$ فإن دالة الضرب$\mu: M \blacksquare M \to M$ تكون وحيدة مع دالة العنصر المحايد η لتحقق علاقة العنصر المحايد و علاقة فروبينيس .

بالتناظر, فإن دالة الضرب المقابل $\delta: M \longrightarrow M \blacksquare M$ التي مع دالة العنصر المحايد المقابل ϵ تحقق علاقة العنصر المحايد و علاقة فروبينيس .

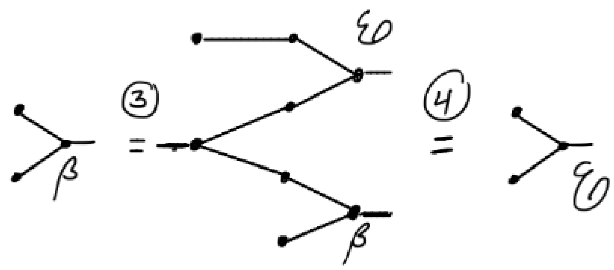
البرهان : سنطلق اسم على العلاقة الآتية باسم علاقة الأفعى و التي هي تأتي من دالة العنصر المحايد و دالة العنصر المحايد المقابل و علاقة فروبينيس.



في البداية سنعرف $\beta = \epsilon\,\mu$ والتي تحقق علاقة الأفعى هي وحيدة لنفرض العكس أي أنه توجد دالة $\zeta: M\blacksquare M \to I$ تحقق علاقة الأفعى :

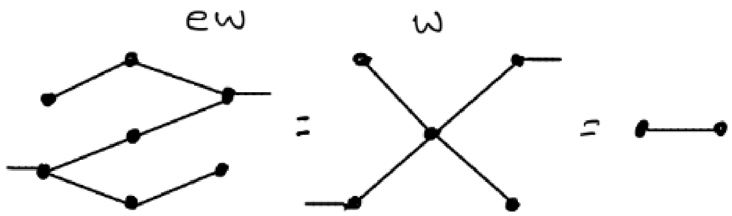


لنأخذ المساواة(2) على اليمين و نراكبها كدالة مع β على اليمين و بعد إعادة الترتيب مع دالة الوحدة نحصل على المساواة (3)الآتية :

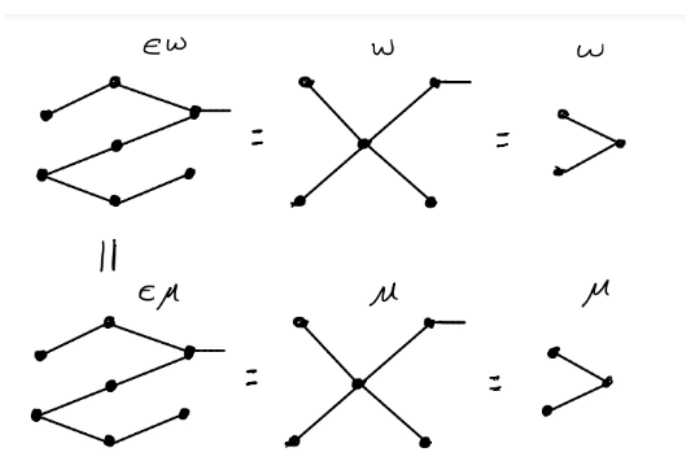


إن المساواة رقم (4) تأتي من المساواة رقم (1)

الآن نريد أن نبين أنه اذا كانت $w: M\blacksquare M \to M$ تحقق علاقة فروبينيس و علاقة العنصر المحايد فإن $\beta = \epsilon\, w$ بمعنى آخر ϵw تحقق علاقة الأفعى و بسبب الوحدانية فإن $\beta = \epsilon\, w$.



لذلك فإن $\epsilon\, w$ تحقق علاقة الأفعى و بذلك يكون $\beta = \epsilon\, w$ و هذا صحيح لكل w تحقق علاقة فروبينس و لكل دالة عنصر محايد ϵ و هو أيضاً صح لكل دالة ضرب μ أي أن $\epsilon\, w = \epsilon\, \mu$ أخيراً نبين أن μ هومورفزم وحيد يحقق علاقة فروبينيس مع علاقة العنصر المحايد



وبذلك يكون $w = \mu$ كما هو المطلوب . نفس البرهان يتحقق لوحدانية الدالة δ

تعريف 11: عناصر فروبينس الابدالة Commutative Frobenius objects

ان عنصر (كائن) فروبينيس الإبدالي في فئة منويدال متناظرة $(V, \blacksquare, I, \tau)$ هو عنصر فروبينيس والذي هو منويد ابدالي بمعنى اخر يحقق $\mu\tau = \mu$ بنفس الفكرة عنصر فروبينيس الابدالي المقابل هو أيضاً عنصر فروبينيس و الذي هو منويد مقابل ابدالي مقابل (Co-monoid Co-Commt) أي أن $\tau\delta = \delta$

نظرية 4: ان عنصر فروبينيس يكون ابدالي اذاو فقط اذا كان ابدالي مقابل

تعريف 12 : المورفزمات لعناصرفروبينيس:

المورفزم لعناصر (كائنات) فروبينيس $\mathrm{M}(\mu, \delta, \eta, \epsilon)$ و $\acute{\mathrm{M}}(\acute{\mu}, \acute{\delta}, \acute{\eta}, \epsilon)$ في فئة منويدال متناظرة $(V, \blacksquare, I, \tau)$ هو مورفزم $\psi\colon M \longrightarrow M$ في V و الذي تشاكل مونويد و تشاكل لمنويد مقابل أي أنه يحقق المعادلات الأربعة :

$$\psi\mu = \acute{\mu}(\psi \blacksquare \psi), \acute{\delta}\psi = (\psi \blacksquare \psi)\delta$$

$$\psi\eta = \acute{\eta}, \qquad \acute{\epsilon}\psi = \epsilon$$

ان كائنات (عناصر) فروبينيس الإبدالية في V (كذلك هو الحال للعناصر الابدالية المقابلة تكون فئة يرمز لها بالرمز $c\ Forb\ V$

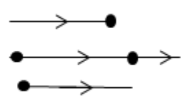
نظرية 5: فئة المنويدال المتناظرة $(c\ Forb\ V, \blacksquare, I, \tau)$ هي أيضاً فئو منويدال أي أنه اذا كان M و $\acute{M}$ عناصر في $c\ Forb\ V$ فإن $M \blacksquare \acute{M}$ في $c\ Forb\ V$

الفئة X: في هذا الجزء سنقدم فئة نطلق عليها اسم الفئة X و هي ستكون نواة دراستنا في نظرية الحقل الكمي التبولوجية و سيتم الاستفادة في بناء هذه الفئة من العناصر و العلاقات التي تم دراستها سابقاً من عناصر و كائنات فروبينيس و قبل بناء هذه الفئةX سننظر في كيفية بناء فئة من بيان موجه G (Directed graph) هذه الفئة المولدة يرمز لها بالرمز $C(G)$ ثم يتم دراستها تحت بعضR (Relations) على البيان نفسه ثم نفكر كيفية الحصول على فئة القسمة $\frac{C(G)}{R}$ والتي هي فئة تأتي من فئة البيان بعد عمل العلاقات عليها .

ليكن لدينا بيان موجه $G = (O, E)$ حيث O هي مجموعة الرؤوس في البيان و E مجموعة أضلاع البيان الموجهة في G

بما أن البيان موجه (يعني يوجد لكل ضلع اتجاه) فإنه نستطيع أن نعرف دالتين :

دالة المجال ∂_0 والتي تربط لكل ضلع برأس يقع في نهاية الضلع (ذيله) ودالة المجال المقابل ∂_1 و التي تربط لكل ضلع برأس يقع في قمة الضلع (هامته)



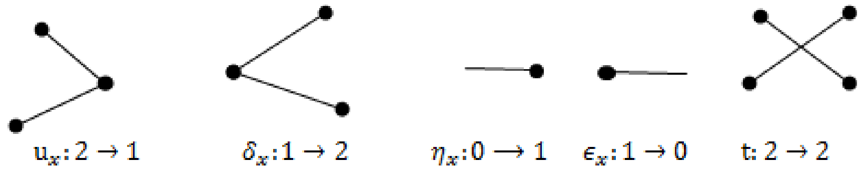
$$\partial_0\colon O \to E \qquad \partial_1\colon E \to O$$

ان كائنات الفئة $C(G)$ هي رؤوس البيان G أي بمعنى المجموعة O . كل مورفزم في $C(G)$ هو اما المورفزم المحايد على بعض عناصر O أو تراكب مجموعة من الأضلاع في المجموعة E أي أنه $Mor(C(G)) = E, obj(C(G)) = O$ أي كائنان a, b في $obj(C(G))$ يوجد مورفزم f (ضلع موجه من a الى b) $f\colon \mathrm{a} \to \mathrm{b}$ في البيان G أو f هو المورفزم المحايد و بهذا استطعنا توليد فئة من بيان موجه. ان توليد الفئة X يأتي بنفس الأفكار أعلاه و كالآتي :

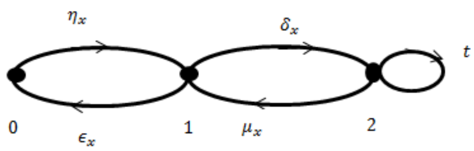
الفئة X: سنقوم الآن بتعريف فئة منويدال صارمة متناظرة تدعى $(X, +, 0, t)$ و كالآتي : عناصر الفئة X تتولد بواسطة 1 و بهذا يكون كل عنصر من الشكل :

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 \dots \dots + 1}_{n}$$

لكل n عدد طبيعي و كذلك يوجد العنصر المحايد 0. كل مورفزم يتولد بواسطة الضرب (μ_x) multiplication والضرب المقابل δ_x *Co-multiplication* , الأحادي (η_x) *unit* و الأحادي المقابل (ϵ_x) *co unit* مع دالة الالتواء t و أخيراً الدالة المحايدة$1(id_1)$ *unit map*



الآن نقوم برسم مخطط يولد X والذي هو مجرد تركيب من حاصل ضرب لتلك الدوال :



واضح أن عملية التركيب في المخطط أعلاه هن مورفزمات في الفئة X لانريد التعمق اكثر بالموضوع انما نعطي مثال :

نظرية : لتكن لدينا فئة منويدال متناظرة $(V, \blacksquare, I, \tau)$ و فئة X نستطيع الحصول على التشاكل الآتي بين الفئات :

$$Sym\ Mon\ Cat(X, V) \cong cFrob(V)$$

يترك دون برهان . لننتقل الآن الى الكوبوردزم Cobordism في هذا الجزء سنناقش فئة جديدة تدعى 2Cob هذه الفئة عناصرها مانفولد موجه من البعد الأول و المورفزم هي سطوح مرصوصة من البعد الثاني حدودها هي عناصر الفئة (أي المانفولد من البعد الأول) و حتى نفهم تركيبة هذه الفئة و عناصرها نحتاج الرجوع قليلاً إلى التبولوجيا التفاضلية .

مراجعة في التبولوجيا التفاضلية :

تعريف 13: لمانفولد التفاضلي (Differentiable Manifold)

ليكن $\lambda: R^n \longrightarrow R$ تحويل خطي غير صفري و ليكن H^n الفضاء النصفي (half space) و الذي هو فضاء جزئي من R^n حيث أن :

$$H^n = \{x \epsilon R^n : \lambda x \geq 0\}$$

و الذي يرث تبولوجيته من R^n . حدود الفضاء H^n يرمز لها بالرمز ∂H هو نفس الحدود لأي مجموعة جزئية من R^n و يتضمن كل النقاط في المجموعة الجزئية $\{x \epsilon R^n : \lambda x = 0\}$. المانفولد ذو البعد n الحقيقي هو فضاء تبولوجي متري و الذي موقعياً (*locally*) يشبه الفضاء الإقليدي ذو البعد n و بصورة أدق الفضاء التبولوجي المتري M يدعى مانفولد إذا كان هناك غطاء مفتوح *open cover* $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ من M بحيث لكل $i \in \Lambda$ يوجد تشاكل تبولوجي homeomorphism إلى مجموعة جزئية مفتوحة من الفضاء النصفي H^n يكون بالشكل :

$$\phi_i: U_i \longrightarrow \phi(U_i) \subset H^n$$

ان هذا الغطاء المفتوح $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ يدعى أطلس atlas ل M أما الهوميومورفيزمات ϕ_i فتسمى بالمخططات (charts) ل M.في بعض الأحيان نشير للمانفولد ذو البعد n الحقيقي بالمانفولد النوني n-manifold

ملاحظة هناك تسمية أخرى ل charts و هي الخرائط أي أن الهوميومورفيزمات تمثل الخرائط على المانفولد لأنها تسمى maps أي خرائط. ان النقاط الحدودية لM هي مجموعة النقاط التي ترسل إلى ∂H^n في الخرائط (charts) و يرمز لها بالرمز ∂M. المانفولد المغلق (*closed Manifold*) يكون مرصوص *compact* بدون حدود. المانفولد الجزئي من المانفولد M هو مجموعة جزئية من M و التي هي مانفولد بنفسها و ترث تبولوجيتها من M سنعتبر أن المانفولد النوني الفارغ ϕ_n (*empty-n-manifold*)

هو مانفولد لكل n و نحن غير ملزمين بكون المانفولد الذي ندرسه متصل. المانفولد الذي نريد أن نتعامل معه هو المانفولد القابل للتفاضل (*differentiable Manifold*) أو مايدعى بالمانفولد الأملس (*smooth Manifold*) و الذي هو مانفولد مع دوال (خرائط) قابلة للاشتقاق إلى المالانهاية.هنا المعادلة اكتبC^{∞} عند كل نقطة في المانفولد . الدالة f بين مانفولدين قابلان للتفاضل (*differentiable Manifold*) تدعى دالة التشاكل التفاضلي *diffemorphism* اذا كانت f دالة تشاكل تبولوجي (*homeomorphism*) وكانت f و f^{-1} دوال قابلة للاشتقاق للمالانهاية. ليكن M و $\acute{M}$ مانفولدان نونيان ($n\_manifolds$) الاتحاد المنفصل (*disjoint union*) ل M و $\acute{M}$ و يرمز له بالرمز $M \sqcup \acute{M}$ هو مانفولد نوني و الذي من الممكن أن يغمر شخص كل من M و $\acute{M}$ فيه. ان هذا الاتحاد المنفصل ل M و $\acute{M}$ يمثل الاتحاد المنفصل للمجموعات من M و $\acute{M}$ و مجموعة الدوال و الخرائط (*charts*) مابينها و المعرفة على M و $\acute{M}$. ليكن M و $\acute{M}$ مانفولدان نونيان و ليكن A مجموعة جزئية من M مع دالة انغمار (*embedding*)

$$f: A \hookrightarrow \acute{M}$$

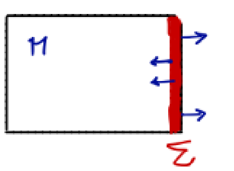
نستطيع أن نعرف فضاء تبولوجي جديد بأخذ الاتحاد المنفصل ل M و $\acute{M}$ و من ثم إشراك كل عنصر $a \in A \subset M$ مع عنصر $f(a) \in \acute{M}$ هذا يدعى بفضاء التقاطع ل M و $\acute{M}$ على المجموعة $f(A)$ و يرمز لها بالرمز $M \sqcup_f \acute{M}$ في حال كون A هو مانفولد من البعد $(n-1)$ و مغلق و هو مجموعة جزئية من حدود M فإن $f(A)$ سيكون كذلك مجموعة من حدود $\acute{M}$ و بذلك يكون $M \sqcup_f \acute{M}$ أيضاً مانفولد. اذا كان $\sum$ مانفولد من البعد $(n-1)$ و مغلق و هو مجموعة جزئية من M و $\acute{M}$ سنكتب $M \sqcup_{\sum} \acute{M}$ كفضاء التطابق من M و $\acute{M}$ حيث تتقاطع عند $\sum$

المانفولد القابل للتوجيه *Orientable Manifold*

في هذا المقطع سنتحدث عن إمكانية تعين اتجاه للمانفولد و الفكرة تأتي مع تعيين اتجاه لفضاء المتجهات *vector space* و من ثم يتم توسيعها إلى كيفية الحصول على اتجاه للمانفولد و طبعاً هنا سنستخدم مجموعة فضاءات المماسات *Tangent space* للمانفولد.
ليكن V فضاء متجهات , في البداية نعرف علاقة على مجموعة كل الأساسات المرتبة ل V (*ordered bases of V)* اذا كان لدينا B و $\acute{B}$ أساسان مرتبان من V نستطيع إيجاد علاقة R بين B و $\acute{B}$ أي أن $\acute{B} \backsim_R B$ اذا وجدت مصفوفة ذات محدد موجب تنقل احدهما الى الآخر و بذلك يكون لدينا بالضبط صفان تكافؤ (*Equivalence Classes*) من هذه العلاقة R صف للأساسات الموجبة و صف للأساسات السالبة . إن التوجيه لفضاء متجهات V هو صف تكافؤ لأساسات مرتبة من V و بهذا يكون لدينا نوعين توجيه ل V.

أي توجيه لمانفولد هو توجيه لفضاء مماس(*Tangent space*) عند كل نقطة $x \in M$ بحيث يوجد تغيير أملس لفضاء المماس لأي نقطة أخرى بالمانفولد بحيث يكون التوجه متكافئ . سنأخذ فقط بالاعتبار المانفولد الموجه أي أنه يوجد توجه لهذا المانفولد عندما يوجد لكل نقطة عليه اتجاه إما موجب أو سالب . اذا كان M مانفولد موجه فإننا نعرف $\bar{M}$ أو في بعض الأحيان يكتب $M\_$ بالمانفولد المعاكس بالاتجاه.

ليكن T_xM هو فضاء مماس للمانفولد M عند النقطة x , لنأخذ المانفولد M من البعد n مع مانفولد مغلق جزئي $\sum$ من البعد n مع مانفولد مغلق جزئي $\sum$ من البعد $(n-1)$ مع توجيهه الخاص. ليكن $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]$ أساس موجب لفضاء المماس $T_x\sum$ للنقطة $x \in \sum$ اذا كان لدينا متجه $w \in T_xM$ و ليس موجود في $T_x\sum$ فإن w يدعى متجه عمودي موجب اذا كان$[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w]$ هو أساس موجب في T_xM الأن سنأخذ الحالة التي فيها $\sum$ قطعة متصلة من حدود M مع اتجاه (توجيه) [أي أن $\sum$ هو مانفولد مغلق موجود في حدود M ∂M] . اذا كانت النقاط العمودية متجهة الى الداخل أي باتجاه M أي توبولوجيا إلى المنطقة $H^n \backslash \partial H^n$ فإن $\sum$ يسمى بالحدود الداخلية عكس ذلك يسمى $\sum$ بالحدود الخارجية



الحدود الداخلية (الحدود الخارجية) ل M هي مجموعة كل الحدود الداخلية (الخارجية) ل M في أي مكان في M

ليكن M و $\acute{M}$ مانفولدان ذو بعد و موجهان (أي لديهم اتجاه) فإن الدالة$f: M \to \acute{M}$ تسمى دالة محافظة على الاتجاه اذا كانت الدوال المتولدة على فضاء المماس تأتي بالأساسات الموجبة من M إلى الأساسات الموجبة ل $\acute{M}$ أي تبقى تحافظ على نوع التوجيه.

الكوبوردزم : *Cobordism*

ليكن لدينا مانفولدان مغلقان $\sum_1$, $\sum_2$ من البعد $n-1$. المانفولد M ذو البعد n من $\sum_1$ إلى $\sum_2$ يدعى كوبوردزم من البعد n مع حدود $\partial M = \sum_1 \sqcup \sum_2$. هذا الكوبوردزم من $\sum_1$ إلى $\sum_2$ يرمز له بالرمز $M: \sum_1 \rightsquigarrow \sum_2$. المانفولدان $\sum_1$, $\sum_2$ من البعد$n-1$ و مغلقان يقال عنهم مرتبطان (Cobordant) اذا وجد كوبوردزم (مانفولد من البعد n) بينهما . هذا النوع من الربط (Cobordance) يولد علاقة تكافؤ على المانفولدات القابلة للتفاضل . يقال للكوبوردزم أنه موجه اذا كان كمنفولد موجه. الآن نفكر في الحصول على مفهوم الكوبوردزم الموجه M بين $\sum_1$ و $\sum_2$ و ذلك بجعل $\sum_1$ اتجاهه إلى M داخلي و و $\sum_2$ اتجاهه إلى خارج M . الآن M أفكربه كمانفولد له حدود $\partial M = \sum_1 \sqcup \sum_2$ و ككبوردزم بين$\sum_1$ و $\sum_2$. الكوبوردزم الموجه من $\sum_1$ إلى $\sum_2$ يمكن تعريفه على أنه مانفولد M بحيث أن الانغمار ل $\sum_1$ هو (محافظ على التوجيه) تشاكل تفاضلي إلى الحدود الداخلية ل M (أي التي اتجاهها نحو M) و الانغمار ل $\sum_2$ هو تشاكل تفاضلي (محافظ على التوجه) إلى الحدود الخارجية من M (أي يكون اتجاهها إلى خارج M)

$$\textstyle\sum_1 \hookrightarrow^{\phi_1} M \hookleftarrow^{\phi_2} \sum_2$$

تعريف14 : تكافؤ الكبوردزمات (Equivalent Cobordisms)

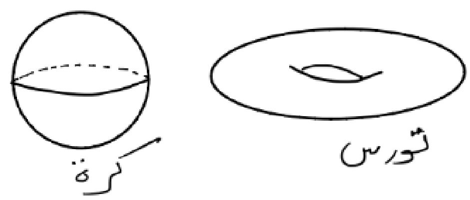
كوبوردزمان M و $\acute{M}$ من $\sum_1$ إلى $\sum_2$ يقال أنهما متكافئان اذا كان هناك تشاكل تفاضلي محافظ على الاتجاه $M \longrightarrow \acute{M}$

بحيث يكون المخطط التالي تبديلي :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\cong"'] & \\ \Sigma_1 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \Sigma_2 \arrow[ul, hook'] \arrow[dl, hook'] \\ & M' & \end{tikzcd}$$

لاحظ هنا أنه تم تثبيت $\sum_1$, $\sum_2$ و أن التشاكل التفاضلي بين M و $\acute{M}$ يجب أن يحترم هذه الحدود. ان حدود الكوبوردزم الموجه M هو اتحاد منفصل لحدود داخلية مغلقة و حدود خارجية مغلقة ل M في حال كون الحدود الداخلية والخارجية مجموعة خالية (مانفولد خالي) يكون الكوبوردزم مانفولد مغلق.

مثال ذلك الكرة ذات البعد n (n_sphere) هو كوبوردزم من البعد n موجه حيث كل من $\sum_1$, $\sum_2$ هي المانفولدات الخالية كذلك الحال للتورس ϕ_{n-1}



الفئة nCob:

الآن سنقوم بوصف الفئة nCob والتي عناصرها مانفولدات موجهة من البعد $n-1$. على غير العادة فإن المورفيزمات لهذه الفئة ليست دوال بين مجموعات أو دوال لها تركيبة خاصة إنما مجموعة من الكوبوردزمات (المانفولدات) الموجهة ذات بعد n تحت عملية التكافؤ . بما أنه نتكلم عن توجه في الكوبوردزمات هذا يعني أنه لدينا نوعين من الحدود , وبذلك تكون الحدود للكوبوردزم معرفة كمجال و مجال مقابل لهذا المورفزم .

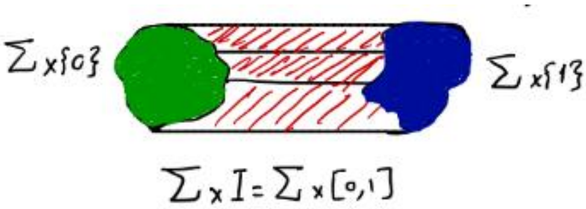
أي بصورة أوضح عناصر الفئة nCob هي صفوف تكافؤ لمانفولدات ذات بعد $n-1$ مرصوصة و موجهة و قابلة للتفاضل تحت تشاكل تفاضلي محافظ على الاتجاه . المورفزمات للفئة nCob هي صفوف تكافؤ لكوبوردزمات موجهة ذات بعد n حيث أن الحدود الداخلية هي المجال و الحدود الخارجية هي المجال المقابل .

ادعاء: nCob هو فئة لكل n

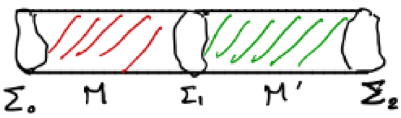
في البداية نعرف الكوبوردزم المحايد .المورفزم المحايد لمانفولد ذو بعد $n-1$ $\sum$ هو ببساطة الأسطوانة $\sum xI$ حيث I هو الفترة $[0,1]$

الانغمار $\phi_0:\sum \hookrightarrow \sum x\, I: x \to (x,0)$ تنقل $\sum$ بدالة تشاكل تفاضلي الحدود الداخلية $\sum x\,\{0\}$ و الانغمار

$\phi_1:\sum \hookrightarrow \sum x\, I: x \to (x,1)$ تنقل $\sum$ بدالة تشاكل تفاضلي الحدود الخارجية $\sum x\,\{1\}$



إن تراكب كوبوردزمان $M:\sum_0 \rightsquigarrow \sum_1$ و $\acute{M}:\sum_1 \rightsquigarrow \sum_2$ هو أيضاً كوبوردزم $M \sqcup_{\sum_1} \acute{M}:\sum_0 \rightsquigarrow \sum_1$ و هذا الكوبوردزم يأتي من تلاصق M و $\acute{M}$ عند المانفولد $\sum_1$ بشرط تطابق التوجيه بمعنى يجب عند التلاصق يكون اتجاه M و $\acute{M}$ عند $\sum_1$ متطابق و ليس أحدهما له توجيه عكس الآخر

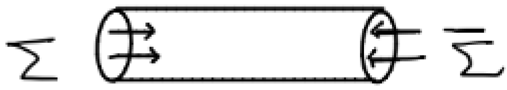


إن فئة nCob هي فئة منويدال حيث أن الاتحاد المنفصل يمثل عملية الضرب و العنصر المحايد هو المانفولد الخالي $\emptyset_{n-1}$. في الجزء القادم سندرس مثال بسيط للفئة nCob عندما يكون $n=2$ هذا يعني أن العناصر ستكون مانفولد من البعد 1 والكوبوردزم من البعد 2.

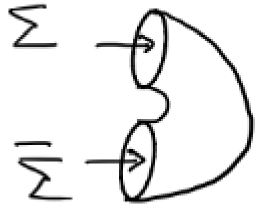
كوبوردزم من البعد الثاني :

من الآن فصاعداً عندما نشير إلى كوبوردزم فنحن نعني صف تكافؤ لمجموعة الكوبوردزمات من البعد الثاني الموجهة و المرصوصة تحت التشاكل التفاضلي المحافظ على الاتجاه مع أخذ النظر بالحدود كل مانفولد ذو بعد واحد و مغلق و متصل هو متشاكل تفاضلياً إلى دائرة (يعني كل منحني مغلق يكافئ دائرة) و مثال ذلك العقدة (knot) و البيان (graph) لاحظ أنه من الممكن أن كل مانفولد ذو بعد واحد مغلق (ماعدا المانفولد الخالي $\emptyset_1$) هو اتحاد منفصل لمجموعة دوائر و مثال ذلك الرابط (link) أو عندما تكون المجموعة فقط عنصر واحد مثل العقدة الرياضية و هذا يعني تحت عملية الاتحاد المنفصل فإن عناصر الفئة 2Cob يمكن توليدها بمنحنيات مغلقة (دوائر) لاحظ أنه اذا كان لدينا مانفولد ذو بعد واحد $\sum$ فإن $\emptyset \sqcup \sum$ يساوي $\sum$ نفسه سنتفق على رسم الحدود الداخلية للكوبوردزم على يساره و الحدود الخارجية على يمينه و بذلك يكون المورفزم في الفئة 2Cob له مجال على اليسار و المجال المقابل يكون على اليمين. مثال ذلك إذا كان لدينا كوبوردزم من البعد الثاني (سطح) له حدود داخلية $\sum$ و حدود خارجية نفس $\sum$ و لتكن دائرة بسيطة فيكون الشكل كالآتي :

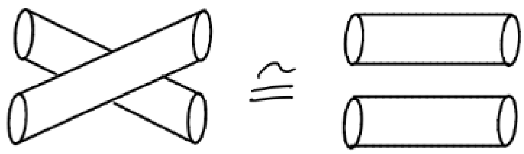
إن اتجاه السهم يمثل الاتجاه الموجب للكوبوردزم عن طريق حدوده في الرسم فوق نجد أن لكل من $\sum$ نفس الاتجاه بالنسبة للأسطوانة التي هم حدودها السؤال هو كيف يكون الكوبوردزم ذو البعد الثاني عندما يكون حدوده هي حاصل اتحاد منفصل ل $\sum$ ومعاكسها بالاتجاه $\overline{\sum}$ أي أن الحدود تكون $\overline{\sum} \sqcup \sum$ أيضاً سيكون متشاكل تفاضلياً للأسطوانة و لكن يرسم بالشكل التالي



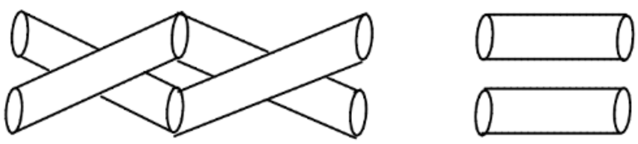
الكثير من الباحثين لا يحبذون هكذا شيء لذلك يرسموه بالشكل الآتي حتى تكون كل الاتجاهات من اليسار إلى اليمين



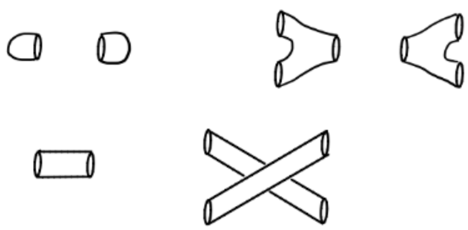
ملاحظة : اذا كان لدينا كوبوردزمان متشاكلان تفاضلياً (محافظ على الاتجاه) ليس بالضرورة أن يكونان نفس الكوبوردزم في 2Cob و لكنهم متشاكلين تفاضلياً هو الكوبوردزم الملتوي و الكوبوردزم الأحادي identity map على الدوائر كحدود و حسب ترتيبها في الحدود الداخلية و الخارجية كما في الشكل التالي



الآن ليكن لدينا كل الكوبوردزمات من m من الدوائر إلى m من الدوائر و التي هي (الكوبوردزمات) متشاكلة تفاضلياً إلى m من الكوبوردزمات المتحدة منفصلاً . هذه كلها نستطيع بناءها من الكوبوردزمات الملتوية و الكوبوردزمات الأحادية (identity Cobordism) تحت عملية الضرب المتمثلة بالاتحاد المنفصل للكوبوردزمات . هذه المجموعة لديها بناء زمرة متناظرة (symmetric group)على m من العناصر S_m حيث أن العملية الثنائية للزمرة هي عملية التراكب على الكوبوردزمات

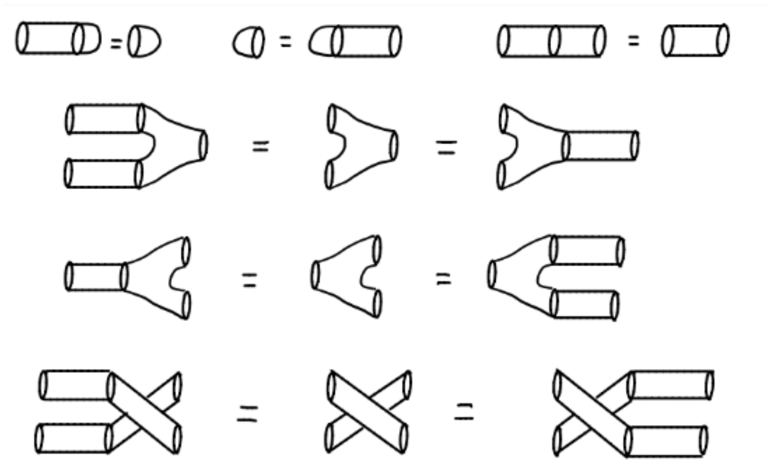


نظرية 6: كل كوبوردزم في الفئة 2Cob يمكن كتابته على شكل تركيبة من الأشكال الستة التالية (بدون برهان)



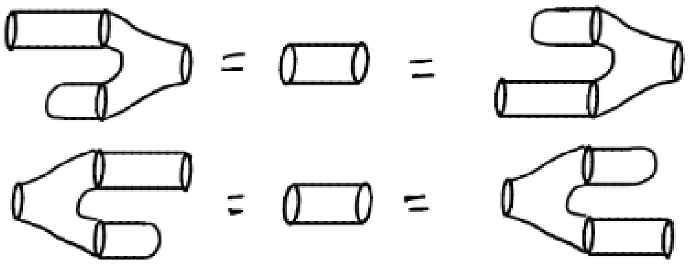
العلاقات في 2Cob

سنقدم هنا العلاقات بين التركيبات السابقة و التي تساعدنا في دراسة الكوبوردزم كمنفولد و كمورفيزم بنفس الوقت .في البداية نبدأ بتقديم العنصر المحايد. إن الاتحاد المنفصل لمجموعة من الأسطوانات هو العنصر المحايد في 2Cob حسب ما نراه في الأسفل من مولدات المورفزمات ل 2Cob

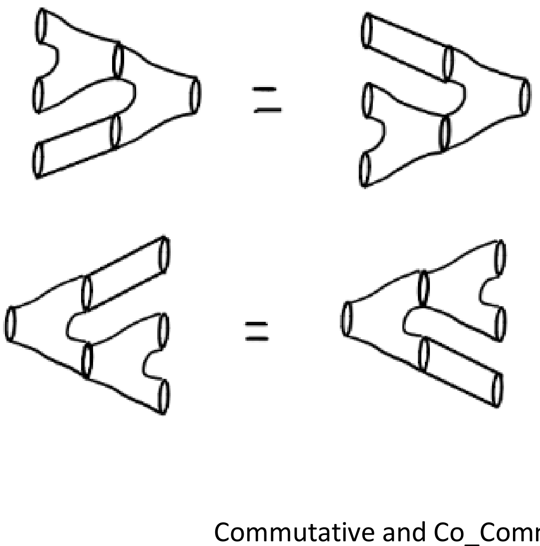


كل هذه الأشكال تمثل العنصر المحايد في 2Cob . نعطي الآن بعض العلاقات :

الخياطة بالأقراص Sewing in Discs

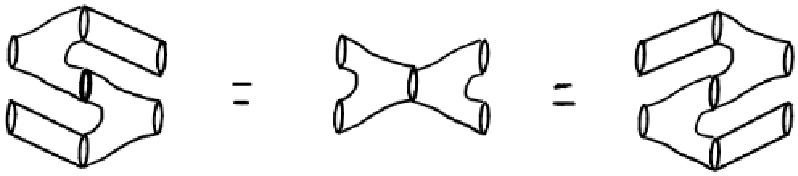


العملية التجميعية و التجميعية المقابلة Associativity and Co_associativity

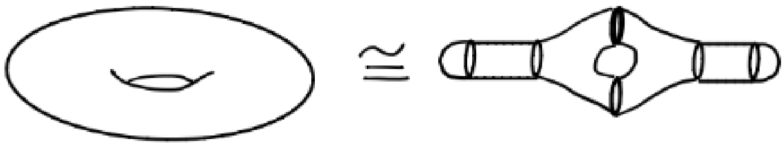


الإبدالي و الإبدالي المقابل Commutative and Co_Commutative

علاقة فروبينس Frobenius relation



هذه العلاقات كافية لتعريف الفئة 2Cob. هذه العلاقات هي التي تولد كافة المورفزمات في 2Cob. لاحظ أن مجموعة الأشكال ممكن أن تكون لنا مانفولد كالتورس مثلاً



فئة الكوبوردزم *Category of Cobordism*

فئة الكوبوردزم النوني $Category\ of\ n\_\ Cobordism$ و أي ذو بعد n

التركيبات : مانفولد نوني موجه oriented n_Manifolds

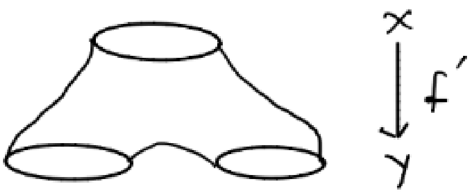
المورفيزم:$(n+1)-$ مانفولد موجه مع حدود ذو بعد $n+1$

$\mathrm{n+1-Manifold\ with\ boundaries}$

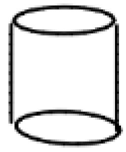
مثال: في حالة $n=1$ أي البعد الأول

التركيبات: مجموعة من الدوائر الموجهة

المورفزم :



التراكب يكون عن طريق لصق الحدود و المورفزم المحايد هو الأسطوانة



نعود الآن مرة للتذكير بالفئة X التي عرفناها سابقاً

الفئة X : سنقوم الآن بتعريف فئة منويدال صارمة متناظرة تدعى $(X,+,0,t)$ و كالآتي :

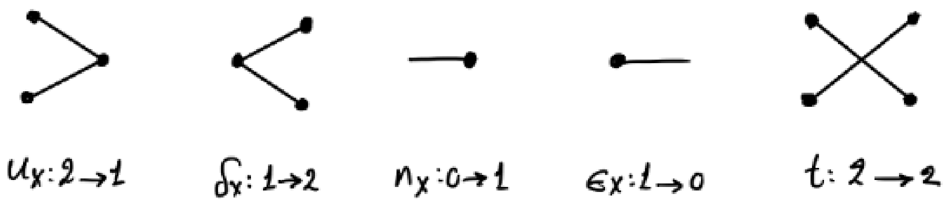
عناصر الفئة X تتولد بواسطة 1 و بهذا يكون كل عنصر من الشكل :

$$n=\underbrace{1+1+1\ldots..+1}_{n}$$

لكل n عدد طبيعي و كذلك يوجد العنصر المحايد 0

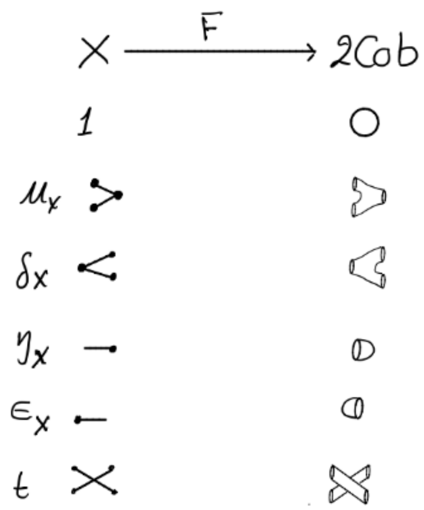
كل مورفزم يتولد بواسطة الضرب (μx) multiplication و الضرب المقابل δ_x *Co_multiplication*

الأحادي (η_x) unit و الأحادي المقابل (ϵ_x) co unit مع دالة الالتواء t و أخيراً الدالة المحايدة $1(id_1)$ unit map



نظرية 7: 2Cob و X متشاكلات كفئات

البرهان : يكفي تعريف المدلال $F: X \longrightarrow 2Cob$ و كالآتي



نعود مرة لاستخدام نظرية الحقل الكمي التبولوجية TQFT و اعتبارها مدلال (Functor) لقد قمنا خلال هذه الدراسة بتعميم كل شيء إلى فئة منويدال متناظرة $(V,\blacksquare,I,\tau)$ نعرف الدالة σ لأن تكون دالة التواء

$$\sigma : V\times V\to V\times V$$


معرفة كالآتي $\sigma(a\otimes b)=b\otimes a$ و ليكن T هو الكوبوردزم الملتوي

نظرية الحقل الكمي التبولوجية: T Q F T

تعريف 15:نظرية الحقل الكمي التبولوجية (Quantum Field Theory(Q F T :

نظرية الحقل الكمي التبولوجية ذو البعد $n+1$ هي مدلال من فئة الكوبوردزم ذو البعد n إلى فئة المقاسات للحلقة R(فضاءات المتجهات حالة خاصة من المقاسات المعرفة على الحقل $\mathbb{C}$)

لذلك T Q F T ذو البعد $\mathrm{n}+1$ تربط مقاس بمانفولد ذو بعد n و تربط الهومومورفيزم المقاسي بالكوبوردزم بين المانفولد و حتى نفهم الموضوع سنبدأ بتعريف الميكانيك الكمي.في الميكانيك الكمي إن الحالة state في النظام يمكن تمثيلها بعنصر من فضاء المتجهات(بصورة عامة يكون دائماً فضاء هلبرت).المتغيرات الظاهرة observables تقترن بالمؤثرات operators في هذا الفضاء و القيم الممكنة لهذه المتغيرات الظاهرة تمثل القيم الذاتية لهذه المؤثرات مع الحالات states التي تمثل المتجهات الذاتية (eigen state)eigenvector). نظرية الحقل الكمي هي الإطار العام لوصف القوة في الفيزياء أو تعتبر الإطار النظري لنموذج الميكانيك الكمي للجزيئات الذرية في فيزياء الجزيئات كذلك تربط نظريات الجاذبية بميكانيك الكم .

ميكانيك الكم Quantum Mech	النسبية العامة general relativity
State:Hilbert space	Space: $(\mathrm{n}-1)-\mathrm{manifold}$
Process:linear operator	Space time: $n-cobordism$
Combosition of operators	Combosition of cobordisms
Identity operators	Identity cobordisms

الباحث Atiah و آخرون قدّموا QFT كمدلال functor

تعريف 16: نظرية الحقل الكمي التبولوجية :

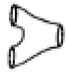
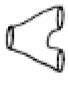
ليكن $K-Vect$ فئة لكل فضاءات المتجهات على الحقل K .نظرية الحقل الكمي التبولوجية أو $(n+1)-TQFT$ هي مدلال منويدال متناظر من الفئة $(nCob,\sqcup,\emptyset,T)$ إلى $(K-Vect,\otimes,K,\sigma)$. ان مجموعة هذه المدلالات تكون أيضاً فئة .

$$(n+1)\_TQFT=\mathrm{SymmMonCat}((\mathrm{nCob},\sqcup,\emptyset,\mathrm{T})(K\_Vect,\otimes,K,\sigma)$$

التكافؤ بين الفئات :

نظرية8 : لأي فئة $(V,\blacksquare,I,\tau)$ منويدال و متناظرة فإن التشاكل الآتي للفئات يتحقق

$$\mathrm{SymmMon}H\mathrm{om}(2\mathrm{Cob},\mathrm{V})\cong cFrob(V)$$

بالتطبيق : لعنصر فروبينيس إبدالي $(M,\mu,\delta,\eta,\epsilon,\tau)$ في فئة V منويدال متناظرة , المورفزم في V و الذي يمكن كتابته بواسطة تركيبة من $M,\mu,\delta,\eta,\epsilon,\tau,id_M$ و الضرب المنويدال يمكن تمثيله كله بواسطة كوبوردزم عندما نشير ل $TQFT$ مطبقة على العنصر M نحن نعني بها مدلال و الذي يرسل  إلى M و  إلى δ و هكذا حسب تعريف المدلال F بالنظرية *

و بهذا بينا كيف أن $TQFT$ هي مدلال بين فئة الكوبوردزم و عناصر فروبينيس و التي منها يمكن الحصول على فضاءات متجهات