2013

الدرس الأول

النهايات و الاستمرارية

إعداد : الأستاذ كمال. حامدي

1

ثانوية العربي بن مهيدي _العلمة

1

المحتوى

النهايات (تعاريف)

نهاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

تعريف

ℓ عدد حقيقي

القول أنّ للدالة f النهاية ℓ عند $+\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح شامل للعدد ℓ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي

ترميز و مصطلحات

نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ و نقول أنّ $f(x)$ يؤول إلى ℓ لمّا x يؤول إلى $+\infty$

في معلم، المستقيم ذو المعادلة $y = \ell$ هو مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

تنبيه

نعرف بطريقة مماثلة النهاية لدالة f عند $-\infty$

أمثلة

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-a} = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-a)^p} = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

تعريف

القول أنّ للدالة f النهاية $+\infty$ عند $+\infty$ يعني أنّ كل مجال من الشكل $]A; +\infty[$ (مع A عدد حقيقي) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي

ترميز و مصطلحات

نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و نقول أنّ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لمّا x يؤول إلى $+\infty$

تعريف

القول أنّ للدالة f النهاية $-\infty$ عند $+\infty$ يعني أنّ كل مجال من الشكل $]-\infty; B[$ (مع B عدد حقيقي) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي

ترميز و مصطلحات

نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و نقول أنّ $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لمّا يؤول x إلى $+\infty$

أمثلة

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} x^3 = -\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

النهاية المنتهية أو غير المنتهية عند عدد حقيقي

تعريف

ℓ و a عددان حقيقيان

القول أنّ للدالة f النهاية ℓ عند a يعني أنّ كل مجال مفتوح شامل للعدد ℓ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a

ترميز و مصطلحات

نكتب $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ و نقول أنّ $f(x)$ تؤول إلى ℓ لمّا يؤول x إلى a

أمثلة

x	$f(x)$
-0.04	0.999733
-0.03	0.999850
-0.02	0.999933
-0.01	0.999983
0	غير معرف
0.01	0.999983
0.02	0.999933
0.03	0.999850
0.04	0.999733

1. f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. يُشير الجدول على الهامش أنّ من أجل x قريب من 0 (من اليمين أو من اليسار) فإنّ $f(x)$ هو قريب من 1. نكتب: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (تُبرهن هذه النهاية في درس الاشتقاقية)
2. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{|x|}{x}$
   على المجال $]-\infty; 0[$، $f(x) = -1$ و على المجال $]0; +\infty[$، $f(x) = 1$
   إذن، ليس لدالة f نهاية عند 0 (لكن تقبل نهاية من اليمين و تقبل نهاية من اليسار)

ملاحظة

a عدد حقيقي ينتمي لمجموعة تعريف دالةٍ f. إذا كانت f دالة مرجعية (كثير حدود ، دالة ناطقة ، دالة جيب ، دالة جيب تمام ، ...) فإنّ الدالة f تقبل نهاية عند a و $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. مثلاً $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$

تعريف

القول أنّ للدالة f النهاية $+\infty$ عند a يعني أنّ كل مجال من الشكل $]A; +\infty[$ (مع A عدد حقيقي) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a

تنبيه

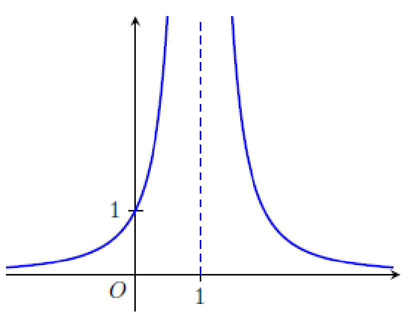
نعرف بطريقة مماثلة النهاية $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$□
$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ يعني أنّ كل مجال من الشكل $]-\infty; [$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a

ترميز و مصطلحات

نكتب $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و نقول أنّ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لمّا يؤول x إلى a

مثال

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$. يبدو من الشكل و يُمكن أن نبرهن أنّ $f(x)$ تأخذ قيم أكبر ما يمكن باختيار x قريب من 1. بالقدر الكافي



تطبيقات

تطبيق 1 حساب النهاية عند $+\infty$ باستعمال التعريف

نعلم أنّ نهاية الدالة $x \mapsto \frac{4x-5}{2x+3}$: عند $+\infty$ هي 2. أوجد عدد حقيقي A حيث :

إذا كان « $x > A$ » فإنّ « $1{,}95 < f(x) < 2{,}05$ »

الحل صفحة 14

تطبيق 2 حساب النهاية عند $+\infty$ باستعمال التعريف

1. f هي الدالة المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x-2}$. أثبت باستعمال التعريف أنّ نهاية f عند $+\infty$ هي 0.
2. g هي الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \sqrt{x}$. أثبت باستعمال التعريف أنّ نهاية g عند $+\infty$ هي $+\infty$.

الحل صفحة 14

تطبيق 3 حساب النهاية عند عدد باستعمال التعريف

f هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = (x-1)^2 + 2$.

نُريد دراسة سلوك $f(x)$ لمّا x يؤول إلى 2.

1. ما هو التخمين الذي يُمكن طرحه بالنسبة إلى نهاية الدالة f عند 2 ؟
2. في أيّ مجال يجب اختيار x حتى يكون:
   (أ) $f(x) \in [2{,}9;3{,}1]$
   (ب) $f(x) \in [2{,}99;3{,}01]$
3. r عدد حقيقي حيث $0 < r < 1$.
   (أ) في أيّ مجال يجب اختيار x حتى يكون $(x) \in [3-r;3+r]$.
   (ب) ماذا تستنتج علما أنّه يُمكن اختيار x صغيرا بالقدر الذي نُريد ؟

الحل صفحة 14

العمليات على النهايات

f و g دالتان لهما نفس مجموعة التعريف D.

في الجداول التالية، النهايات هي عند $-\infty$ أو عند $+\infty$ أو عند عددٍ حقيقيا a، ℓ و ℓ' هما عددان حقيقيان

▪ نهاية مجموع دالتين

إذا كانت نهاية f:	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
و كانت نهاية g:	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فإنّ نهاية $f+g$:	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

▪ نهاية جداء دالتين

إذا كانت نهاية f:	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
و كانت نهاية g:	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
فإنّ نهاية $f \times g$:	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

▪ نهاية حاصل قسمة دالتين

حالات حيث g غير معدومة

إذا كانت نهاية f:	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
و كانت نهاية g:	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
فإنّ نهاية $\frac{f}{g}$:	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

حالات حيث g معدومة

إذا كانت نهاية f:	$\ell > 0$ أو $+\infty$	$\ell > 0$ أو $+\infty$	$\ell < 0$ أو $-\infty$	$\ell < 0$ أو $-\infty$	0
و كانت نهاية g:	0^+	0^-	0^+	0^-	0
فإنّ نهاية $\frac{f}{g}$:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

- ## حالات عدم التعيين

تتطلب حالات عدم التعيين دراسة خاصة في كل حالة

توجد أربعة حالات عدم التعيين و هي من الشكل: « $\frac{\infty}{\infty}$ » ، « $\frac{0}{0}$ » ، « $\infty - \infty$ » ، « $0 \times \infty$ »

- ## النهايات في ما لانهاية

- في مالا نهاية ، نهاية كثير حدود هي نهاية حدّه الأعلى درجة
- في مالا نهاية ، نهاية كسر ناطق هي نهاية حاصل قسمة الحدّين الأعلى درجة.

تطبيقات

تطبيق 4 حساب النهايات

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0; 1\}$ بما يلي: $f(x) = \frac{x^3-2x+3}{-x^2+x}$

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

تطبيق 5 إزالة حالة عدم التعيين باستعمال المرافق أو العامل المشترك

أدرس النهايات:

- عند 3 للدالة $x \to \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$:
- عند $+\infty$ للدالة $g: x \to \sqrt{x^2+1} - x$
- عند $+\infty$ للدالة $g(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}$
- عند $-\infty$ للدالة $g(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 + x}$

النهايات بالمقارنة

مبرهنة الحصر

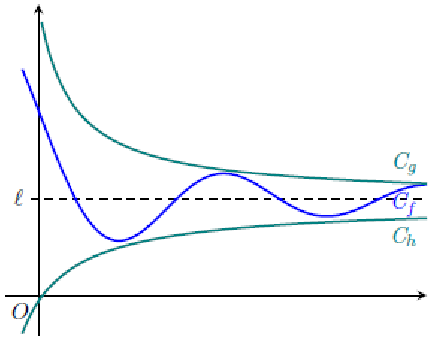
مبرهنة

f، g و h ثلاث دوال معرفة على مجال $I =]b; +\infty[$

إذا كان من أجل كل x من I، $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ **و كان** $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ **فإنّ** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

ملاحظة

تمتد المبرهنة في حالة النهاية عند $-\infty$ أو عند عدد



أمثلة

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ كذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$
- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $f(x)=2+\frac{\cos x}{x^2}$. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

المقارنة في ما لا نهاية

خواص

f و g دالتان معرفتان على مجال $I=]b;+\infty[$. **إذا كان** من أجل كل x من I،

- $f(x)\geq g(x)$ **و كان** $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ **فإنّ** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
- $f(x)\leq g(x)$ **و كان** $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ **فإنّ** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

ملاحظة
تمتد الخواص في حالة النهايات عند $-\infty$

مثال

النهاية عند $+\infty$ للدالة f المعرفة بـ $f(x)=x^2+2\cos x$

تطبيقات

تطبيق 6 تعيين نهاية بمُبرهنة الحصر

1. f هي دالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x-1}$
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>1$، $\dfrac{2x-1}{x-1}\leq f(x)\leq\dfrac{2x+1}{x-1}$
3. استنتج نهاية f عند $+\infty$

تطبيق 7 تعيين نهاية بالمقارنة

أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $1\leq 2-\cos x\leq 3$ و $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{2-\cos x}\leq 1$

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{x}{2-\cos x}$. أدرس نهاية f عند $+\infty$ ثمّ عند $-\infty$

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x)=\frac{2-\cos x}{x}$. أدرس نهاية g عند $+\infty$ ثمّ عند $-\infty$

نهاية دالة مركبة

نهاية مركب دالتين

مبرهنة

a، b و c هي أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. و f، g و h هي ثلاث دوال حيث $f(x)=g(h(x))$

إذا كان $\lim_{x\to a} h(x)=b$ و $\lim_{X\to b} g(X)=c$ فإنّ $\lim_{x\to a} f(x)=c$

مثال: النهاية عند $+\infty$ للدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $h(x)=\sqrt{\frac{4x^2+x+1}{x^2+1}}$

لدراسة نهاية الدالة h عند $+\infty$ نكتب $h(x)=g[f(x)]$ مع :

$$X=f(x)=\frac{4x^2+x+1}{x^2+1} \text{ و } g(X)=\sqrt{X}$$

$$\lim_{x\to+\infty} X=4 \text{ و } \lim_{x\to4}\sqrt{X}=2$$

إذن، حسب الخاصية أعلاه، $\lim_{x\to+\infty} h(x)=2$

ملاحظة

بوضع $X=\frac{4^2+x+1}{x^2+1}$ نقول أنّنا أجرينا تغييراً للمتغيّر

تطبيقات

تطبيق 8 حساب نهاية دالة مركبة

f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;-4[\cup[\frac{1}{2};+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x+4}}$

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

تمرين 1، 2، 3

طريقة

لتطبيق المبرهنة على النهاية عند a للدالة المركبة $x\mapsto g(h(x))$ ، نبحث أولاً عن النهاية b للدالة h عند a، ثمّ نهاية الدالة g عند b

تطبيق 9 تغيير للمتغيّر

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. ما هي نهاية الدالة $x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$ ؟ هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ؟
2. أحسب نهاية f عند $+\infty$

المستقيم المقارب المائل

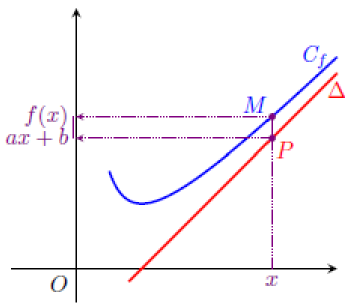
تعريف

$\mathcal{C}_f$ هو التمثيل البياني للدالة f في معلم. القول أنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y=x+b$ هو مقارب مائل للمنحنى $_f$ عند $+\infty$ يعني أنّ : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

تنبيه

نعرف بطريقة مماثلة المستقيم المقارب المائل عند $-\infty$

التفسير البياني



ليكن x ينتمي إلى مجموعة تعريف الدالة f، M نقطة من $_f$ و P نقطة من Δ فاصلتاهما x (لشكل)

في معلم متعامد المسافة PM هي $|(x)-(ax+b)|$ و عليه من أجل x بجوار $+\infty$ المسافة PM هي قريبة من الصفر، أي: بجوار $+\infty$ المنحنى $\mathcal{C}_f$ و المستقيم Δ هما متقاربان

مثال

f هي الدالة المعرفة على$\mathbb{R}$ بـ $(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x^2+1}$ و $\mathcal{C}$ هو المنحني الممثل للدالة f في معلم.
أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. أثبت أنّ المنحني $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$

تطبيقات

تطبيق 10 وضعية منحنى بالنسبة إلى مستقيمه المقارب

أثبت أنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل عند $+\infty$ للمنحنى f الممثل للدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+2}$
ثمّ حدد وضعية $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى Δ

مفهوم الاستمرارية عند عدد و الاستمرارية على مجال

الاستمرارية : الاستمرارية عند عدد و الاستمرارية على مجال

تعريف

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي a.

- القول أنّ الدالة **f مستمرة عند العدد a** يعني أنّ نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$ أي بمعنى:
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
- القول أنّ الدالة **f مستمرة على المجال I** يعني أنّ f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I

أمثلة

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-4\}$ بـ: $f(x) = \frac{x-4}{x+4}$

- f غير مستمرة عند -4 لأنّ:
- f مستمرة عند 0 لأنّ:

التفسير البياني

بيانيا ، تُعرف دالة مستمرة على مجال I عندما يُمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (ملاحظة: هذا ليس دليلا!)

نتائج : استمرارية الدوال المرجعية

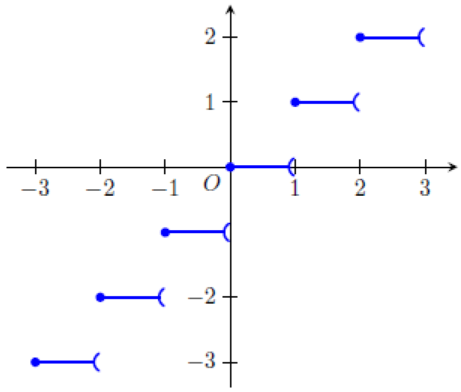
- مجموع و جداء دالتين مستمرتين عند a هي دوال مستمرة عند a
- مقلوب دالة مستمرة عند a و غير معدومة عند a هي دالة مستمرة عند a
- إذا كانت الدالة f مستمرة عند a و كانت الدالة g مستمرة عند $f(a)$ فإنّ الدالة $g \circ f$ مستمرة عند a
- الدوال كثيرات الحدود ، sin ، cos و $x \mapsto |x|$ هي دوال مستمرة على $\mathbb{R}$
- الدوال الناطقة والدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ هي دوال مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها
- يُستنتج من هذا أنّ كل دالة مكتوبة جبرياً على شكل مجموع، جُداء أو مركب دوال مرجعية هي كذلك دالة مستمرة على أي مجال من مجموعة تعريفها

مثال لدالة غير مستمرة : الدالة الجزء الصحيح

تعريف

ليكن x عددا حقيقيا. يوجد عدد صحيح وحيد n، حيث: $n \le x < n+1$

نعرف إذن على $\mathbb{R}$ الدالة الجزء الصحيح، التي نرمز لها بالرمز E، بـ: $E(x) = n$



مثلا

$\mathrm{E}(-4{,}12) = -5$ ،$\mathrm{E}(\pi) = 2$ ،$\mathrm{E}(3) = 3$ ،$\mathrm{E}(2{,}3) = 2$

التمثيل البياني للدالة الجزء الصحيح

إذا كان n عدد صحيح، فإنّ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[n; n+1[$، $\mathrm{E}(x) = n$

الدالة E غير مستمرة على $\mathbb{R}$ ، لا تقبل نهاية عند كل عدد صحيح.

أنواع مختلفة لدوال غير مستمرة

هل توجد أنواع مختلفة لدوال غير مستمرة ؟ نعم !

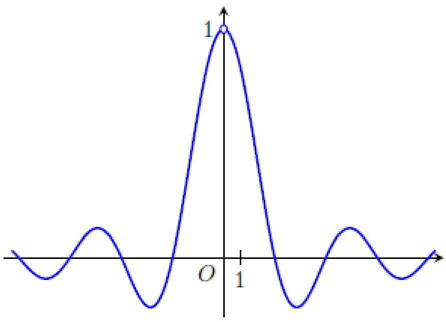
تكون دالة f مستمرة عند عدد a إذا ، و فقط إذا كانت لهذه الدالة نهاية من اليمين عند a و لها نهاية من اليسار عند a و هاته النهايتين تساويان $f(a)$

و عليه تكون f غير مستمرة عند a لعدة أسباب:

السبب الأول: للدالة f نهاية من اليمين عند a، نهاية من اليسار عند a، لكن النهايتان غير متساويتين

مثال: الدالة الجزء الصحيح عند 1 مثلاً

السبب الثاني: للدالة f نهاية من اليمين عند a تساوي النهاية من اليسار عند a، لكن الدالة f هي غير معرفة عند a أو تأخذ قيمة تختلف عن النهاية المشتركة. مثال ذلك الدالة $f: x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ من أجل $x \neq 0$، (الشكل) هذه الدالة غير معرفة عند 0 لكن $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

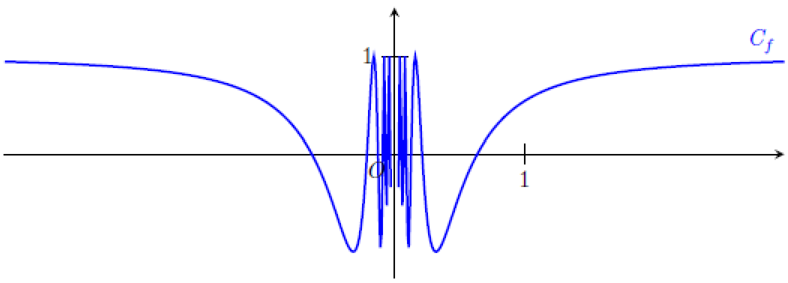


يُمكن هنا أن **نُمدد الدالة f بالاستمرارية**، بتعريف الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = 0, & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

نحصل إذن على دالة **g مستمرة** على $\mathbb{R}$

السبب الثالث: ليس للدالة f نهاية من اليمين أو من اليسار عند a. مثال ذلك الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ من أجل $x \neq 0$ و $f(0) = 0$ و الممثلة بيانيا بـ:



ملاحظة

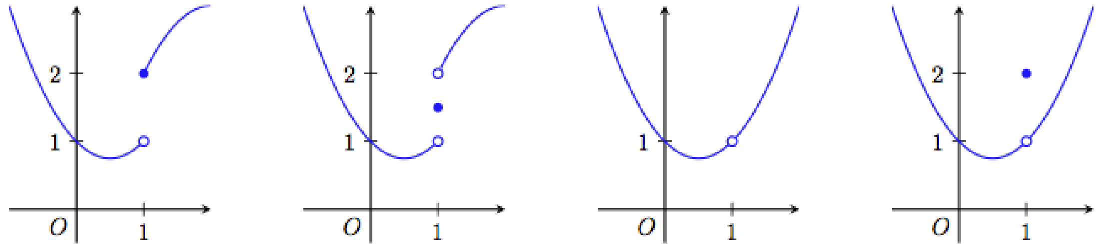
مثال لدالة معرفة على $\mathbb{R}$ و غير مستمرة عند كل عدد حقيقي (خارج البرنامج !):

$$\begin{cases} f(x) = 0, & x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

تطبيقات

تطبيق 11 دوال غير مستمرة

الدوال الممثلة بالمنحنيات التالية غير مستمرة عند 1. برّر ؟



تطبيق 1 تعيين نهاية بمُبرهنة الحصر

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[-1;3]$ بما يلي :

$$g(x)=\begin{cases} x^2-2x & : x\in[-1;1] \\ -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} & : x\in\,]1;3] \end{cases}$$

1. أدرس استمرارية الدالة g عند 1
2. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-3;2]$ ؟

أذكر المجالات أين تكون هذه الدالة مستمرة.

الدوال المستمرة و حل المعادلات (مبرهنة القيم المتوسطة)

مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة

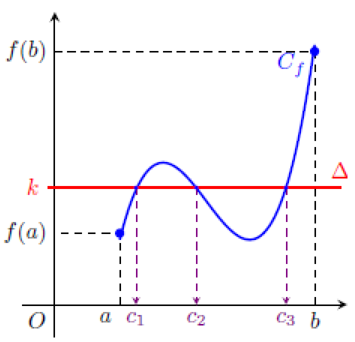
f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a;b]$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد ، على الأقل، عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$

بمعنى آخر: من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلاً c محصور بين a و b

التفسير الهندسي

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم $\mathcal{D}$ ذو المعادلة $y=k$، يقطع المنحنى $\mathcal{C}$ على الأقل في نقطةٍ فاصلتها c محصورة بين a و b



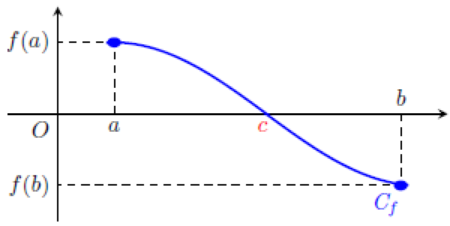
حالة خاصة

إذا كانت مستمرة على المجال $[a;b]$ و كان $f(a) \times f(b) < 0$ فإنّه يوجد ، على الأقل ، عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = 0$

الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال $[a;b]$

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$



طريقة

للبرهنة على وجود حلول معادلة على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة:

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x) = k$
- نتحقق من استمرارية الدالة f على $[a;b]$
- نتحقق أنّ k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

تطبيق 13 تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة

1. أثبت أنّ المعادلة $x^3 - 4x = 3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[2;3]$
2. لتكن (E) المعادلة $\cos(2) = 2\sin x - 2$

أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أنّ المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

تطبيق 14 استنتاج حلول معادلة من جدول التغيّرات

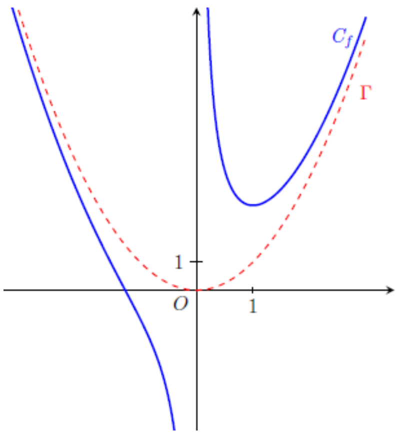
جدول التغيّرات التالي هو لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. أذكر عدد حلول المعادلات المعطاة محدّدا لكل منها المجال الذي ينتمي إليه الحل:

$f(x) = -5$ ، $f(x) = 0$ ،
$f(x) = 2$ ، $f(x) = 9$

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	1 ↘	-1 ↗	7 ↘	-4

أعمال موّجهة

المنحني المقارب



f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}\square$$

و $\mathcal{C}_f$ هو تمثيلها البياني (الشكل)

في ما لا نهاية ($+\infty$ أو $-\infty$) $\frac{1}{x}$ يؤول إلى الصفر و لـ $f(x)$ نفس سلوك x^2

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x^2]$
2. ما يمكن قوله بالنسبة للمنحني $\mathcal{C}_f$ و القطع المكافئ ذو المعادلة $y = x^2$ (الشكل). نقول أنّ **المنحنيين متقاربان**
3. أدرس حسب قيم x، الوضعية النسبية للمنحنيين

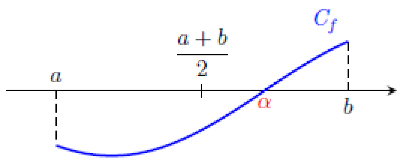
إيجاد حصر لحل معادلة باستعمال طريقة التنصيف

> **المبدأ** : بصفة عامة إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a) \times f(b) < 0$ فإنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a;b]$

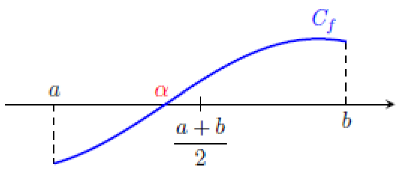
طريقة التنصيف هي طريقة تسمح تدريجيا بالحصول على حصر أدق للعدد α

ماذا يُمكن القول عن α إذا كان للعددين $f(a)$ و $f\left(\frac{a+}{2}\right)$:

(أ) نفس الإشارة ؟



(ب) إشارتين مختلفتين ؟



مثال

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x^3 - 3x - 1$

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-2;-1]$. $f(-2) = -3$ و $f(-1) = 1$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-2;-1]$

للحصول على حصر أدق لـ α نتبع المنهجية التالية:

1. **المرحلة الأولى** : نختار $-1{,}5$ مركز المجال $[-2;-1]$. $f(-1{,}5) = 0{,}125$.
   إذن $f(-1{,}5)$ و $f(-2)$ مختلفان في الإشارة. ما هو الحصر لـ α الذي يُمكن استنتاجه ؟
2. **المرحلة الثانية** : نختار $-1{,}75$ مركز المجال $[-2;-1{,}5]$.
   $f(-1{,}5)$ و $f(-2)$ من نفس الإشارة. ما هو الحصر لـ α الذي يُمكن استنتاجه ؟

تمارين و مسائل للتعمق

نهاية دالة

15 في كل حالة، أدرس النهايات المقترحة للدالة f

- $f(x)=\frac{x^2-4x-12}{x^2-4}$ عند $+\infty$، عند $-\infty$، عند 2، عند -2
- $f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ عند $+\infty$، عند $-\infty$، عند 1، عند -2
- $f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-9}$ عند $+\infty$، عند $-\infty$، عند 3، عند -3
- $f(x)=2x+\sin x$ عند $+\infty$، عند $-\infty$
- $f(x)=x^3(2+\cos x)$ عند $+\infty$، عند $-\infty$
- $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ عند $+\infty$، عند 1
- $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$ عند $+\infty$
- $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$ عند $-\infty$
- $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ عند 3
- $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ عند $+\infty$، عند 0
- $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$
- $f(x)=\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ عند 2

16 f هي دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ :
$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$
1. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$،
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
2. استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$
$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\leq f(x)\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
3. هل للدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

17 f هي الدالة المعرفة على $]-5;+\infty[$ بـ :
$$f(x)=\frac{x-3}{x+5}$$
1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))$
2. جد هذه النهاية الأخيرة بتعيين عبارة $f(f(x))$

المستقيمات المقاربة

18 $\mathcal{C}$ هو التمثيل البياني لدالة f و $\mathcal{D}$ هو تمثيلها البياني في معلم. حدد في كل حالة المستقيمات المقاربة للمنحنى $\mathcal{C}$

- $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$، على $\mathcal{D}=\mathbb{R}-\{1\}$
- $f(x)=-x+3+\frac{2}{x^2+1}$، على $\mathcal{D}=\mathbb{R}$
- $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+3}$، على $\mathcal{D}=\mathbb{R}$
- $f(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$، على $\mathcal{D}=\mathbb{R}-\{0\}$
- $f(x)=\frac{x^2+6x+1}{x^2-1}$، على $\mathcal{D}=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

19 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$
$\mathcal{C}$ هو تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$
1. أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$. فسر النتيجة هندسيا
2. أثبت أنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y=2x$ هو مقارب مائل للمنحنى $\mathcal{C}$ عند $+\infty$
3. أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى Δ

الاستمرارية

20 f هي الدالة المعرفة على المجال $[-2;3]$ بما يلي:
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & : x\in[-2;1[\\ x+p & : x\in[1;3]\end{cases}$$
p عدد حقيقي
1. نختار $p=1$. أنشئ المنحنى $\mathcal{C}_f$ الممثل للدالة f
   - أ) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2;1[$ ؟ هل هي مستمرة على المجال $[1;3]$ ؟
   - ب) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2;3]$ ؟
2. كيف يتم اختيار قيمة p حتى تكون f مستمرة على المجال $[-2;3]$ ؟

21 أدرس استمرارية الدالة عند 0 في كل حالة من الحالات التالية:

1.
$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & : x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$$
2.
$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & : x\neq 0\\ f(0)=2\end{cases}$$

22 بيّن أنّ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & : x>0\\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2} & : x\leq 0\end{cases}$$
مستمرة على $\mathbb{R}$

23 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;2[$ بـ:
$$f(x)=x+E(x)$$
حيث E هي الدالة الجزء الصحيح
1. أكتب عبارة $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى كل مجال من المجالات التالية $]-1;0[$، $[0;1[$ و $[1;2[$
2. في معلم، أنشئ التمثيل البياني للدالة f.
3. هل الدالة f مستمرة على المجال $]-1;2[$؟

24 f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث

$f(b) > b^2$ و $f(a) < ab$

بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي c من $[a;]$ بحيث $f(c) = bc$

25 f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$.

بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي c من $]0;1[$ بحيث $f(c) = \frac{1-c}{1+c}$

من البكالوريا ...

26 a ، b ، c و d هي أعداد حقيقية حيث من أجل كل $x \neq -1$،

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$$

في الشكل المقابل يُعطي جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

1. ما هي قيمة d ؟

(ب) أحسب $f'(x)$

(جـ) عيّن الأعداد a، b و c

2. المستوي منسوب إلى معلم،

أثبت أنّ المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f يقبل المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 1$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$ و عند $-\infty$. أدرس وضعية $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى Δ

27 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

(وحدة الرسم: 1 cm)

نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

و ليكن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني

1. (أ) عيّن نهاية الدالة u عند $-\infty$

ب) أثبت أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

2. (أ) أثبت أنّ $[u(x) + 2x]$ يول إلى 0 لمّا يؤول x إلى $-\infty$

ب) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا $u(x) > 0$. استنتج إشارة $[u(x) + 2x]$

جـ) فسر هذه النتائج بيانيا

3. نقبل أنّ الدالة u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. أنشئ المنحني $\mathcal{C}$ و مستقيمه المقارب المائل

4. $\mathcal{C}'$ هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$v(x) = -u(x)$ و $\mathcal{H}$ هو اتحاد $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$.

تحقق أنّ للمنحني $\mathcal{H}$ المعادلة: $y^2 + 2xy - 1 = 0$

28 الهدف من هذه المسألة هو دراسة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 10}{x^2 - 4x + 9}$$

ليكن $\mathcal{C}_f$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس من المستوي (الوحدة: 2 cm)

الجزء الأول: دراسة دالة مساعدة

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$g(x) = \frac{4x^2 - 16x - 4}{(x^2 - 4x + 9)^2}$$

1. أدرس نهاية الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$

2. نقبل أنّ جدول تغيّرات الدالة g هو التالي

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
g		↗		↘		↗		↘	

أ) أحسب $g(2)$

ب) استنتج من الأسئلة السابقة، قيم x التي تحقق $g(x) > -1$. برّر الإجابة

الجزء الثاني: دراسة الدالة f و إنشاء تمثيلها البياني

1. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x،

$$f(x) = x - 2 + \frac{-4x + 8}{x^2 - 4x + 9}$$

2. (أ) أثبت أنّ الدالة المشتقة f' للدالة f تحقق:

من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = 1 + g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f

3. أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

4. (أ) أثبت أنّ $A(2;0)$ هي مركز تناظر للمنحنى $\mathcal{C}$

(ب) أثبت أنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x - 2$ هو مقارب للمنحنى $\mathcal{C}$

5. أدرس وضعية المنحنى $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى المستقيم Δ

6. أنشئ المستقيم Δ و المنحنى $\mathcal{C}_f$

حل تمارين و إرشادات

01 القول أنّ $1,95 < f(x) < 2,05$ يعني أنّ $1,95 < \frac{4x-5}{2x+3} < 2,05$
بإمكاننا فرض $x > 0$ (لأنّ x يؤول إلى $+\infty$)
إذن: $2x+3 > 0$ و عليه
$1,95(2x+3) < 4x-5 < 2,05(2x+3)$
أي: $-0,1x + 5,85 < -5 < 0,1x + 6,15$
نستتج أنّه **إذا كان**:
$-0,1x < -10,85$ و $0,1x > -11,15$
بمعنى: $x > 108,5$ و $x > -111,5$
(أي: $x > 108,5$)
فإنّ: $1,95 < f(x) < 2,05$
النتيجة: يمكن إذن اختيار $A = 108,5$
(أو أي عدد آخر أكبر من 108,5)

02
1. يكفي أن نبرهن أنّ كل مجال مفتوح شاملاً العدد 0 يشمل كل القيم $f(x)$
I هو مجال مفتوح يشمل 0، $I =]-\beta;\alpha[$ مع $\alpha > 0$، $\beta > 0$
$x > 2$ (لأنّ $x \to +\infty$) إذن $f(x) \in I$ يكافئ $\frac{1}{x-2} < \alpha$، بمعنى $x-2 > \frac{1}{\alpha}$، أي $x > 2+\frac{1}{\alpha}$.
إذن من أجل x كبيرا بالقدر الكافي (أكبر من $2+\frac{1}{\alpha}$)، I يشمل كل القيم $f(x)$.
النتيجة: إذن للدالة f النهاية 0 عند $+\infty$
2. يكفي أن نبرهن أنّ كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ يشمل كل القيم $g(x)$
ليكن A عدد حقيقي
نعلم أنّ: $\sqrt{x} \geq A$ يكافئ $x > A^2$
إذن باختيار x أكبر من A^2 (أي كبيرا بالقدر الكافي)،يكون $\sqrt{\ } \geq A$ أي $g(x) \in [A;+\infty[$
(المجال $[A;+\infty[$ يشمل كل القيم $g(x)$)
النتيجة: إذن للدالة g النهاية $+\infty$ عند $+\infty$

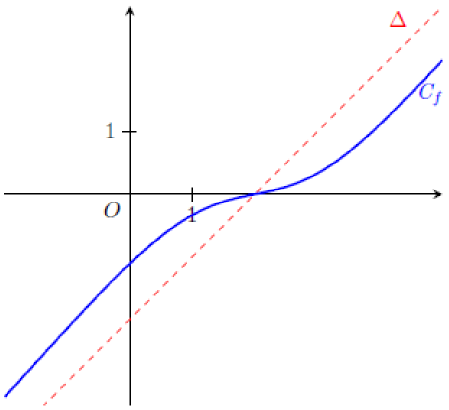
03
1. **التخمين**: إذا كان x قريب من 2، يكون $f(x)$ قريب من $2+(2-1)^2$، أي قريب من 3 بمعنى $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$
2. أ) لأجل $2,9 \leq f(x) \leq 3,1$، أي: $0,9 \leq (x-1)^2 \leq 1,1$، يُمكن اختيار x بحيث $0,95 \leq x-1 \leq 1,04$، أي: $x \in [1,95;2,04]$
ب) لأجل $2,99 \leq f(x) \leq 3,01$، أي: $0,99 \leq (x-1)^2 \leq 1,01$، يُمكن اختيار x بحيث $0,995 \leq x-1 \leq 1,004$، أي: $x \in [1,995;2,004]$
3. أ) لأجل $3-r \leq f(x) \leq 3+r$، أي: $1-r \leq (x-1)^2 \leq 1+r$، يُمكن اختيار x بحيث $\sqrt{1-r} \leq x-1 \leq \sqrt{1+r}$، أي: $x \in [1+\sqrt{1-r};1+\sqrt{1+r}]$، هذا المجال يشمل 2
ب) بإمكان اختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد، كذلك يمكن اختيار $f(x)$ قريبا من 3 بالقدر الذي نريد شريطة أن يكون x قريبا من 2 بالقدر الكافي. و هذا يعني أنّ للدالة f النهاية 3 عند 2

24 c يحقق $f(c) = bc$ معناه أنّ c هو حل للمعادلة $f(x) = bx$ أي $f(x) - bx = 0$
نطبق إذن مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة g المعرفة على المجال $[a;]$ بـ: $g(x) = f(x) - bx$

25 c يحقق $f(c) = \frac{1-c}{1+c}$ معناه أنّ c هو حل للمعادلة $f(x) - \frac{1-x}{1+x} = 0$.
نطبق إذن مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة g المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $g(x) = f(x) - \frac{1-x}{1+x}$

28
الجزء الأول
1. g هي دالة ناطقة، نهايتها عند $-\infty$ أو عند $+\infty$ هي نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام. و عليه:
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2} = 0$
و بطريقة مماثلة نبرهن أنّ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$
2. أ) $g(2) = -0,8$
ب) g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;x_1]$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ إذن $g(x) > 0$ على المجال $]-\infty;x_1]$
و g متناقصة تماما على المجال $]x_1;2]$
و $g(2) = -0,8$ إذن $g(x) \geq -0,8 > -1$ على المجال $]x_1;2]$. نبرهن بطريقة مماثلة أنّ $g(x) > -1$ على المجال $]2;x_2]$ و على المجال $]x_2;+\infty[$
و عليه: من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x) > 1$
طريقة ثانية: الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$
و $g(2) = -0,8$ هي القيمة الصغرى للدالة g على $\mathbb{R}$. إذن من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x) \geq -0,8 > -1$ و هو المطلوب

الجزء الثاني
1. من أجل كل عدد حقيقي x،
$$x-2+\frac{-4x+8}{x^2-4x+9} =$$
$$= \frac{(x-2)(x^2-4x+9)-4x+8}{x^2-4x+9}\square$$
$$= \frac{x^3-6x^2+13x-10}{x^2-4x+9} = f(x)\square$$
2. أ) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x
$$f'(x) = 1+\frac{-4(x^2-4x+9)-(-4x+8)(2x-4)}{(x^2-4x+9)^2}$$
$$= 1+\frac{-4x^2+16x-36+8x^2-16x-16x+32}{(x^2-4x+9)^2}$$
$$= 1+\frac{4x^2-16x-4}{(x^2-4x+9)^2}$$
$$= 1+g(x)\square$$
ب) حسب الجزء الأول، من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x) > -1$ إذن $g(x)+1 > 0$، أي: $f'(x) > 0$
ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
3. أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$
نبرهن كذلك أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
4. من أجل كل عدد حقيقي x،
$$f(2+x)+f(2-x) =$$
$$= 2+x-2+\frac{-4(2+x)+8}{(2+x)^2-4(2+x)+9}$$
$$+2-x-2+\frac{-4(2-x)+8}{(2-x)^2-4(2-x)+9}$$
$$= \frac{-4x}{4+x^2-8+9}+\frac{4x}{4+x^2-8+9}$$
$$= \frac{-4x+4x}{x^2+5} = 0\square$$
إذن النقطة $A(2;0)$ هي مركز تناظر للمنحنى $\mathcal{C}_f$.
5. أ) من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-(x-2) = \frac{-4x+8}{x^2-4x+9}$، إذن
إذن
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x} = 0$$
بطريقة مماثلة نثبت كذلك أنّ
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-2)] = 0$$
النتيجة: المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x-2$ هو مقارب للمنحنى $\mathcal{C}_f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$
ب) من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-(x-2) = \frac{-4x+8}{x^2-4x+9}$، بما أنّ $x^2-4x+9 > 0$ فإنّ إشارة $f(x)-(x-2)$ هي إشارة $-4x+8$ و عليه:
من أجل $x < 2$، $f(x)-(x-2) > 0$ و المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع فوق المستقيم Δ على المجال $]-\infty;2]$
على المجال $]-\infty;2]$ المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع فوق المستقيم Δ
و $\mathcal{C}_f$ يقطع المستقيم Δ في النقطة ذات الفاصلة 2
6. لتمثيل البياني للدالة f



بإمكانك تحميل الدرس على الرابط التالي:
http://kahamdi.wordpress.com/