Journal of Economics and Administrative Sciences (JEAS)

Available online at http://jeasiq.uobaghdad.edu.iq

الأمثلية الحصينة مع تطبيق عملي

أ.م.د. مروان عبد الحميد عاشور
قسم الإحصاء/ كلية الإدارة والاقتصاد/
جامعة بغداد
dr_marwan2012@yahoo.com

الباحث/ فاطمة عبد الإمام طاهر
قسم الإحصاء/ كلية الإدارة
والاقتصاد/ جامعة بغداد
fatima1994abdulemam@gmail.com

Published :18/11/2019 **Accepted :24/12/2019** **Received :April / 2020**

هذا العمل مرخص تحت اتفاقية المشاع الابداعي نسب المُصنَّف - غير تجاري - الترخيص العمومي الدولي 4.0
Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)

مستخلص البحث:

إن الغرض من هذا البحث هو تطبيق أسلوب الحصانة في البرمجة الخطية للتخلص من مشكلة عدم التأكد في معاملات القيود وإيجاد الحل الأمثل الحصين لتعظيم أرباح الشركة الإنتاجية العامة للزيوت النباتية لسنة (2019)، من خلال التعديل على الأنموذج الرياضي للبرمجة الخطية (LP) عندما تكون بعض معلمات الأنموذج الخطي ذات قيم غير مؤكدة، ويتم معالجتها باستعمال النظير الحصين (the robust counterpart) للبرمجة الخطية للحصول على نتائج محصنة من التغيرات العشوائية التي تحدث في القيم غير المؤكدة للمشكلة ، وذلك بافتراض إن هذه القيم تنتمي لمجموعة عدم التأكد (Uncertainty set) واختيار القيم التي تسبب أسوء النتائج (الأكثر تحفظًا) واعتماد بناء الأنموذج الخطي الحصين عليها، ومن ثم يتم مقارنة النتائج المثلى الحصينة مع نتائج الأمثلة الاعتيادية.

وقد تم التوصل في هذا البحث الى أهم النتائج وهي من الممكن أن يسبب إهمال بسيط لعدم التأكد في قيمة معلمات الأنموذج الخطي انخفاض في صافي الأرباح، إذ في حال زيادة نسبة الشوائب في المادة الأولية الداخلة في تركيب المنتجات إلى الحد الأقصى من حالاتها المتوقعة تسبب نقص في تركيز المادة الفعالة اللازمة في إنتاج الكميات المخطط لها مما يسبب تقليل الإنتاج وبالتالي انخفاض الإيرادات بقيمة (67,883,826.8281) سبعة وستون مليون وثمان مئة وثلاثة وثمانون الف وثمان مئة وستة وعشرين دينار في السنة من الربح المتوقع، إذ أن إجمالي الأرباح المتوقعة هي (537,921,100) خمسمائة وسبعة وثلاثين مليونًا وتسعمائة وواحد وعشرين ألف ومائة دينار وعندما تنخفض عن هذه القيمة نتيجة تغير القيم عشوائيًا تصل الى (470,037,273.172) أربعمائة وسبعون مليون وسبعة وثلاثين ألف ومائتين وثلاثة وسبعون دينار في أسوء الحالات المتوقعة لها، بينما عندما تم تطبيق الأنموذج الحصين فأن إجمالي الأرباح كانت (476,269,200) أربعمائة وستة وسبعين مليون ومائتين وتسعة وستون ألف ومائتان دينارًا وفي المقابل يضمن عدم انخفاضها عن هذه القيمة عند أي تغير عشوائي للقيم، لأن الأنموذج الحصين تم بناءهُ في أسوء حالاته المتوقعة، وبالإضافة إلى ذلك يمكن ضمان تجنب أي انتهاك في القيد في حال حدوث التقلبات العشوائية التي تحصل في قيمة المعلمة غير المؤكدة عند تطبيق الأسلوب الحصين.

مصطلحات الرئيسة للبحث: البرمجة الخطية ، البرمجة الحصينة ، الأمثلية الحصينة ، عدم التأكد ، انتهاك القيود.

*البحث مستل من رسالة الماجستير (البرمجة الخطية الحصينة)

1. المقدمة:

نادرا ما تكون جميع المعلمات لمشكلة البرمجة الخطية مؤكدة تمامًا من الناحية التطبيقية فيتم تخمين هذه القيم واللجوء الى التنبؤ، وفي بعض الأحيان عند حل المشكلة يتم تجاهل عدم التأكد اذا كانت القيم المخمنة تنحرف بمقدار بسيط عن القيم الحقيقية وحل المشكلة كما لو كانت البيانات مؤكدة والحصول على نتائج الأمثلية، ولكن في الواقع تؤثر هذه التغيرات في القيم على الحل الأمثل وقد تبين ان الانحرافات الصغيرة جدا للبيانات غير مؤكدة يمكن ان تجعل الحل الأمثل غير قابل للتطبيق، وبالتالي توجد هناك حاجة حقيقية إلى منهجية قادرة على توليد حل محصّن ضد تأثير عدم التأكد في البيانات. يوجد العديد من الطرق للتعامل مع عدم التأكد من ضمنها (الأمثلية الحصينة Robust optimization) و (الأمثلية العشوائية Stochastic optimization) إذ أن في الامثلية العشوائية (SO) يفترض أنه يجب معرفة أو تقدير التوزيع الاحتمالي الحقيقي للبيانات غير المؤكدة، إلا أن هناك بعض الصعوبة في الحصول على التوزيعات الفعلية للمعلمات غير المؤكدة، أما من ناحية أخرى لا تتطلب منهجية الأمثلية الحصينة (RO) التوزيعات الاحتمالية ولكن بدلاً من ذلك يفترض أن المعلمات غير المؤكدة تنتمي الى مجموعة محددة تسمى مجموعة عدم التأكد (U) ويعتمد الأنموذج على تحليل الحالة الأسوأ أي ينبغي اختيار المعلمة غير المؤكدة التي يتم حسابها في أسوء احتمالاتها للتأكد من ضمان عدم انتهاك القيد. ويمكن تلخيص مشكلة البحث في وجود قيم غير ثابتة ومتذبذبة في بيانات الشركة التي يتم الاعتماد عليها لوضع الخطة الإنتاجية، اذ تتغير هذه القيم بشكل عشوائي مما يؤثر على جودة الحل الأمثل، وبالتالي حدوث خسائر في إيرادات الشركة وتراجع أدائها العام، وبالرغم من حجم الأضرار ألا أن أغلب متخذي القرار يلجئون الى على التنبؤ والحدس في تحديد هذه القيم. ان الهدف من هذا البحث هو اعتماد تطبيق المنهجية الحصينة في البرمجة الخطية عند وجود قيم غير مؤكدة للتخلص من تأثير عدم التأكد في معاملات القيود والحصول على نتائج أمثلية حصينة قابلة للتطبيق في جميع الحالات المتوقعة للقيم غير المؤكدة وضمان تجنب حدوث أي انتهاك في القيد ذات المعلمات غير المؤكدة. وشملت عينة البحث الشركة العامة للزيوت النباتية في العراق كموقع لإجراء البحث نظراً لدور الشركة المهم في دعم الاقتصاد الوطني. وتضم الشركة عدداً من المعامل وهي (معمل المأمون ، معمل الرشيد ، معمل الأمين ، معمل المعتصم) وتنتج انواع مختلفة من الدهون الصلبة و الزيوت السائلة والمنظفات بأنواعها ومستحضرات التجميل. واعتمدت البيانات الخاصة لقسم المنظفات لعام 2019 ، اذ تنتج الشركة المنتجات الرئيسية من المنظفات وهي (المنظف السائل زاهي، المنظف السائل سومر، شبيه فيري ، منعم أقمشة ، مسحوق غسيل سومر ن مسحوق غسيل سومر غسالة) بمختلف الأحجام، ويدخل في صناعة المنتجات (حامض السلفونيك) كمادة اولية اساسية تتوفر في السوق بأربعة انواع حسب المنشأ وهي (الإماراتيي، السعودي، الإيراني، العراقي).

لقد ساهم الباحثان (Ben-Tal, A., & Nemirovski, A.) في تطوير اسلوب الحصانة في الأمثلية، اذ في سنة(1999) قدما حلولًا حصينة للبرامج الخطية غير المؤكدة والتركيز على عدم التأكد المرتبط بالقيود الصعبة(وهي القيود التي يجب تحقيقها أيًا كانت القيمة الحقيقية للبيانات بشرط ان تكون ضمن مجموعة عدم التأكد المحددة) ، وقاما بتعريف النظير الحصين وإيجاد أوجه التشابه بين النظير والبرمجة الحصينة المعتادة في حل مشكلات غير المؤكدة[8] ،وفي عام (2000) قدما حلولًا حصينة لمشاكل البرمجة الخطية الملوثة ببيانات غير مؤكدة، وتوضيحها من خلال دراسة 90 مشكلة من مكتبة NETLIB المعروفة ومدى تأثيرها على نتائج الحل[1] . ومن ثم تم انتشار تطبيق هذا الأسلوب في السنوات اللاحقة. اذ في سنة (2016) قدّم (Wang,Z) وآخرون بحثًا للامثلية الحصينة الاحتمالية واقتُراح إطار جديد حصين للتوزيع لارتفاع أسعار الفائدة، اذ يُحسّن النموذج القيمة الأسوأ للحالة المتوقعة لهدف معين حيث يتم اختيار توزيع الحالة الأسوأ من بين مجموعة التوزيعات، والنموذج المقترح سهل الحل اذ إنه يتجنب الإفراط في المحافظة على النقيض من النماذج الحصينة الأخرى من خلال استبعاد التوزيعات غير المتوقعة مع الحماية من الانحرافات عن البيانات التجريبية. وتبين من النتائج أن الانموذج المقترح يمكن تطبيقه في العديد من الحالات[19]. كما قدَم (Yanıkoğlu, İ.) وآخرون في سنة (2017) نظرة عامة وموجزة عن أحد فروع الامثلية الحصينة وهي طريقة الامثلية الحصينة القابلة للتعديل(ARO) وتقديم الدليل التعليمي وخريطة طريق لإرشاد الباحثين والممارسين حول كيفية تطبيق أساليب (ARO) وكذلك شرح مزايا وقيود الطرق المرتبطة بها ، وتم التوصل الى ان (ARO) تعطي قيمة دالة هدف أفضل من تلك في الامثلية الحصينة الثابتة وأنه يعطي قرارات أكثر مرونة ،بينما أثبت إطار عمل (ARO) أنه غير فعال لمشاكل الامثلية التوافقية (combinatorial optimization problems)، اذ يتطلب بعد كل تكرار بحث محلي اكتشاف الحالة الأسوأ والذي يكلف وقتًا طويلاً، وآخر ما توص اليه الباحثين أن الامثلية الحصينة غير الخطية القابلة للتعديل صعب جدا تطبيقه[20]. بينما قام (Bertsimas, D.) وآخرون في سنة (2018) بتطوير إطار عمل معياري وقابل للتتبع لحل مشكلة

الأمثلية الخطية الحصينة القابلة للتوزيع (Adaptive Distributionally Robust Optimization)،من خلال تقليل الكلفة الأسوأ المتوقعة في مجموعة عدم التأكد من التوزيعات الاحتمالية، واستخدم الباحثون تقنيات قاعدة القرار الخطي (LDR)(linear decision rule techniques) في التقريب للحصول على صياغة قابلة للتتبع، واثبات إمكانات حل مشكلات قرارات الإدارة وتم التوضيح كيفة استخدامها لتسهيل النمذجة والحصول على حلول ذات جودة عالية لمشكلات المواعيد الطبية وإدارة الخزين. وأن أهم ما توصل اليه الباحثون ان منهجية الأمثلية الحصينة القابلة للتكيف تعمل من أجل اتخاذ القرارات الديناميكية ، حيث تتكيف القرارات مع النتائج غير المؤكدة عندما تنكشف على مراحل، وانه من الممكن تحسين الحلول بشكل كبير والحصول على حلول دقيقة[12]. وأيضًا قدَم (Dembélé, A.) وآخرون سنة (2019) تطبيق منهجية الامثلية الحصينة للاستجابة على طلبات طاقات أنظمة مياه الشرب باستخدام الشبكات الذكية في تطوير كفاءة استخدام الطاقة وتقليل حمل الذروة والتكيف مع توليد مرونة الطلب. ثم صياغة مشكلة لدمج مرونة أنظمة المياه في تشغيل نظام الطاقة، في ظل عدم التأكد في الطلب على المياه. وتم التوضيح من خلال النتائج العددية المبنية على أساس نظام مياه حقيقي في فرنسا ،على على أهمية تطبيق النهج الحصين وأهمية الأنموذج فيما يتعلق بإدارة مخاطر الطلب على المياه والأداء الاقتصادي، وانه يتيح تشكيل دالة الهدف تحقق أقصى قدر من الربحية للنظام. ومن ناحية أخرى يتم مراعاة عدم التأكد بشأن الطلب على المياه لضمان تشغيل نظام المياه في الوقت الحقيقي فيما يتعلق بمخاطر الطلب على المياه[18].

2. الجانب النظري:

2-1البرمجة الخطية:

تعرف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي تستخدم في حل المشاكل الكمية التي تتطلب ايجاد القرار المناسب (القرار الأمثل) من بين مجموعة قرارات تسمى (البدائل) سعيًا لتعظيم الربح أو تخفيض الكلفة. وتعد البرمجة الخطية احد الأساليب العلمية الحديثة الأكثر استعمالًا في مجال بحوث العمليات لايجاد افضل قرار من بين القرارات المتاحة التي تتعلق بتوزيع الموارد في ظل حدود الامكانيات المتاحة عن طريق استعمال أسلوب رياضي الغاية منه هو الحصول على حل يحقق اقصى ربح ممكن او تخفيض التكاليف إلى ادنى حد ،إذ يقوم صانع القرار بصياغة مشكلة البحث في شكل نموذج رياضي للبرمجة الخطية (يمثل مجموعة من المعادلات على شكل متباينات مع وجود دالة هدف قابل للحل) والوصول إلى حل يحقق افضل نتيجة ممكنة يسمى الحل الأمثل.وتجدر الإشارة إلى ان كلمة البرمجة (Program) هي التكنيك الرياضي لإيجاد الحل عند استعمال الموارد المتاحة فيما تلاءم القيود المفروضة على تلك الموارد واختيار الأفضل من بين هذه البرامج لتحقيق الهدف ، بينما تعني كلمة خطية (Linear) الى ان العلاقات التي تربط المتغيرات المحددة في المشكلة تكون خطية، أي بمعنى ان تكون استجابة جميع المتغيرات استجابة واحدة متناغمة مع استجابة دالة هدف المشكلة. (Abdulrahman et al,2015) (2010، Al Shammarty)

2-2 أنموذج البرمجة الخطية:

تتمثل المشكلات غالبًا بالتعبير الكلامي المسرود، فيتم تحويلها الى معادلات ومتباينات تعبر عن المشكلة. ويتم بناء الأنموذج الرياضي بإتباع الخطوات الأساسية الآتية:(Al Astal ،2016،ص40)

1. تعريف الكميات التي تتطلب تحديد قيمها المثلى بصورة متغيرات X1,X2,..,Xn.
2. تمثيل هدف المشكلة رياضيًا بشكل دالة الهدف باستخدام المتغيرات.
3. تمثيل الموارد المتاحة بالقيود وبشكل متباينات.
4. إضافة قيد عدم السالبة (أي يجب أن تكون جميع المتغيرات اكبر من الصفر أو على الأقل تساوي صفر).

ويمكن صياغة الأنموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية كالآتي:

$$\text{Maximize (or Minimize)} \quad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$$

subject to:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \leq, =, \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \leq, =, \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \leq, =, \geq b_m \end{aligned} \quad \ldots (1)$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0.$$

حيث ان:

x: يمثل متجه متغيرات القرار

c: معاملات المتغيرات x في دالة الهدف

a: معاملات المتغيرات x في القيود

b: الموارد المتاحة للقيود

n: عدد المتغيرات

m: عدد القيود

3-2 مفهوم عدم التأكد :

تتعدد مسميات عدم التأكد منها عدم اليقين او عدم التحديد أو الشك أو الريبة ألا أنها جميعها تعني أن الإنسان لا يمكنهُ قياس شيء ما بدقة 100% إنما هناك مقدار لا يعرف ولا يستطيع قياسه وأنه لا يمكن التنبؤ به بدقة متناهية مهما تطورت الوسائل في القياس والتقدم العلمي فلن يمَكننا ذلك من التوصل إلى معرفة كاملة للطبيعة من حولنا، بل تظل هناك نسبة ولو صغيرة من عدم التأكد، وأننا لا نستطيع أكثر من أن تكون لدينا تنبؤات إحصائية فقط للمستقبل. وقد وصف العالم الفيزيائي هايزنبرج مبدأ عدم التأكد عندما قال "إن عدم استطاعتنا معرفة المستقبل لا تنبع من عدم معرفتنا بالحاضر، وإنما بسبب عدم استطاعتنا معرفة الحاضر". (1991,Mandelstam & Tamm)

4-2 عدم التأكد في البرمجة الخطية:

تعني أن بيانات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية يحتوي على معلمات غير ثابتة (تمثل معاملات دالة الهدف أو معاملات القيود أو قيم الجانب الأيمن من القيود) إذ تخضع هذه المعلمات لتغيرات عشوائية ومتذبذبة حول القيم الاسمية (القيم التي يتم تحديدها لبناء الأنموذج الرياضي للبرمجة الخطية)، ولأن احد أهم الفرضيات الرئيسية في بناء الأنموذج الرياضي في البرمجة الخطية هي التأكد التام وتحديد معلمات ثابتة، يتم تقدير هذا النوع من البيانات وتخمينها من قِبل المختصين وبالاعتماد على الخبرات السابقة لهم والتجارب الشخصية مثل تحديد كميات الطلب على منتج معين أو المادة الفعالة للمواد الأولية الداخلة في صناعة المنتج وغيرها من المعلومات المهمة في اختيار خطة مثلى للمشكلة. ولكشف تأثير هذه التغيرات على الحل الأمثل للنموذج يتم استعمال تقنية (تحليل الحساسية) لغرض تحديد المعلمات التي عند تغيير قيمتها تؤثر على الحل الأمثل وقيمة دالة الهدف وتسمى(المعلمات الحساسة) أو إذا كان بالإمكان أن تأخذ قيمًا أخرى. تُعتبر هذه التقنية مجرد أداة اختبار لا يمكنها أن تقدم حلول توضح كيفية معالجة تلك المشكلات. (2015,Hillier)

5-2 مفهوم تحليل الحساسية:

يعتبر الحل الامثل في البرمجة الخطية مثالياً فقط فيما يتعلق بالأنموذج المحدد المستخدم في تمثيل المشكلة، لكن في الواقع قد تكون المعلمات المستخدمة في الأنموذج مبنية على تقدير لتنبؤات مستقبلية، او قد تكون هذه المعلمات غير ثابتة مع الزمن مثل كلف المواد الأولية المستعملة في الإنتاج، أو عند زيادة أو نقصان تلك المواد في السوق، أو تغيير مواصفات المنتج وغيرها من الممكن ان تؤثر على العملية الإنتاجية. لذلك وجدت حاجة لإجراء تحليل الحساسية، والتي تُعرف على انها "دراسة تأثير التغيرات في مكونات المشكلة على أنموذج البرمجة الخطية"' اذ يساعد هذا الاختبار على معرفة مدى تأثير تغيرات المعلمات على الحل الامثل وهل يمكن ان تأخذ هذه المعلمات قيماً اخرى لا تؤثر على الأمثلية، اذ يمكن الحصول على الحل الامثل دون اعادة

خطوات المسألة وحلها من البداية. ان الغرض الرئيسي من تحليل الحساسية هو تحديد المعلمات الحساسة (أي المعلمات التي لا يمكن تغيير قيمها دون تغيير الحل الأمثل). (Hillier,2015) (Abdulrahman et al ,2015)

6-2 مفهوم الأمثلية الحصينة:

غالبًا ما تكون مشكلات الأمثلية تحتوي على بيانات غير مؤكدة، يمكن أن تؤدي أسباب عدم التأكد في البيانات إلى أخطاء القياس أو التقديرات التي تنجم عن الافتقار إلى المعرفة بمعلمات الأنموذج الرياضي مثال على ذلك الطلب غير المؤكد في نماذج الخزين أو أخطاء ناتجة في التنفيذ وغيرها. اذ ان هناك طريقتان للتعامل مع حالة عدم التأكد في بيانات الأمثلية ، وهي الأمثلية الحصينة والأمثلية العشوائية. اذ ان الأمثلية العشوائية (SO) تفترض أن التوزيع الاحتمالي الحقيقي للبيانات غير المؤكدة يجب أن يكون معروفًا أو مقدّرًا. بينما الأمثلية الحصينة (RO) لا تتطلب التوزيع الاحتمالي ولكن بدلاً من ذلك تفترض أن البيانات غير المؤكدة تنتمي الى مجموعة عدم التأكد. بالإضافة إلى ذلك لا يمكن السماح لأي انتهاك في القيد عندما تكون القيمة ضمن مجموعة عدم التأكد. (D. Bertsimas et al,2019)

7-2 البرمجة الخطية الحصينة :

يتم استعمال المنهجية الحصينة في البرمجة الخطية لمعالجة التغيرات في معلمات الأنموذج الرياضي الخطي وتم تصميمها بشكل خاص للتعامل مع المشكلات ذات القيود الصلبة (وهي القيود التي لا يمكن انتهاكها ولو بمقدار بسيط دون أن تؤثر بشكل كبير على قيمة دالة الهدف أو حتى يمكن أن تجعل الحل الأمثل غير ممكن). وتعتمد هذه المنهجية على افتراض ان القيمة غير المؤكدة توجد ضمن مجموعة معينة تسمى مجموعة عدم التأكد والتي يرمز لها بالرمز U التي تشمل نطاق لجميع الاحتمالات الممكن توقعها في القيم غير المؤكدة، ومن ثم تخصيص القيمة الأسوأ من بين جميع تلك القيم (القيمة الأسوأ لا تكون بالضرورة هي القيمة الأدنى أو القصوى بشكل عام، بل تمثل القيمة التي تسبب أكثر انتهاك للقيد) ويتم بناء الأنموذج الرياضي الحصين بالاعتماد على تلك القيم والحصول على الحل الأمثل الحصين الذي لا يسمح بانتهاك القيود حتى عندما تأخذ القيم غير المؤكدة جميع حالاتها (ضمن مجموعة عدم التأكد). (D. Bertsimas et al,2017) (D. Bertsimas et al,2018)

8-2 فرضيات البرمجة الخطية الحصينة:

ان البرمجة الخطية الحصينة تشمل عدة فرضيات أساسية يمكن سرد أبرزها على شكل نقاط وكالآتي: (Ben-Tal et al ،2009)

1. تمثل جميع متغيرات القرار x قرارات في الوقت الحاضر أي يجب أن نحصل على قيم عددية محددة للقيم غير المؤكدة للمشكلة كنتيجة للحل قبل أن نكتشف قيمة البيانات الفعلية.
2. ان صانع القرار عليه المسؤولية الكاملة عن عواقب القرارات التي يتعين اتخاذها، عندما تكون القيمة الحقيقية تقع ضمن مجموعة عدم التأكد التي تم تحديدها مسبقًا من قبل المختصين.
3. تكون القيود المفروضة على المشكلة غير المؤكدة قيود صلبة " hard constraint" أي أن صانع القرار لا يمكنه تحمل انتهاكات القيود عندما تكون القيم في مجموعة عدم اليقين المحددة (U).

بالاضافة الى ان هنالك افتراضات اساسية للمتغيرات المستقلة وكالآتي: (Hillier,2015)

1. ان كل معلمة غير مؤكدة تنتمي الى مجموعة قيم (مجموعة عدم التأكد U) والتي تحيط بالقيمة المقدرة لها.
2. يمكن لهذه المعلمة أن تأخذ أي قيمة بين الحد الأدنى والحد الأقصى المحدد في هذا النطاق من عدم التأكد.
3. ان قيمة هذه المعلمة لا تتأثر بالقيم التي تتخذها المعلمات الأخرى.
4. تكون جميع قيود المشكلة على شكل أكبر أو يساوي(≥) أو أصغر أو يساوي (≤) وليس قيد مساواة.

الأنموذج الرياضي

تكون الصيغة العامة للأنموذج الرياضي للبرمجة الخطية غير المؤكدة كالآتي:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize (or Minimize)} \quad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \\ &\text{subject to:} \\ &\quad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \leq, \geq b_1 \\ &\quad a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \leq, \geq b_2 \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \leq, \geq b_m \\ &X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0; \quad (c, a, b) \in U \end{aligned} \qquad \ldots(2)$$

حيث ان:
U: هي مجموعة معينة من عدم التأكد لكل معلمة غير مؤكدة
وان القيمة الحقيقية للمعلمة تقع ضمن المجموعة المحددة لعدم التأكد ويتم حسابها كما في المعادلة الآتية:

$$U_{aij} = [(1 + Є) ãij , (1 - Є) ãij] \ldots\ldots(3)$$

$$i=1,2,\ldots,n \quad ; \quad j=1,2,\ldots,m.$$

حيث ان:
a:تمثل القيمة الحقيقية للمعلمة غير المؤكدة
ã: تمثل القيمة المقدرة للمعلمة
وان Є>0 هي مستوى معين من عدم التأكد للمعلمة (انحرافها عن القيمة الحقيقية)
وان القيمة العشوائية للمعلمة غير المؤكدة يتم حسابها كما في المعادلة الآتية:(Ben-Tal &Nemirovski,2000)

$$a_{ij}=[(1 + Є \, ξ_{ij}) \, ã_{ij}].....(4)$$

حيث ان ξ هي القيم العشوائية تقع بين [1,-1].

9-2 حل الأنموذج الرياضي:

من بعدما يتم حساب مجموعة عدم التأكد (U) يتم تخصيص أسوء قيمة محتملة من بين كل الاحتمالات داخل مجموعة عدم التأكد، وتمثل القيم التي تسبب اكبر انتهاك للقيد ليتم بناء أنموذج حصين للبرمجة الخطية لضمان بقاء الحل ممكنًا بغض النظر عن القيم التي تتخذها هذه المعلمات ضمن نطاق عدم التأكد الخاص بها.
والمحاور الآتية توضح آلية تخصيص القيمة الأسوأ لكل معلمة غير مؤكدة:(Hillier,2015)

- لكل قيد على شكل اصغر أو يساوي (≤) في الأنموذج، يتم تخصيص القيمة القصوى لكل معاملات المتغيرات (aij)، وتخصيص الحد الأدنى لقيمة الجانب الأيمن من القيد (bi).
- لكل قيد على شكل أكبر أو يساوي (≥) في الأنموذج، يتم تخصيص القيمة الأدنى لكل معاملات المتغيرات (aij)، وتخصيص الحد القصوى لقيمة الجانب الأيمن من القيد (bi).
- أذا كانت معاملات دالة الهدف غير مؤكدة ومن نوع تعظيم الأرباح ، يتم تخصيص الحد الأدنى لكل معامل (cj).
- أذا كانت معاملات دالة الهدف غير مؤكدة ومن نوع تصغير، يتم تخصيص الحد الأقصى لكل معامل (cj).

وبعد بناء النموذج الخطي الحصين يتم الحصول على النتائج باستعمال الطرق الرياضية الاعتيادية لحل مشكلة البرمجة الخطية.

3. الجانب التطبيقي:

تم تقسيم هذا الجانب الى مرحلتين رئيسيين ،في المرحلة الأولى تم إنشاء الأنموذج الرياضي للبرمجة الخطية وحلهُ بإهمال عدم التأكد في معلمات احد القيود للانموذج الخطي والحصول على النتائج لتحديد الكميات المثلى لإنتاج المنظفات، اما في الحالة الأخرى تم معالجة مشكلة عدم التأكد وبناء انموذج خطي حصين والحصول على نتائج الامثلية الحصينة.

1-3 وصف البيانات:

من اجل بناء الأنموذج الرياضي للبرمجة الخطية لابد أن نتعرف على البيانات اللازمة من بعد ما تم تحديد المزيج الإنتاجي وتعريف المتغيرات، اذ ان بيانات الشركة لسنة 2019م تشمل (الأرباح لكل وحدة انتاجية، كلفة الوحدة الواحدة من المنتج لتصنيعها وكلفة المادة الأولية الأساسية (حامض السلفونيك)، وكميات المواد الأولية التي تدخل في صناعة المنتج والكميات المتوفرة منها، وأيضًا الطلب على المنتجات، بالإضافة الى جودة المادة الأولية حامض السلفونيك إذ تعتمد على كمية الشوائب في المادة)،)، وفيما يأتي توضيح لهذه البيانات:

الجدول(1) يوضح التكاليف الكلية وصافي الأرباح واسعار البيع بالدينار العراقي

الـمنتـجات	رمز المنتج	وحدة القياس	التكاليف الكلية	سعر البيع	صافي الربح
زاهي (3 لتر)	x_1	طن	1,175,584	1,350,000	174,416
زاهي (2 لتر)	x_2	طن	1,175,584	1,350,000	174,416
زاهي (850 مل)	x_3	طن	1,175,584	1,350,000	174,416
زاهي (فل)	x_4	طن	1,175,584	1,350,000	174,416
زاهي(20 لتر)	x_5	طن	1,175,584	1,350,000	174,416
زاهي (5 لتر)	x_6	طن	1,175,584	1,350,000	174,416
شبيه برسيل	x_7	طن	1,175,640	1,350,058	174,418
شبيه فيري	x_8	طن	1,175,693	1,350,200	174,507
سومر (20 كغم)	x_9	طن	1,727,782	1,868,505	140,723
سومر (850 غم)	x_{10}	طن	1,727,782	1,868,505	140,723
سومر (430 غم)	x_{11}	طن	1,727,782	1,868,505	140,723
سومر غسالة	x_{12}	طن	1,737,910	1,887,810	149,900
منعم أقمشة	x_{13}	طن	1,376,866	1,533,534	156,668

(المصدر) من اعداد الطالب بالاعتماد على سجلات قسم التخطيط وقسم التكاليف

أما الجدول (2) فيوضح كلفة شراء المادة الأولية الأساسية (حامض السلفونيك):

الجدول (2) تكلفة شراء مادة حامض السلفونيك بالدينار العراقي

مادة حامض السلفونيك	رمز المادة	وحدة القياس	تكلفة سعر الشراء
العراقي	y_1	**طن**	**1,973,500**
الإماراتي	y_2	**طن**	**2,050,000**
الإيراني	y_3	**طن**	**2,009,205**
السعودي	y_4	**طن**	**2,029,500**

(المصدر) من إعداد الطالب بالاعتماد على معلومات قسم التسويق

ومن أجل تحديد كميات الإنتاج للشركة لابد من الحصول على كميات الطب المتوقعة على تلك المنتجات:

الجدول (3) يوضح حجم الطلب على كل منتج

الـمنتـجات	وحدة القياس	حجم الطلب
زاهي (3 لتر)	**طن**	**190**
زاهي (2 لتر)	**طن**	**520**
زاهي (850 مل)	**طن**	**240**
زاهي (فل)	**طن**	**8.5**
زاهي(20 لتر)	**طن**	**16**
زاهي (5 لتر)	**طن**	**19.5**
شبيه برسيل	**طن**	**5**
شبيه فيري	**طن**	**32**
سومر (20 كغم)	**طن**	**46**
سومر (850 غم)	**طن**	**87**
سومر (430 غم)	**طن**	**107**
سومر غسالة	**طن**	**49**
منعم أقمشة	**طن**	**16**

(المصدر) من إعداد الطالب اعتمادًا على سجلات قسم التخطيط

والجدول(4) يبين الكميات المطلوبة من حامض السلفونيك لصناعة الطن الواحد من المنتجات

المنتجات	وحدة القياس	كميات مادة حامض السلفونيك
زاهي (كافة الاحجام)	كغم	63.7
شبيه برسيل	كغم	90
شبيه فيري	كغم	70.7
سومر (كافة الاحجام)	كغم	96
سومر غسالة	كغم	65
منعم أقمشة	كغم	3

(المصدر) من إعداد الطالب بالاعتماد على سجلات قسم التخطيط والبحث والتطوير

- حساب فاعلية حامض السلفونيك

تعد مادة (حامض السلفونيك) من أهم المكونات الداخلة في تركيبة المنظفات ويعطي مادة منظفة ومطهرة اذ تتكون من مادتين أساسيتين وهي (الكبريت والكيل البنزين)، قد تتضمن هذا الحامض نسبة من الشوائب (نسبة MD OM في الحامض) وتؤثر زيادة هذه الشوائب على جودة وفعالية الحامض وتختلف هذه النسب من منشأ الى آخر، وبعد التداول مع المهندسين المختصين في الشركة تم تقدير هذه النسب لكل منشأ اعتمادًا على خبراتهم المتراكمة، بالاضافة الى تقدير عدم التأكد من هذه النسب (مقدار انحراف هذه النسب عن القيم الفعلية)

الجدول(5) يوضح تقدير نسبة الشوائب ومقدار الانحراف عن قيمتها الحقيقية وحساب مقدار تركيز المادة في كل طن

نوع مادة الحامض	نسبة MD OM	نسبة تركيز الحامض 100%-(نسبة الشوائب)	مقدار التركيز لكل طن 1000*نسبة التركيز	مقدار الانحراف
العراقي	7%	93%	930	3.5%
الإماراتي	2.5%	97.5%	975	2%
الإيراني	4.5%	95.5%	955	3%
السعودي	3%	97%	970	2.8%

(المصدر) من إعداد الطالب بالاعتماد على تقديرات مختصين الشركة

- سعة المخزن:

يتطلب معرفة السعة المخزنية للشركة لتحديد اقصى حد ممكن لشراء المادة الأساسية (مادة حامض السلفونيك) ، وتبلغ 4000000 طن .

2-3 بناء الأنموذج الرياضي:

من بعد ما تم الحصول على المعلومات الخاصة بالشركة يتم صياغة الأنموذج الرياضي للبرمجة الخطية استنادًا للمعادلة (1)، وأدناه يبين آلية بناء الأنموذج الرياضي للبرمجة الخطية وتوضيح معادلات الأنموذج :

- المعادلة (1)الآتية تمثل دالة الهدف ، تم تحديدها من نوع التعظيم (تعظيم أرباح الشركة نسبة إلى التكاليف)، اذ يتم زيادة الأرباح بتحديد ربح الطن الواحد لكل منتج (X)، وطرح تكاليف شراء الطن الواحد من المادة الأساسية(حامض السلفونيك) والتي يرمز لها بالمتغير (Y):

$$\text{Maximize } Z(x)= 174416\ x_1 +174416\ x_2 + 174416\ x_3 + 174416\ x_4 + 174416\ x_5 + 174416\ x_6 + 1745418\ x_7 + 174507\ x_8 + 140{,}723\ x_9 + 140{,}723\ x_{10} + 140{,}723\ x_{11} +14990\ x_{12} + 156668\ x_{13} - (1973500\ y_1 + 2050000\ y_2 + 2009200\ y_3 + 2029500\ y_4) \ldots(1)$$

- المعادلات (2-14) تمثل قيود الطلب على كل منتج من المنتجات :

$$1\ x_1 \geq 109 \ldots(2)$$
$$1\ x_2 \geq 520 \ldots (3)$$
$$1\ x_3 \geq 240 \ldots(4)$$
$$1\ x_4 \geq 8.5 \ldots(5)$$
$$1\ x_5 \geq 16 \ldots(6)$$

$1\ x_6 \geq 19.5$ …(7)
$1\ x_7 \geq 5$…(8)
$1\ x_8 \geq 32$…(9)
$1\ x_9 \geq 46$…(10)
$1\ x_{10} \geq 87$…(11)
$1\ x_{11} \geq 107$…(12)
$1\ x_{12} \geq 49$…(13)
$1\ x_{13} \geq 16$…(14)

- المعادلة (15) تمثل قيد السعة المخزنية المتاحة لحفظ المادة الأولية (حامض السلفونيك):

$1\ y_1 + 1\ y_2 + 1\ y_3 + 1\ y_4 \leq 4000000$ … (15)

- وتمثل معادلة (16)، قيد توازن مادة حامض السلفونيك وتمثل التوازن بين الكمية المطلوبة لصناعة الطن الواحد من المنتجات وبين تركيز الحامض في كل طن (لغرض تحديد الكمية المطلوبة لشراء مادة حامض السلفونيك وتحديد المنتج الأفضل منه حسب المنشأ بالاعتماد على تكلفة وتركيز الحامض):

$-(63.7\ x_1 + 63.7\ x_2 + 63.7\ x_3 + 63.7\ x_4 + 63.7\ x_5 + 63.7\ x_6 + 90\ x_7 + 70.7\ x_8 + 96\ x_9 + 96\ x_{10} + 96\ x_{11} + 65\ x_{12} + 3\ x_{13}) + 930\ y_1 + 975\ y_2 + 955\ y_3 + 970\ y_4 \geq 0$ …(16)

- تشمل المعادلات (17-33) قيود المواد الأولية، وتمثل قيم الجانب الأيسر من القيود الكميات المطلوبة (بالكيلوغرام) لصناعة كل طن واحد من المنتجات، بينما الجانب الأيسر من هذه القيود تمثل المواد الأولية المتاحة في الشركة:

$x11 + 100\ x12 \leq 1800000$ … (17)
$30\ x_8 + 10\ x_9 + 10\ x_{10} + 10\ x_{11} + 7.5\ x_{13} \leq 840000$ … (18)
$280\ x_9 + 280\ x_{10} + 280\ x_{11} \leq 21600000$ … (19)
$140\ x_9 + 140\ x_{10} + 140\ x_{11} \leq 1263000$ … (20)
$40\ x_9 + 40\ x_{10} + 40\ x_{11} \leq 30000000$ … (21)
$140\ x12 \leq 12300000$ … (22)
$0.5\ x_7 + 0.4\ x_9 + 0.4\ x_{10} + 0.4\ x_{11} \leq 160000$ … (23)
$5\ x_1 + 5\ x_2 + 5\ x_3 + 5\ x_4 + 5\ x_5 + 5\ x_6 + 2.5\ x_8 \leq 1500000$ … (24)
$2\ x_1 + 2\ x_2 + 2\ x_3 + 2\ x_4 + 2\ x_5 + 2\ x_6 + 10\ x_8 + 20\ x_{13} \leq 240000$ … (25)
$15\ x_7 \leq 180000$ … (26)
$154\ x_{13} \leq 15000$ … (27)
$17.5\ x_1 + 17.5\ x_2 + 17.5\ x_3 + 17.5\ x_4 + 17.5\ x_5 + 17.5\ x_6 + 125\ x_7 + 160\ x_8 \leq 1740000$ …(28)
$15\ x_7 \leq 210000$ … (29)
$10\ x_{13} \leq 84000$ … (30)
$30\ x_{13} \leq 25450$ … (31)
$3.5\ x_1 + 3.5\ x_2 + 3.5\ x_3 + 3.5\ x_4 + 3.5\ x_5 + 3.5\ x_6 + 14\ x_{12} \leq 64457$ … (32)
$4.6\ x_{12} + 24\ x_{13} \leq 67700$ … (33)

- المعادلة (34) تمثل قيد عدم السالبية:

$x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13,y1,y2,y3,y4 \geq 0$ … (34)

وعليهِ سيكون الأنموذج الرياضي للبرمجة الخطية بالشكل الآتي:

Maximize $Z(x) = 174416\ x_1 + 174416\ x_2 + 174416\ x_3 + 174416\ x_4 + 174416\ x_5 + 174416\ x_6 + 1745418\ x_7 + 174507\ x_8 + 140{,}723\ x_9 + 140{,}723\ x_{10} + 140{,}723\ x_{11} + 14990\ x_{12} + 156668\ x_{13} - (1973500\ y_1 + 2050000\ y_2 + 2009200\ y_3 + 2029500\ y_4)$…(1)

Subject to:

$1\ x_1 \geq 109$ …(2)
$1\ x_2 \geq 520$ … (3)
$1\ x_3 \geq 240$ …(4)

$1\ x_4 \geq 8.5$ …(5)
$1\ x_5 \geq 16$ …(6)
$1\ x_6 \geq 19.5$ …(7)
$1\ x_7 \geq 5$…(8)
$1\ x_8 \geq 32$…(9)
$1\ x_9 \geq 46$…(10)
$1\ x_{10} \geq 87$…(11)
$1\ x_{11} \geq 107$…(12)
$1\ x_{12} \geq 49$…(13)
$1\ x_{13} \geq 16$…(14)

$1\ y_1 + 1\ y_2 + 1\ y_3 + 1\ y_4 \leq 4000000$ … (15)
$-(63.7\ x_1 + 63.7\ x_2 + 63.7\ x_3 + 63.7\ x_4 + 63.7\ x_5 + 63.7\ x_6 + 90\ x_7 + 70.7\ x_8 + 96\ x_9 + 96\ x_{10} + 96\ x_{11} + 65\ x_{12} + 3\ x_{13}) + 930\ y_1 + 975\ y_2 + 955\ y_3 + 970\ y_4 \geq 0$ …(16)
$x11 + 100\ x12 \leq 1800000$ … (17)
$30\ x_8 + 10\ x_9 + 10\ x_{10} + 10\ x_{11} + 7.5\ x_{13} \leq 840000$ … (18)
$280\ x_9 + 280\ x_{10} + 280\ x_{11} \leq 21600000$ … (19)
$140\ x_9 + 140\ x_{10} + 140\ x_{11} \leq 1263000$ … (20)
$40\ x_9 + 40\ x_{10} + 40\ x_{11} \leq 30000000$ … (21)
$140\ x12 \leq 12300000$ … (22)
$0.5\ x_7 + 0.4\ x_9 + 0.4\ x_{10} + 0.4\ x_{11} \leq 160000$ … (23)
$5\ x_1 + 5\ x_2 + 5\ x_3 + 5\ x_4 + 5\ x_5 + 5\ x_6 + 2.5\ x_8 \leq 1500000$ … (24)
$2\ x_1 + 2\ x_2 + 2\ x_3 + 2\ x_4 + 2\ x_5 + 2\ x_6 + 10\ x_8 + 20\ x_{13} \leq 240000$ … (25)
$15\ x_7 \leq 180000$ … (26)
$154\ x_{13} \leq 15000$ … (27)
$17.5\ x_1 + 17.5\ x_2 + 17.5\ x_3 + 17.5\ x_4 + 17.5\ x_5 + 17.5\ x_6 + 125\ x_7 + 160\ x_8 \leq 1740000$ …(28)
$15\ x_7 \leq 210000$ … (29)
$10\ x_{13} \leq 84000$ … (30)
$30\ x_{13} \leq 25450$ … (31)
$3.5\ x_1 + 3.5\ x_2 + 3.5\ x_3 + 3.5\ x_4 + 3.5\ x_5 + 3.5\ x_6 + 14\ x_{12} \leq 64457$ … (32)
$4.6\ x_{12} + 24\ x_{13} \leq 67700$ … (33)
$x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13,y1,y2,y3,y4 \geq 0$ … (34)

3-3 **حل الأنموذج الرياضي الخطي**:

تم حل الأنموذج الخطي الموضح في المبحث الأول من هذا الفصل (المعادلات 1-34) بإتباع أسلوب (M الكبرى)، واستعمال البرنامج الجاهز WINQSB للمساعدة في حل الأنموذج بعدما تم إدخال بيانات المشكلة للبرنامج والحصول على النتائج الجاهزة كما في الجدول الرئيسي الأول (6) والخاص بقيمة دالة الهدف المثلى والتفاصيل التي تخص متغيرات القرار، وكالآتي:

الجدول (6) يوضح نتائج الحل الأمثل الخاص بدالة هدف الأنموذج للمشكلة

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	5,685.5040	174,416.0000	991,642,900.0000	0	basic	174,416.0000	235,358.7000
2	X2	520.0000	174,416.0000	90,696,320.0000	0	basic	-M	174,416.0000
3	X3	240.0000	174,416.0000	41,859,840.0000	0	basic	-M	174,416.0000
4	X4	8.5000	174,416.0000	1,482,536.0000	0	basic	-M	174,416.0000
5	X5	16.0000	174,416.0000	2,790,656.0000	0	basic	-M	174,416.0000
6	X6	19.5000	174,416.0000	3,401,112.0000	0	basic	-M	174,416.0000
7	X7	5.0000	174,418.0000	872,090.0000	0	basic	-M	211,314.3000
8	X8	10,161.3000	174,507.0000	1,773,219,000.0000	0	basic	158,636.5000	286,948.5000
9	X9	46.0000	140,723.0000	6,473,258.0000	0	basic	-M	235,700.5000
10	X10	87.0000	140,723.0000	12,242,900.0000	0	basic	-M	235,700.5000
11	X11	107.0000	140,723.0000	15,057,360.0000	0	basic	-M	235,700.5000
12	X12	49.0000	149,900.0000	7,345,100.0000	0	basic	-M	156,493.2000
13	X13	97.4026	156,668.0000	15,259,870.0000	0	basic	6,276.7970	M
14	y1	0	-1,973,500.0000	0	-27,690.7200	at bound	-M	-1,945,809.0000
15	y2	0	-2,050,000.0000	0	-10,038.6600	at bound	-M	-2,039,961.0000
16	y3	0	-2,009,200.0000	0	-11,084.0200	at bound	-M	-1,998,116.0000
17	y4	1,194.5910	-2,029,500.0000	-2,424,422,000.0000	0	basic	-2,039,487.0000	-1,846,754.0000
	Objective	Function	(Max.) =	537,921,100.0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)

4-3 **تفسير النتائج**:

من خلال الجدول (6) اعلاه يشير الصف الأخير ان قيمة دالة الهدف هي 537,921,100 وهذا يعني ان صافي الارباح التي يمكن تحقيقها هي 537,921,100 دينار عند تطبيق خطة الانتاج المثالية للشركة، ويمكن تفسير باقي معلومات الجدول (6) المهمة كما يلي:

- **العمود الثالث(Solution Value): يبين القرار الأمثل (القيم المثلى لمتغيرات القرار) في صنع المنتجات (Xi) وكالآتي:**

الكميات المثلى لإنتاج زاهي (3 لتر) هي 5,685.504
الكميات المثلى لإنتاج زاهي (2 لتر) هي 520
الكمية المثلى لإنتاج زاهي (850 مل) هي) 240 طن)
الكمية المثلى لإنتاج زاهي (فل) هي (8.5 طن)
الكمية المثلى لإنتاج زاهي (20 لتر) هي (16 طن)
الكمية المثلى لإنتاج زاهي (5 لتر) هي (19.5 طن)
الكمية المثلى لإنتاج زاهي شبيه برسيل هي (5 طن)
الكمية المثلى لإنتاج زاهي شبه فيري هي (10,161.3 طن)
الكمية المثلى لإنتاج مسحوق غسيل سومر (20 كغم) هي (46 طن)
الكمية المثلى لإنتاج مسحوق غسيل سومر (850 غم) هي (87 طن)
الكمية المثلى لإنتاج مسحوق غسيل سومر (430 غم) هي (107 طن)
الكمية المثلى لإنتاج مسحوق غسيل سومر غسالة هي (49 طن)
الكمية المثلى لإنتاج منعم أقمشة هي (97.4026 طن)

وان القرار الأمثل لشراء مادة حامض السلفونيك هي:

الكمية المثلى لشراء حاض السلفونيك عراقي المنشأ هي عدم شراءه (0 طن)
الكمية المثلى لشراء حاض السلفونيك إماراتي المنشأ هي عدم شراءه (0 طن)
الكمية المثلى لشراء حاض السلفونيك إيراني المنشأ هي عدم شراءه (0 طن)
الكمية المثلى لشراء حاض السلفونيك سعودي المنشأ هي (1,194.591 طن)

- العمود السادس (Reduced Cost) : يبين العمود السادس مقدار الزيادة المطلوبة في أرباح متغيرات القرار غير الأساسية لجعلها متغيرات أساسية، ومن الجدول يتبين ان:

المتغير (1y) يتطلب زيادة ارباحه(تقليل كلفته) على الأقل 27,690.72 دينار ليتمكن من جعله متغيرًا أساسيًا في جدول الحل دون التأثير على أمثلية الحل (الاشارة السالبة تعني ان لو تم شراء هذه المادة سيتم تقليل اجمالي الربح من دالة الهدف بمقدار
27,690.72 لكل طن).

المتغير (2y) يتطلب زيادة ارباحه(تقليل كلفته) على الأقل 10,038.66 دينار ليتمكن من جعله متغيرًا أساسيًا في جدول الحل دون التأثير على أمثلية الحل.

المتغير (3y) يتطلب زيادة ارباحه(تقليل كلفته) على الأقل 11,084.02 دينار ليتمكن من جعله متغيرًا أساسيًا في جدول الحل دون التأثير على أمثلية الحل.

- العمود الثامن ((Allowable Min. C(j)) : ويمثل الحد الأدنى لقيم معاملات متغيرات دالة الهدف المسموح فيها ويبقى الحل أمثل، وكما يلي:

الحد الأدنى المسموح به لقيمة المتغير 1x هي 174,416 دينار

الحد الأدنى المسموح به لقيمة كل من المتغيرات (x2, x3, x4, x5, x6, x7, x9, x10, x12, y14, y15, 16y) هي –M (أي يمكن ان تصل الى ما لا نهاية من القيم السالبة)

الحد الأدنى المسموح به لقيمة المتغير 8x هو 158,636.5 دينار

الحد الأدنى المسموح به لقيمة المتغير 13x هو 6,276.797 دينار

الحد الأدنى المسموح به لقيمة المتغير 4y هو -2,039,487 دينار

- العمود التاسع ((Allowable Min. C(j)) : يمثل هذا العمود الحد الأعلى لقيم معاملات متغيرات دالة الهدف المسموح فيها ويبقى الحل أمثل، كما يلي:

الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير 1x هو 235,358.7 دينار

الحد الأعلى المسموح به لقيمة كل من المتغيرات (6x2,x3,x4,x5,x) هو 174,416 دينار

الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير 7x هو 211,314.3 دينار

الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير 8x هو 286,948.5 دينار

الحد الأعلى المسموح به لقيمة كل من المتغيرات (11x9,x10,x) هو 235,700.5 دينار

الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير 12x هو 156,493.2 دينار

الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير 13x هو M وتعني (أي يمكن ان تصل الى ما لا نهاية من القيم الموجبة)

الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير 1y هو -1,945,809 دينار

الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير 2y هو -2,039,961 دينار

الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير3y هو -1,998,116 دينار

الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير 4y هو -1,846,754 دينار

يتم الاستفادة من الأعمدة (الثامن والتاسع) في تحليل الحساسية فيما لو تغيرت قيم معاملات دالة الهدف (cj)، اذ تُبين هذه القيم الحد الأدنى والأعلى المسموح فيها لتغير تلك القيم ويبقى جدول الحل امثلًا، اما لو تجاوزت هذه الحدود فيتطلب تعديل الحل الحالي وادخال متغير آخر الى جدول الحل وايجاد حل أمثل جديد.

الجدول (7) يمثل الحل الأمثل الرئيسي الثاني يوضح التفاصيل المتعلقة في تحليل الحساسية عند تغيير في القيم الخاصة بالقيود وحساب تأثيرها:

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	5.685.5040	>=	109.0000	5.576.5040	0	-M	5.685.5040
2	C2	520.0000	>=	520.0000	0	0	0	6.096.5040
3	C3	240.0000	>=	240.0000	0	0	0	5.816.5040
4	C4	8.5000	>=	8.5000	0	0	0	5.585.0040
5	C5	16.0000	>=	16.0000	0	0	0	5.592.5040
6	C6	19.5000	>=	19.5000	0	0	0	5.596.0040
7	C7	5.0000	>=	5.0000	0	-36.896.3200	0	12.000.0000
8	C8	10.161.3000	>=	32.0000	10.129.3000	0	-M	10.161.3000
9	C9	46.0000	>=	46.0000	0	-94.977.4700	0	6.164.7780
10	C10	87.0000	>=	87.0000	0	-94.977.4700	0	6.205.7780
11	C11	107.0000	>=	107.0000	0	-94.977.4700	0	6.225.7780
12	C12	49.0000	>=	49.0000	0	-6.593.1500	0	3.435.5850
13	C13	97.4026	>=	16.0000	81.4026	0	-M	97.4026
14	C14	1.194.5910	<=	4.000.000.0000	3.998.806.0000	0	1.194.5000	M
15	C15	-0.0161	>=	0	0	-2.092.2680	-1.158.753.0000	3.878.841.000.0000
16	C16	1.800.000.0000	<=	1.800.000.0000	0	204.9573	759.807.8000	3.988.157.0000
17	C17	307.969.7000	<=	840.000.0000	532.030.4000	0	307.969.6000	M
18	C18	67.200.0000	<=	21.600.000.0000	21.532.800.0000	0	67.200.0000	M
19	C19	33.600.0000	<=	1.263.000.0000	1.229.400.0000	0	33.600.0000	M
20	C20	9.600.0000	<=	30.000.000.0000	29.990.400.0000	0	9.600.0000	M
21	C21	6.860.0000	<=	12.300.000.0000	12.293.140.0000	0	6.860.0000	M
22	C22	98.5000	<=	160.000.0000	159.901.5000	0	98.5000	M
23	C23	57.850.7800	<=	1.500.000.0000	1.442.149.0000	0	57.850.7500	M
24	C24	116.540.1000	<=	240.000.0000	123.459.9000	0	116.540.1000	M
25	C25	75.0000	<=	180.000.0000	179.925.0000	0	75.0000	M
26	C26	15.000.0000	<=	15.000.0000	0	976.5662	2.464.0000	130.643.3000
27	C27	1.740.000.0000	<=	1.740.000.0000	0	102.0987	165.473.5000	3.764.539.0000
28	C28	75.0000	<=	210.000.0000	209.925.0000	0	75.0000	M
29	C29	974.0259	<=	84.000.0000	83.025.9800	0	974.0234	M
30	C30	2.922.0780	<=	25.450.0000	22.527.9200	0	2.922.0780	M
31	C31	23.399.2600	<=	64.457.0000	41.057.7300	0	23.399.2700	M
32	C32	2.651.2620	<=	67.700.0000	65.048.7400	0	2.651.2620	M

الجدول (7) يوضح تفاصيل الخاصة بقيود الأنموذج للمشكلة

ويمكن توضيح مختصر لمحتويات أعمدة الجدول(7) كالآتي:

- العمود السادس (Surplus or Slack): يعد من الأعمدة المهمة في الجدول، اذ يتيح معرفة مقدار الفائض أو المهمل لكل من الموارد المتاحة وهذا يساعد متخذي القرار في الشركة معرفة الطاقات الفائضة وتوظيفها واستغلالها بفوائد أكثر، اذ يرتبط المقدار الفائض مع القيود من النوع الأكبر أو يساوي (عن طريق طرح العمود الخامس من العمود الثالث)، فيشير المقدار المدوّن في العمود الى المقدار الفائض في كل قيد بينما يشير الصفر الى عدم وجود الفائض في القيد.

أما القيود من النوع أصغر أو يساوي فترتبط مع المقدار المهمل من الموارد (يتم حسابه عن طريق طرح العمود الثالث من العمود الخامس) وتشير القيم الى مقدار المهمل لكل عمود (لكل قيد) والصفر يشير الى ان جميع طاقات القيد تم استغلالها بالكامل ولا يوجد مهمل.

- العمود السابع (Shadow Price): وتعني سعر الظل ويعرف على انه المقدار في الزيادة أو النقصان في قيمة دالة الهدف الناتج من زيادة أو نقصان وحدة واحدة من قيمة الإمكانيات المتاحة (الجانب الأيمن من القيود) والتي تم استغلالها بالكامل في جدول الحل الأمثل.

يساهم هذا العمود في تحليل حساسية الحل الأمثل عند تغير قيم الموارد المتاحة لمشكلة كالآتي:

- ان القيود (C22, C21, C20, C19, C18, C17, C14, C13, C8, C6, C5, C4, C3, C2, C1 C32, C31, C30, C29, C28 C25, C24, C23,) قيم أسعار الظل فيها هي صفر وتعني ان زيادة أو نقصان الموارد التاحة لا تؤثر على قيمة دالة الهدف.
- القيد (C7)قيمة سعر الظل فيه هو (-36,896.32) اي ان لكل زيادة في الطلب على طن واحد من المنتج (شبيه برسيل) يسبب نقصان في دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (36,896.32) دينار.

- سعر الظل للقيود (C9, C10, C11) هو (-94,977.47) وهذا يعني لكل زيادة في الطلب على طن واحد من منتجات (سومر بكافة احجامه) يسبب نقصان في دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (94,977.47) دينار.
- القيد (C12)قيمة سعر الظل فيه هو (-6,593.15) اي ان لكل زيادة في الطلب على طن واحد من المنتج (سومر غسالة) يسبب نقصان في دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (6,593.15) دينار.
- القيد (C15)قيمة سعر الظل فيه هو (-2,092.268) وهذا يبين ان لكل زيادة وحدة واحدة من الجانب الأيمن لقيد التوازن يسبب نقصان في دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (2,092.268) دينار، ومن الجدير بالذكر ان هذا القيد فيه معلمات غير مؤكدة وقد تسبب خسائر في ارباح الشركة.
- القيد (C16)قيمة سعر الظل فيه هو (204.9573) اي زيادة طن واحد من المادة الأولية1 يسهم في زيادة دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (204.9573) دينار.
- القيد (C26)قيمة سعر الظل فيه هو (976.5662) اي زيادة طن واحد من المادة الأولية11 يسهم في زيادة دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (976.5662) دينار.
- القيد (C27)قيمة سعر الظل فيه هو (102.0987) اي زيادة طن واحد من المادة الأولية21 يسهم في زيادة دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (102.0987) دينار.

- العمود الثامن (Allowable Minimum RHS): ويوضح الحد الأدنى المسموح فيه لقيم الطرف الأيمن من القيود (الموارد المتاحة) بالوصول اليه دون الضرورة الى تغيير الحل الأمثل.
- العمود التاسع (Allowable Maximum RHS): يبين الحد الأعلى المسموح فيه لقيم الطرف الأيمن من القيود (الموارد المتاحة) بالوصول اليه دون الضرورة الى تغيير الحل الأمثل.

تساعد الأعمدة (الثامن والتاسع) بالاضافة الى العمود السابع في تحليل الحساسية الخاصة بتغيرات قيم الجانب الأيمن للقيود.

5-3 البرمجة الخطية الحصينة:

المرحلة الثانية في هذا الجانب تتعلق بحا المشكلة بطريقة البرمجة الخطية الحصينة، عن طريق حساب مجموعات عدم التأكد للقيم غير المؤكدة وصياغة وحل الأنموذج الخطي الحصين والحصول على النتائج الحصينة.

6-3 حساب مجموعات عدم التأكد:

ان المعلومات الخاصة بكفاءة مادة حامض السلفونيك فيها جزء من عدم التأكد وان القيم التي تم الحصول عليها مقدرة حسب رأي المختصين في الشركة ومقدار انحرافها عن القيم الحقيقية، وبالاعتماد على هذه المعلومات تمكن الباحث بناء مجموعات عدم التأكد الخاصة بالقيم غير المؤكدة

وبالاعتماد على قيمة مقدار تركيز الحامض لكل والتي تمثل قيم المعلمات غير المؤكدة في القيد (C15)، مقدار انحراف تلك القيم عن القيمة الحقيقية لها، وبتطبيق المعادلة (3)، تم حساب مجموعات عدم التأكد لكل معلمة غير مؤكدة وكالآتي:

- مجموعة عدم التأكد لقيمة كفاءة مادة حامض السلفونيك العراقي:

$U_{a15\ 14}$ =[(1 +0.035) *930 , (1 – 0.035)* 930]

$U_{a15\ 14}$ =[962.55 , 897.45]

- مجموعة عدم التأكد لقيمة كفاءة مادة حامض السلفونيك الإماراتي:

$U_{a15\ 15}$ =[(1 +0.02) *975 , (1 – 0.02)* 975]

$U_{a15\ 15}$ =[994.5 , 955.5]

- مجموعة عدم التأكد لقيمة كفاءة مادة حامض السلفونيك الإيراني:

$U_{a15\ 16}$ =[(1 +0.03) *955 , (1 – 0.03)* 955]

$U_{a15\ 16}$ =[938.65 , 926.35]

- مجموعة عدم التأكد لقيمة كفاءة مادة حامض السلفونيك السعودي:

$U_{a15\ 17}$ =[(1 +0.028) *970 , (1 – 0.028)* 970]

$U_{a15\ 17}$ =[997.16 , 942.84]

تخصيص القيم ضمن مجموعات عدم التأكد: (assignment the values within uncertainty sets)

من أجل ضمان بقاء الحل ممكنًا بغض النظر عن القيم التي تتخذها هذه المعلمات في نطاق عدم التأكد الخاص بها ، يمكن تخصيص القيمة الأكثر تحفظًا لكل معلمة اعتمادًا على قيد التوازن (القيد 15C) والذي يكون من النوع أكبر ويساوي(≤)، فأن القيم الجديدة لكل قيد تكون الحد الأدنى في مجموعة عدم التأكد، وكما يلي:

- المعلمة غير المؤكدة ($a_{15\ 14}$) والتي تمثل كفاءة الحامض عراقي المنشأ يتم تخصيص لها القيمة (897.45) كونها ادنى حد في مجموعة عدم التأكد $U_{a15\ 14}$ وهي [897.45 , 962.55] ، وتعويضها في الأنموذج بدلًا من القيمة المخمنة (930).
- المعلمة غير المؤكدة ($a_{15\ 15}$) والتي تمثل كفاءة مادة حامض السلفونيك الإماراتي ،يتم تخصيص لها القيمة (955.5) كونها ادنى حد في مجموعة عدم التأكد $U_{a15\ 15}$ وهي [955.5 , 994.5] ، وتعويضها في الأنموذج بدلًا من القيمة المخمنة (975).
- المعلمة غير المؤكدة ($a_{15\ 16}$) والتي تمثل كفاءة مادة حامض السلفونيك الإيراني ،يتم تخصيص لها القيمة (926.35) كونها ادنى حد في مجموعة عدم التأكد $U_{a15\ 16}$ وهي [926.35 , 938.65] ، وتعويضها في الأنموذج بدلًا من القيمة المخمنة (955).
- المعلمة غير المؤكدة ($a_{15\ 17}$) والتي تمثل كفاءة الحامض السعودي المنشأ ، يتم تخصيص لها القيمة (942.84) كونها ادنى حد في مجموعة عدم التأكد $U_{a15\ 17}$ وهي[942.84 , 997.16] ، وتعويضها في الأنموذج بدلًا من القيمة المخمنة (970).

7-3 الأنموذج الحصين:

لبناء الأنموذج الرياضي الحصين للبرمجة الخطية يتطلب معالجة جميع القيم غير المؤكدة واختيار القيمة الأسوأ من ضمن القيم المحتملة، أي بناء أنموذج خطي أكثر تحفظًا ومحصن من تأثير التغيرات العشوائية في القيم غير المؤكدة، لذا سيكون القيد الذي يحتوي على معلمات غير المؤكدة وهو قيد واحد يمثل قيد التوازن وكالآتي:

$$-(63.7x1 + 63.7x2 + 63.7x3 + 63.7x4 + 63.7x5 + 63.7x6 + 90x7 + 70.7x8 + 96x9 + 96x10 + 96x11 + 65x12 + 3x13) + 897.45y1 + 955.5y2 + 926.35y3 + 942.84y4 \geq 0$$

أما باقي المعلمات في هذا القيد وبقية قيود الأنموذج الخطي ومعلمات دالة الهدف تكون مؤكدة وثابتة إذ تبقى كما في الأنموذج الخطي الاعتيادي دون تغيير ليصبح الأنموذج الخطي الحصين بالشكل الآتي:

$$\text{Maximize } Z(x) = 174416x_1 + 174416x_2 + 174416x_3 + 174416x_4 + 174416x_5 + 174416x_6 + 1745418x_7 + 174507x_8 + 140{,}723x_9 + 140{,}723x_{10} + 140{,}723x_{11} + 14990x_{12} + 156668x_{13} - (1973500y_1 + 2050000y_2 + 2009200y_3 + 2029500y_4) \quad \ldots(1)$$

Subject to:

$$1x_1 \geq 109 \quad \ldots(2)$$
$$1x_2 \geq 520 \quad \ldots(3)$$
$$1x_3 \geq 240 \quad \ldots(4)$$
$$1x_4 \geq 8.5 \quad \ldots(5)$$
$$1x_5 \geq 16 \quad \ldots(6)$$
$$1x_6 \geq 19.5 \quad \ldots(7)$$
$$1x_7 \geq 5 \quad \ldots(8)$$
$$1x_8 \geq 32 \quad \ldots(9)$$
$$1x_9 \geq 46 \quad \ldots(10)$$
$$1x_{10} \geq 87 \quad \ldots(11)$$
$$1x_{11} \geq 107 \quad \ldots(12)$$
$$1x_{12} \geq 49 \quad \ldots(13)$$
$$1x_{13} \geq 16 \quad \ldots(14)$$
$$1y_1 + 1y_2 + 1y_3 + 1y_4 \leq 4000000 \quad \ldots(15)$$
$$-(63.7x_1 + 63.7x_2 + 63.7x_3 + 63.7x_4 + 63.7x_5 + 63.7x_6 + 90x_7 + 70.7x_8 + 96x_9 + 96x_{10} + 96x_{11} + 65x_{12} + 3x_{13}) + 897.45y_1 + 955.5y_2 + 926.35y_3 + 942.84y_4 \geq 0 \quad \ldots(16)$$
$$192x_1 + 192x_2 + 192x_3 + 192x_4 + 192x_5 + 192x_6 + 50x_7 + 50x_8 + 170x_9 + 170x_{10} + 170x11 + 100x12 \leq 1800000 \quad \ldots(17)$$
$$30x_8 + 10x_9 + 10x_{10} + 10x_{11} + 7.5x_{13} \leq 840000 \quad \ldots(18)$$

$280\ x_9 + 280\ x_{10} + 280\ x_{11} \leq 21600000$ … (19)
$140\ x_9 + 140\ x_{10} + 140\ x_{11} \leq 1263000$ … (20)
$40\ x_9 + 40\ x_{10} + 40\ x_{11} \leq 30000000$ … (21)
$140\ x12 \leq 12300000$ … (22)
$0.5\ x_7 + 0.4\ x_9 + 0.4\ x_{10} + 0.4\ x_{11} \leq 160000$ … (23)
$5\ x_1 + 5\ x_2 + 5\ x_3 + 5\ x_4 + 5\ x_5 + 5\ x_6 + 2.5\ x_8 \leq 1500000$ … (24)
$2\ x_1 + 2\ x_2 + 2\ x_3 + 2\ x_4 + 2\ x_5 + 2\ x_6 + 10\ x_8 + 20\ x_{13} \leq 240000$ … (25)
$15\ x_7 \leq 180000$ … (26)
$154\ x_{13} \leq 15000$ … (27)
$17.5\ x_1 + 17.5\ x_2 + 17.5\ x_3 + 17.5\ x_4 + 17.5\ x_5 + 17.5\ x_6 + 125\ x_7 + 160\ x_8 \leq 1740000$ …(28)
$15\ x_7 \leq 210000$ … (29)
$10\ x_{13} \leq 84000$ … (30)
$30\ x_{13} \leq 25450$ … (31)
$3.5\ x_1 + 3.5\ x_2 + 3.5\ x_3 + 3.5\ x_4 + 3.5\ x_5 + 3.5\ x_6 + 14\ x_{12} \leq 64457$ … (32)
$4.6\ x_{12} + 24\ x_{13} \leq 67700$ … (33)
$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},y_1,y_2,y_3,y_4 \geq 0$ … (34)

8-3 **حل الأنموذج الحصين**:

لحل الأنموذج الخطي الحصين الموضح في المعادلات أعلاه (المعادلات 1-34) تم استعمال أسلوب (M الكبرى)، واستعمال البرنامج الجاهز WINQSB للمساعدة في حل الأنموذج والحصول على نتائج الحل الحصينة الجاهزة كما في الجدول الرئيسي الأول (8) والخاص بقيمة دالة الهدف المثلى والتفاصيل التي تخص متغيرات القرار، وكالآتي:

الجدول (8) يوضح نتائج الحل الأمثل الحصينة الخاصة بدالة هدف الأنموذج للمشكلة

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	5,685.5040	174,416.0000	991,642,900.0000	0	basic	174,416.0000	224,303.3000
2	X2	520.0000	174,416.0000	90,696,320.0000	0	basic	-M	174,416.0000
3	X3	240.0000	174,416.0000	41,859,840.0000	0	basic	-M	174,416.0000
4	X4	8.5000	174,416.0000	1,482,536.0000	0	basic	-M	174,416.0000
5	X5	16.0000	174,416.0000	2,790,656.0000	0	basic	-M	174,416.0000
6	X6	19.5000	174,416.0000	3,401,112.0000	0	basic	-M	174,416.0000
7	X7	5.0000	174,418.0000	872,090.0000	0	basic	-M	212,989.4000
8	X8	10,161.3000	174,507.0000	1,773,219,000.0000	0	basic	161,515.5000	318,703.1000
9	X9	46.0000	140,723.0000	6,473,258.0000	0	basic	-M	238,094.3000
10	X10	87.0000	140,723.0000	12,242,900.0000	0	basic	-M	238,094.3000
11	X11	107.0000	140,723.0000	15,057,360.0000	0	basic	-M	238,094.3000
12	X12	49.0000	149,900.0000	7,345,100.0000	0	basic	-M	158,355.1000
13	X13	97.4026	156,668.0000	15,259,870.0000	0	basic	6,436.4220	M
14	Y1	0	-1,973,500.0000	0	-48,044.7100	at bound	-M	-1,925,455.0000
15	Y2	1,212.7190	-2,050,000.0000	-2,486,073,000.0000	0	basic	-2,056,751.0000	-1,819,148.0000
16	Y3	0	-2,009,200.0000	0	-21,740.6100	at bound	-M	-1,987,459.0000
17	Y4	0	-2,029,500.0000	0	-6,661.6380	at bound	-M	-2,022,838.0000
	Objective	Function	(Max.) =	476,269,200.0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)

9-3 **تفسير النتائج**:

الجدول(8)يشير الى ان قيمة دالة الهدف هي 476,269,200 وهذا يعني ان صافي الارباح التي يمكن تحقيقها هي 476,269,200 دينار في حال تطبيق خطة الإنتاج الحصينة، ويمكن تفسير أهم معلومات الجدول (8) كما يلي:

- **من خلال العمود الثالث (Solution Value) يتبين ان القرار الأمثل لخطة الإنتاج الحصينة في صنع المنتجات (X) هي مماثلة لخطة الانتاج الاعتيادية، بينما القرار الأمثل لشراء مادة حامض السلفونيك هي:**

الكمية المثلى لشراء حاض السلفونيك عراقي المنشأ هي عدم شراءه (0 طن)
الكمية المثلى لشراء حاض السلفونيك إماراتي المنشأ هي (1,212.719 طن)
الكمية المثلى لشراء حاض السلفونيك إيراني المنشأ هي عدم شراءه (0 طن)
الكمية المثلى لشراء حاض السلفونيك سعودي المنشأ هي عدم شراءه (0 طن)

- **العمود السادس (Reduced Cost)يبين مقدار الزيادة المطلوبة في أرباح متغيرات القرار غير الأساسية لجعلها متغيرات أساسية، ومن الجدول يتبين ان:**

المتغير (y_1) يتطلب زيادة ارباحه (تقليل كلفته) على الأقل 48,044.71 دينار ليتمكن من جعله متغيرًا أساسيًا في جدول الحل دون التأثير على أمثلية الحل.
المتغير (y_3) يتطلب زيادة ارباحه (تقليل كلفته) على الأقل 21,740.61 دينار ليتمكن من جعله متغيرًا أساسيًا في جدول الحل دون التأثير على أمثلية الحل.
المتغير (y_4) يتطلب زيادة ارباحه (تقليل كلفته) على الأقل 6,661.638 دينار ليتمكن من جعله متغيرًا أساسيًا في جدول الحل دون التأثير على أمثلية الحل.

- **العمود الثامن ((Allowable Min. C(j))يمثل الحد الأدنى لقيم معاملات متغيرات دالة الهدف المسموح فيها ويبقى الحل أمثل، وهي كما يلي:**

الحد الأدنى المسموح به لقيمة المتغير (x_1) هي 174,416 دينار
الحد الأدنى المسموح به لقيمة كل من المتغيرات ($x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}, x_{12}, y_{14}, y_{16}, y_{17}$) هي –M (أي يمكن ان تصل الى ما لا نهاية من القيم السالبة)
الحد الأدنى المسموح به لقيمة المتغير (x_8) هو 161,515.5 دينار
الحد الأدنى المسموح به لقيمة المتغير (x_{13})هو 6,436.422 دينار
الحد الأدنى المسموح به لقيمة المتغير (y_4) هو 2,056,751- دينار

- **العمود التاسع ((Allowable Min. C(j)) يمثل الحد الأعلى لقيم معاملات متغيرات دالة الهدف المسموح فيها ويبقى الحل أمثل، كما يلي:**

الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير (x_1) هو 224,303.3 دينار
الحد الأعلى المسموح به لقيمة كل من المتغيرات (x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) هو 174,416 دينار
الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير (x_7) هو 212,989.4 دينار
الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير (x_8) هو 318,703.1 دينار
الحد الأعلى المسموح به لقيمة كل من المتغيرات (x_9,x_{10},x_{11}) هو 238,094.3 دينار
الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير (x_{12}) هو 158,355.1 دينار
الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير (x_{13}) هو M وتعني (أي يمكن ان تصل الى ما لا نهاية من القيم الموجبة)
الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير (y_1) هو 1,925,455- دينار
الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير (y_2) هو 1,891,148- دينار
الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير(y_3) هو 1,987,459- دينار
الحد الأعلى المسموح به لقيمة المتغير (y_4) هو 1,022,838- دينار

يتم الاستفادة من الأعمدة (الثامن والتاسع) في تحليل الحساسية فيما لو تغيرت قيم معاملات دالة الهدف (cj)، اذ تُبين هذه القيم الحد الأدنى والأعلى المسموح فيها لتغير تلك القيم ويبقى جدول الحل امثلًا، اما لو تجاوزت هذه الحدود فيتطلب تعديل الحل الحالي وإدخال متغير آخر الى جدول الحل.
ويبين جدول الحل الأمثل الرئيسي الثاني (9) التفاصيل الخاصة بالقيود:

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	5,685.5040	>=	109.0000	5,576.5040	0	-M	5,685.5040
2	C2	520.0000	>=	520.0000	0	0	0	6,096.5040
3	C3	240.0000	>=	240.0000	0	0	0	5,816.5040
4	C4	8.5000	>=	8.5000	0	0	0	5,585.0040
5	C5	16.0000	>=	16.0000	0	0	0	5,592.5040
6	C6	19.5000	>=	19.5000	0	0	0	5,596.0040
7	C7	5.0000	>=	5.0000	0	-38,571.4500	0	12,000.0000
8	C8	10,161.3000	>=	32.0000	10,129.3000	0	-M	10,161.3000
9	C9	46.0000	>=	46.0000	0	-97,371.3400	0	6,164.7780
10	C10	87.0000	>=	87.0000	0	-97,371.3400	0	6,205.7780
11	C11	107.0000	>=	107.0000	0	-97,371.3400	0	6,225.7780
12	C12	49.0000	>=	49.0000	0	-8,455.1210	0	3,435.5850
13	C13	97.4026	>=	16.0000	81.4026	0	-M	97.4026
14	C14	1,212.7190	<=	4,000,000.0000	3,998,787.0000	0	1,212.7500	M
15	C15	-0.1094	>=	0	0	-2,145.4740	-1,158,753.0000	3,820,841,000.000
16	C16	1,800,000.0000	<=	1,800,000.0000	0	188.9934	759,807.8000	3,988,157.0000
17	C17	307,969.7000	<=	840,000.0000	532,030.4000	0	307,969.6000	M
18	C18	67,200.0000	<=	21,600,000.0000	21,532,800.0000	0	67,200.0000	M
19	C19	33,600.0000	<=	1,263,000.0000	1,229,400.0000	0	33,600.0000	M
20	C20	9,600.0000	<=	30,000,000.0000	29,990,400.0000	0	9,600.0000	M
21	C21	6,860.0000	<=	12,300,000.0000	12,293,140.0000	0	6,860.0000	M
22	C22	98.5000	<=	160,000.0000	159,901.5000	0	98.5000	M
23	C23	57,850.7800	<=	1,500,000.0000	1,442,149.0000	0	57,850.7500	M
24	C24	116,540.1000	<=	240,000.0000	123,459.9000	0	116,540.1000	M
25	C25	75.0000	<=	180,000.0000	179,925.0000	0	75.0000	M
26	C26	15,000.0000	<=	15,000.0000	0	975.5297	2,464.0000	130,643.3000
27	C27	1,740,000.0000	<=	1,740,000.0000	0	83.5772	165,473.5000	3,764,539.0000
28	C28	75.0000	<=	210,000.0000	209,925.0000	0	75.0000	M
29	C29	974.0259	<=	84,000.0000	83,025.9800	0	974.0234	M
30	C30	2,922.0780	<=	25,450.0000	22,527.9200	0	2,922.0780	M
31	C31	23,399.2600	<=	64,457.0000	41,057.7300	0	23,399.2700	M
32	C32	2,651.2620	<=	67,700.0000	65,048.7400	0	2,651.2620	M

الجدول (9) يوضح تفاصيل الخاصة بقيود الأنموذج للمشكلة

ويمكن توضيح أهم معلومات محتويات أعمدة الجدول(13) كالآتي:

- **العمود السابع (Shadow Price) يوضح تحليل حساسية الحل الأمثل الحصين عند تغير قيم الموارد المتاحة للمشكلة وكالآتي:**

- ان القيود (C1 ,C2 ,C3 ,C4 ,C5 ,C6 ,C8 ,C13 ,C14 ,C17 ,C18 ,C19 ,C20 ,C21 ,C22 ,C31 ,C30 ,C29 ,C28 ,C25 ,C24 ,C23,32) قيم أسعار الظل فيها هي صفر وتعني ان زيادة أو نقصان الموارد التاحة لا تؤثر على قيمة دالة الهدف.

- القيد (C7)قيمة سعر الظل فيه هو (-38,571.45) اي ان لكل زيادة في الطلب على طن واحد من المنتج (شبيه برسيل) يسبب نقصان في دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (38,571.45) دينار.

- سعر الظل للقيود (C9, C10, C11) هو (-97,371.34) وهذا يعني لكل زيادة في الطلب على طن واحد من منتجات (سومر بكافة احجامه) يسبب نقصان في دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (97,371.34) دينار.

- القيد (C12)قيمة سعر الظل فيه هو (-8,455.121) اي ان لكل زيادة في الطلب على طن واحد من المنتج (سومر غسالة) يسبب نقصان في دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (8,455.121) دينار.

- القيد (C15)قيمة سعر الظل فيه هو (-2,145.474) وهذا يبين ان لكل زيادة وحدة واحدة من الجانب الأيمن لقيد التوازن يسبب نقصان في دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (2,145.474) دينار، ومن الجدير بالذكر ان هذا القيد تم معالجة حالة عدم التأكد في المعلمات وضمان عدم حدوث انتهاكات في هذا القيد.

- القيد (C16)قيمة سعر الظل فيه هو (188.9934) اي زيادة طن واحد من المادة الأولية1 يسهم في زيادة دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (188.9934) دينار.

- القيد (C26) قيمة سعر الظل فيه هو (975.5297) اي زيادة طن واحد من المادة الأولية11 يسهم في زيادة دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (975.5297) دينار.

- القيد (C27) قيمة سعر الظل فيه هو (38.5772) اي زيادة طن واحد من المادة الأولية21 يسهم في زيادة دالة هدف الحل الأمثل مقدارها (38.5772) دينار.

10-3 تأثير عدم التأكد:

إن المادة الأولية من حامض السلفونيك غير مؤكدة بصورة تامة وتتغير هذه القيم عشوائيًا وقد تم تجاهل هذه الحالة في حل الأنموذج الرياضي الاعتيادي كما في أغلب الحالات لكونها لا تتغير بنسب كبيرة جدًا واعتبار هذه القيم مؤكدة للحصول على الحل الأمثل، بينما نلاحظ في جدول الحل الأمثل (7) في العمود الثالث ان القيد (C15) هو (0.0161-) وليس اكبر او يساوي الصفر، ان هذا الانحراف البسيط لا يؤثر على الحل الأمثل مع هذه القيم، لكن يدل على ان هذه النتائج حساسة عند اي تغير بسيط في قيم المعلمات، ومع وجود المعاملات غير المؤكدة في القيد قد يسبب مشكلة عدم تحقق القيد بسبب التغيرات العشوائية التي تحصل لقيم المعلمات غير المؤكدة من هذا القيد، وهذا ما يسمى بانتهاك القيد (violation of constraint)، ومن الجدير بالذكر ان سعر الظل للقيد (C15) في الجدول نفسهُ (7) هو (2,092.268-) وهذا يدل على خسارة مقدارها (2,092.268) دينار مقابل تغير وحدة واحدة فقط في قيمة الموارد المتاحة للقيد، وفي هذه الحالة بما أن القيد هو قيد التوازن فان الموارد المتاحة تتمثل بالكميات المركزة من المادة الأولية لحامض السلفونيك، ويمكن توضيحها كالآتي:

- يتم تعويض قيم كميات التي يتم شرائها من الحامض حسب الخطة الانتاجية كالآتي :

$$-(63.7\,x_1 + 63.7\,x_2 + 63.7\,x_3 + 63.7\,x_4 + 63.7\,x_5 + 63.7\,x_6 + 90\,x_7 + 70.7\,x_8 + 96\,x_9 + 96\,x_{10} + 96\,x_{11} + 65\,x_{12} + 3\,x_{13}) + 930\,(0) + 975\,(0) + 955\,(0) + 970\,(1194.591) \geq 0$$

$$= -(63.7\,x_1 + 63.7\,x_2 + 63.7\,x_3 + 63.7\,x_4 + 63.7\,x_5 + 63.7\,x_6 + 90\,x_7 + 70.7\,x_8 + 96\,x_9 + 96\,x_{10} + 96\,x_{11} + 65\,x_{12} + 3\,x_{13}) + 1158753.27 \geq 0$$

وبضرب القيد بالسالب ينتج :

$$63.7\,x_1 + 63.7\,x_2 + 63.7\,x_3 + 63.7\,x_4 + 63.7\,x_5 + 63.7\,x_6 + 90\,x_7 + 70.7\,x_8 + 96\,x_9 + 96\,x_{10} + 96\,x_{11} + 65\,x_{12} + 3\,x_{13}) - 1158753.27 \leq 0$$

وعند إضافة (1158753.27) للطرفين ينتج:

$$63.7\,x_1 + 63.7\,x_2 + 63.7\,x_3 + 63.7\,x_4 + 63.7\,x_5 + 63.7\,x_6 + 90\,x_7 + 70.7\,x_8 + 96\,x_9 + 96\,x_{10} + 96\,x_{11} + 65\,x_{12} + 3\,x_{13}) \leq 1158753.27$$

المقدار 1158753.27 يمثل كمية الحامض المركز بالكيلوغرام والذي سيكون متوفرًا لصناعة المنتجات، وعند افتراض ان كفاءة الحامض (السعودي المنشأ) سينخفض عن ما هو متوقع له من 970 الى 942.84، وبالتالي ستكون الكمية المطلوبة من الحامض المركز كما في العملية الحسابية الموضحة كالآتي:

(كمية حامض السلفونيك سعودي المنشأ)*(كفاءة الحامض)=(تركيز حامض السلفونيك)

=(942.84)*(1194.591)

=1126308.17844 كيلوغرام

ولحساب عدد الوحدات الممكن تغيرها في الموارد المتاحة لقيد التوازن:

1158753.27-1126308.17844 =32445.09156

أي ان من الممكن حدوث انخفاض في كمية مادة الحامض المركز بمقدار (32445.09156) كيلوغرام، بينما تسبب انخفاضها لوحدة واحدة فقط خسارة (2092.268) دينار، أي من الممكن ان تكون مجموع خسائر الشركة التي تسببها عدم تأكد البيانات تعادل:

32445.09156*2092.268 = 67883826.82805808 دينار

أي أن إجمالي الأرباح قد تكون (470037273.1719419) بدلًا من (537921100) كما يلي:

537921100-67883826.82805808 =470037273.1719419

وهذا ما يتطلب ضرورة التأكد لمدى تأثير القيم غير المؤكدة ومعالجتها لتفادي التبعات التي قد تنتج منها.

11-3 التحليل والمقارنة:

من أجل التحقق من الأنموذج الأنسب في حالة عدم التأكد تم إجراء مقارنة بين الأنموذج الخطي الاعتيادي والأنموذج الخطي الحصين، كما في النقاط الآتية:

- في الحل الأمثل للأنموذج الخطي الاعتيادي كانت إجمالي الأرباح (537,921,100) ومن المتوقع أن تنخفض عن هذه القيمة نتيجة تغير القي غير المؤكدة عشوائيًا لتصل الى (470,037,273.172) في أسوء الحالات.

بينما في الحل الأمثل الحصين فأن إجمالي الأرباح (476,269,200) وفي المقابل ضمان عدم انخفاضها عن هذه القيمة لأن الأنموذج الحصين تم بناءه في أسوء حالاته.

- في الحل الأمثل الاعتيادي عند تغير القيم غير المؤكدة لأسوء حالاته تكون نسبة الخسارة (14.44%) كما في العملية الحسابية:

$$\frac{537921100-470037273.172}{470037273.172} = 0.144$$

بينما الحل الأمثل الحصين فأن نسبة نقصان إجمالي الأرباح المتوقعة عن الأرباح في الأنموذج الأعتيادي المتوقع تكون (12.94%) فقط تبعًا للعملية الحسابية:

$$\frac{537921100-476269200}{476269200} = 0.129$$

- في الحل الأمثل الاعتيادي من الممكن حدوث انتهاك في قيد التوازن (C15) بمقدار (32445.09156) وحدات (كيلوغرامات) وأن سعر الظل فيه يساوي (2092.268) دينار
بينما في الحل الأمثل الحصين ضمان عدم انتهاك القيد حتى لوحدة واحدة نتيجة لتطبيق المنهجية الحصينة.

4. الاستنتاجات:

إن أهم الاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال هذا البحث يمكن سردها كالآتي:

1. أثبتت نتائج الحل في البرمجة الخطية الاعتيادية إن مشكلة البحث حساسة جدًا وان أي تغيّر في معاملات متغيرات القيد قد يجعل الحل الأمثل غير ممكنًا. لذلك من الخطأ حل المشكلة في البرمجة الخطية الاعتيادية عند وجود قيم غير مؤكدة، وبالأخص عند وجود حساسية في الحل الأمثل.
2. أثبتت النتائج حدوث انتهاك في قيد أنموذج البرمجة الخطية الاعتيادية عند زيادة نسبة الشوائب لمادة حامض السلفونيك وبذلك تسبب نقصان تركيز المادة الفعالة اللازمة لإنتاج الكميات المطلوبة، وأثبتت المنهجية الحصينة فعاليتها في معالجة حالات عدم التأكد في بيانات المشكلة وتجنب حدوث الانتهاكات في القيود.
3. تبلغ نسبة الخسائر(14.44%) في LP لو كانت نسبة الشوائب عند أقصى درجة لها ضمن مجموعة عدم التأكد، بينما في الحل الأمثل الحصين كان انخفاض صافي الربح عن الربح المخطط له في LP بنسبة (12.94%) مع ضمان تجنب اي تأثير في النتائج عند التغيرات العشوائية لقيم المعلمة غير المؤكدة، لذلك يوصى بتطبيق الامثلية الحصينة (R.O) في مشاكل البرمجة الخطية عند وجود بيانات غير ثابتة وغير مؤكدة لتجنب الخسائر.

المصادر:

1.A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. Mathematical Programming, Series A,88(3):411–424, (2000).

2.A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A. Nemirovski. Robust Optimization. Princeton Series in Applied Mathematics, (2009).

3.Abdulrahman, S. A. , Batikh, A. H. , Bakhuet, A. Kh. , Operations Research Basic Principles and Scientific Decisions , Baghdad, firs edition , (2015).

4.Achammrta, H.S., Operations research concept and application , Baghdad, firs edition , (2010).

5.Al Oshary, O. M. , Using Linear Programming for solving Multistage Transfer Problem , Diyala Journal For Pure Science , 7(4): 41-61 , (2011).

6.Al Shaykh , A. M. , Operation Research , Second Edition , Egypt , (2009).

7.Al-Astal , R. O., Operation Research and Quantitative Methods in Administrative Decisions Making , sixth edition , Palestine University , (2016).

8.Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. Robust solutions of uncertain linear programs. Operations research letters, 25(1), 1-13 , (1999).

9.Bertsimas, D. & Gupta, V. and Kallus, N. , Data-driven robust optimization. Mathematical Programming, (2017).

10. Bertsimas, D. , Goyal, V. and Lu, B. ,A tight characterization of the performance of static solutions in two-stage adjustable robust linear optimization. Mathematical Programming, 150(2):281–319, (2014)

11. Bertsimas, D., & Youssef, N. Stochastic optimization in supply chain networks: averaging robust solutions. Optimization Letters, 1-17, (2019).
12. Bertsimas, D., Sim, M., & Zhang, M. Adaptive distributionally robust optimization. Management Science, 65(2), 604-618, (2018).
13. Chong, E. & Zak, S. , An Introduction to Optimization ,Second Edition , johnwiley & sone, inc ,New York , (2001).
14. Gorissen, B., Yanikoglu, I., & Hertog, D. D. , Hints for practical robust optimization, Volume 53, Pages 124-137, 2015.
15. Hillier , F. S. , Lieberman , G. J. , Introduction to Operation Research , Seventh edition , (2001).
16. Hillier , F. S. , Lieberman , G. J. , Introduction to Operation Research , Tenth edition , (2015).
17. Mandelstam, L., & Tamm, I. G. , The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics. In Selected Papers (pp. 115-123). Springer, Berlin, Heidelberg , (1991).
18. Mkireb, C., Dembélé, A., Jouglet, A., & Denoeux, T. (2019). Robust Optimization of Demand Response Power Bids for Drinking Water Systems. Applied energy, 238, 1036-1047.
19. Wang, Z., Glynn, P. W., & Ye, Y. (2016). Likelihood robust optimization for data-driven problems. Computational Management Science, 13(2), 241-261.
20. Yanıkoğlu, İ., Gorissen, B., & den Hertog, D. (2017). Adjustable robust optimization–a survey and tutorial. Available online at ResearchGate.
21. Yu, H. X., & Jin, L. An brief introduction to robust optimization approach. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 74(1), 121-124, (2012).

Robust Optimization with practical application

Marwan Abdul Hameed Ashour
Assistant Professor-Statistics Department-College of Administration & Economics-University of Baghdad
dr_marwan2012@yahoo.com

Fatima Abdul Emam Taher
Statistics Department-College of Administration & Economics-University of Baghdad
fatima1994abdulemam@gmail.com

Published **Accepted** **Received :April / 2020**

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)

Abstracts:

The purpose of this paper is applying the robustness in Linear programming(LP) to get rid of uncertainty problem in constraint parameters, and find the robust optimal solution, to maximize the profits of the general productive company of vegetable oils for the year 2019, through the modify on mathematical model of linear programming when some parameters of the model have uncertain values, and being processed it using robust counterpart of linear programming to get robust results from the random changes that happen in uncertain values of the problem, assuming these values belong to the uncertainty set, and selecting the values that cause the worst results and to depend build a robust linear model on it ,and then comparing between robust optimal results with usual optimal results.

In this paper has been reached to the most important results, it is possible that a simple neglecting of uncertainty in the parameters values causes decrease in profits, so in case increase the percentage of impurities in raw materials to the maximum of their expected cases, caused a decrease in the concentration of active substance needed to production planned amount, that make decreases production and therefore reducing of revenue the value of (67,883,826.8281) IQD per year from the expected profit, as that total of expected profit is (537,921,100) IQD, and when this value decreases because the values change randomly, the profits are (470,037,273.172) IQD in the worst expected cases. While when robust model was applied, the total profit was (476,269,200) IQD. In contrast ensures that this value is not decreases at any random change to the value was happened, because the robust model was built in its worst-case expected. Also it is possible guarantee that any violation of the constraint was avoided in the event of random variations that obtain in uncertainty parameter value when applying robust style.

Keywords: **linear programming, Robust programming, Robust optimization, uncertainty, violation of constraints.**