المجموعة الرابطة في الزمرة التبولوجية

ايناس يحيى- قسم الرياضيات - كلية التربية- جامعة الكوفة

الخلاصة

تم في هذا البحث دراسة المجموعة الرابطة وهي واحدة من المجموعات الأربعة التي سماها كودسجوك بالمقبولة وبينا علاقة الرابطة والزمرة الجزئية الرابطة بالمفعمة بشدة وشبه المفعمة بشدة من جهة وعلاقة التحويل الأيسر والثنائي لمجموعة رابطة بالمجموعة الرابطة من جهةاخرى ونتيجة لهذه العلاقات توصلنا الى عدد من النتائج والقضايا جديدة .

Abstract:

In this paper has been studied the syndetic set ,she is one of four sets that called Gottschak admissible set,and we show relation the syndetic and sub group syndetic with strongly replete and strongly semi replete from side and relation left translation and biletral to syndetic set with syndetic set other side and as a result of this relation we found numbers of results and new theorems.

1- المقدمة

ينصب اهتمام هذا البحث على المجموعة الرابطة التي لها الحضور المميز والأوسع في الزمرة التبولوجية.وتعود أهمية دراسة المجموعة الرابطة الى كونها تودي الدور الأساسي والمهم في دراسة العديد من الصفات الديناميكية [3] [4]،لقد ظهرت العديد من البحوث التي تطرقت الى استعمال هذه المجموعة ولو بشكل يسير منها 1949 الاانها ما كانت تتعامل مع هذه المجموعة بصورة خاصة ومباشرة الى ان صدر كتاب "Topological Dynamical" 1955على يد كودسجوك(W.H.Gottschak) وهودلاند(G.A.Hedlund)[1] الذي اتضحت فيه معالم هذه المجموعة واهميتها في الزمرة التبولوجية ،لقد ألقى هذا البحث الضوء على المجموعة الرابطة في الزمرة التبولوجية وبين علاقة التحويل بنوعيه الأيسروالثنائي لمجموعة رابطة بالمجموعة الرابطة كما اشار البحث الى علاقة الزمرة الجزئية الرابطة بكل من الزمرة الجزئية الناظمية الرابطة وتحويل الزمرة الجزئية الناظمية الرابطة كما قدم البحث تعريف للمفعمة بشدة وشبه المفعمة بشدة الغير مذكور في المصادر وبينا علاقة الرابطة والزمرة الجزئية الرابطة بكل منهما بشكل عام وعلاقة شبه المفعمة بالمفعمة بشكل خاص .

2 – مفاهيم أساسية:

يتناول هذا البند تعريف الزمرة التبولوجية واعطاء ملاحظات حولها وكذلك تعريف التحويل الأيمن والأيسر والمجموعة الرابطة مع ذكر التعاريف الأساسية ذات العلاقة وتسليط الضوء على النتائج المتعلقة بها.

تعريف(2-1) [2]:

الزمرة التبولوجية (Topological Group)هي مجموعة G مكونة من بنيتين هما بنية الزمرة والبنية التبولوجية بحيث ان هاتين البنيتين متداخلتان بشكل يتمثل بتحقيق الشرطين الاتيين :-

1- الدالة $f: G\times G \to G$ والمعرفة $f(x,y)=x*y$ مستمرة .

2- دالة العكس (Inversion Map) $v: G \to G$ والمعرفة $v(x)=x^{-1}$ مستمرة .

او بتحقيق الشرط المكافئ للشرطين (1)و(2) وهو ان تكون الدالة $f: G\times G \to G$ والمعرفة $f(x,y)=x*y^{-1}$ مستمرة.

تعريف (2-2) [2]:

اذا كانت $(G,*)$ زمرة تبولوجية فان كل $g \in G$ يعرف التحويل الايمن (Right Translation) $R_g: G \to G$ بالشكل $R_g(x)=x*g$ حيث $x \in G$. ويعرف التحويل الايسر (Left Translation) $L_g: G \to G$ بالشكل $L_g(x)=g*x$ حيث $x \in G$.

تعريف (2-3) [2]:

اذا كانت G زمرة تبولوجية وكانت A مجموعة جزئية من G وان $g \in G$ فإن المجموعة $Ag=R_g(A)=\{ag \mid a \in A\}$ تسمى با لتحويل الايمن للمجموعة A بواسطة النقطة g . وتسمى المجموعة $gA=L_g(A)=\{ga \mid a \in A\}$ بالتحويل الايسر للمجموعةA بواسطة النقطة g.

ملاحظة(2-4):

1- سوف نستعمل الرمز AA_1 للدلالة على $A*A_1$ لكل $A, A_1 \in G$.

2- معكـوس التحويـل الايسـر L_g هـو $L_{g^{-1}}$ $((L_g)^{-1} = L_{g^{-1}})$ ومعكـوس التحويـل الايمـن R_g هـو $R_{g^{-1}}$ $((R_g)^{-1} = R_{g^{-1}})$.

قضية (2-5):

اذا كانت $(G,*)$ زمـرة تـبولـوجية فـان التحويل الأيسر{الأيمن} مستمر .

البرهان:

بما أن $L_g = f|\{g\}\times G$ وأن f دالة مستمرة من تعريف الزمرة التبولوجية أذن L_g مستمرة .

وبنفس الطريقة نبرهن أن التحويل الأيمن مستمر .

قضية (2-6):

اذا كانت K مجموعة مرصوصة جزئية من الزمرة التبولوجية G فأن K^{-1} مجموعة مرصوصة جزئية من G.

البرهان :-

بماأن دالة العكس $v: G \to G$ والمعرفة $v(x) = x^{-1}$ مستمرة و K مجموعة مرصوصة فأن $v(K) = K^{-1}$ مجموعة مرصوصة جزئية من G.

قضية (2-7):

اذا كانت K مجموعة مرصوصة جزئية من الزمرة التبولوجية G فأن gK مجموعة مرصوصة جزئية G.

البرهان :-

بماأن التحويل الأيسر $L_g : G \to G$ والمعرفة بالشكل $L_g(x) = gx$ حيث $x \in G$ مستمر و K مجموعة مرصوصة فأن $L_g(K) = gK$ مجموعة مرصوصة جزئية من G.

نتيجة (2-8):

اذا كانت K مجموعة مرصوصة جزئية من الزمرة التبولوجية G فأن $g^{-1}K$ مجموعة مرصوصة جزئية من G.

تعريف (2- 9) [1]:

إذا كانت G زمرة تبولوجية ، $A \subset G$ فإن A تسمى مجموعة مقبولة (Admissible Set) إذا كانت تمثل إحدى المجموعات الآتية :

1- مجموعة رابطة .
2- زمرة جزئية ناظمية رابطة.
3- تحويل زمرة جزئية ناظمية رابطة.
4- مجموعة موسعة.

تعريف (2- 10) [1]:

يقال للمجموعة الجزئية A من الزمرة التبولوجية G بانها رابطة يمينية {*Right* Syndetic} رابطة يسارية {*Left* Syndetic} اذا وجدت مجموعة مرصوصة $K \subset G$ بحيث $G = KA ,\{G = AK\}$.

سينصب اهتـمامنا على المـــجموعة الـرابطة الـــيسارية .

أمثلة (2-11):-

1- زمـــرة الأعـــداد الصحـيحة الجمـــعية $(Z,+)$ مع الـتبولوجي المفـرق Z زمـرة تبولوجية وأن زمـرة الأعـداد الصـــحيحة الجمـــعية $(Z,+)$ حيـــث $Z = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ تكـون رابـــطة يسارية وذلك لــوجود مجـموعة مرصـــوصة $K = \{-1,3\}$ جـزئية من Z بحـــيث أن
$Z + K = \{...,-2,-1,0,1,2,...\} + \{-1,3\} = \{...-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,...\} = Z$.

2- أذا كانت $(Z_e,+)$ زمـرة جـزئية من الـزمرة الـتبولوجية $(Z,+)$ فأن الـزمرة الجزئية $(Z_e,+)$ تـكون رابـطة يسارية وذلك لوجود مجـموعة مرصـوصة $K = \{1,-4\}$ جـزئية من Z بحيـث أن

$$Z_e + K = \{...,-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,.8,10,12,..\} + \{1,-4\} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,...\} = Z$$

القضية التالية تتــبع من الــتعريف مباشرتاً
قضية(2-12):-
أذا كانت $(G,*)$ زمرة تبولوجية وكانت gA مجموعة رابطة يسارية جزئية من G فأن التحويل الثنائي gAg_1 مجموعة رابطة يسارية جزئية من G لكل $g, g_1 \in G$.

البرهان:
نفرض أن gA مجموعة رابطة يسارية توجد مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $G = gAK$
وكذلك $gAg_1g_1^{-1}K = G$ لكل $g_1 \in G$ بماأن K مجموعة مرصوصة من نتيجة(2-8) $g_1^{-1}K$ مجموعة مرصوصة جزئية من G ، gAg_1 مجموعة رابطة يسارية جزئية من G لكل $g, g_1 \in G$.
قضية (2-13):-
أذا كانت $(G,*)$ زمرة تبولوجية وكان التحويل الثنائي gAg_1 مجموعة رابطة يسارية جزئية من G فأن A مجموعة رابطة يسارية جزئية من G لكل $g, g_1 \in G$.

البرهان :
نفرض gAg_1 مجموعة رابطة يسارية أذن توجد مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $G = gAg_1K$ ،وكذلك $g^{-1}gAg_1K = g^{-1}G = G$ لكل $g \in G$ ، $Ag_1K = G$ بماأن K مجموعة مرصوصة من قضية (2-7) g_1K مجموعة مرصوصة اذن A مجموعة رابطة يسارية جزئية من G .

نتيجة (2-14):-
أذا كانت $(G,*)$ زمرة تبولوجية وكانت gA مجموعة رابطة يسارية جزئية من G فأن A مجموعة رابطة يسارية جزئية من G .

القضية التالية تبين أن المجموعة الرابطة في الزمرة الجزئية تكون رابطة ايضا في الزمرة .
قضية (2-15):-
أذا كانت A زمرة جزئية رابطة من الزمرة التبولوجية G وكانت gA مجموعة رابطة في A فأن gA مجموعة رابطة جزئية من G.

البرهان:
نفرض gA مجموعة رابطة في A توجد مجموعة مرصوصة K_1 جزئية من A بحيث $A = gAK_1$ وبماأن A مجموعة رابطة في G توجد مجموعة مرصوصة K_2 جزئية من G بحيث $G = AK_2$ وكذلك $G = gAK_1K_2$ بماأن K_1K_2 مجموعة مرصوصة جزئية من G ، gA مجموعة رابطة جزئية من G .

قضية (2-16):-
اذا كانت A زمرة جزئية رابطة من الزمرة التبولوجية G وكانت G ابدالية فأن A زمرة جزئية ناظمية رابطة البرهان :
بماأن G زمرة ابدالية $ak = ka$ لكل $a \in A \subset G, k \in G$ $kak^{-1} = a$ وكذلك $kak^{-1} \in A$ اي أن $kAk^{-1} \subseteq A$ لكلس $a \in A, k \in G$ أذن A زمرة جزئية ناظمية رابطة.

قضية (2-17):-
أذا كانت A مجموعة مغلقة رابطة من الزمرة التبولوجية G فأن $\overline{A}$ مجموعة رابطة .

البرهان :
نفرض A مجموعة رابطة في G توجد مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $G = AK$ وبماأن A مجموعة مغلقة أذن $A = \overline{A}$ أذن $\overline{A}$ مجموعة رابطة .

قضية (2- 18):-
اذا كانت A زمرة جزئية رابطة من الزمرة التبولوجية G وكانت G ابدالية فأن A تحويل زمرة جزئية ناظمية رابطة.

البرهان :
نفرض A مجموعة رابطة توجد مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $G = AK$ وان $G = eAK$ وهكذا فأن A تحويل زمرة جزئية ناظمية رابطة بالعنصر المحايد e.

ملاحظة (2-19):
الزمرة الجزئية $(A,*)$ من الزمرة التبولوجية $(G,*)$ تسمى شبه زمرة لأن النظام الرياضي $(A,*)$ تجميعي .
نقدم تعريف شبه الزمـرة المفـعمة بـشدة الغير مذكور في المصادر .

تعريف (2-20):-
اذا كانت G زمــرة تــبولوجية و A شـبه زمـرة في G فـان A تسـمى شبه زمـرة مفـعمة بـشدة (Strongly Semi-Group) اذا وجدت مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $gK \subset A$ او $Kg \subset A$ لكل $g \in G$.
القضية التالية تبين عــلاقة الزمرة الجزئية الرابطة بشبه الزمرة المفعمة بشدة.
قضية (2-21):-
أذا كانت $(G,*)$ زمرة تبولوجية ، A زمرة جزئية رابطة فأن A شبه زمرة مفعمة بشدة.
البرهان:
نفرض A مجموعة رابطة توجد مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $G = AK$ لكل $g \in G$ هناك $a \in A, k \in K$ بحــيث $g = ak$ ، $gk^{-1} = a$ وكـذلك $gK^{-1} \subset A$ بما أن K مــجموعة مرصوصة من القضــية (2-6) K^{-1} مــجموعة مرصوصة ،بــماأن A زمــرة جزئية فــأن A شبه زمرة مفعمة بشدة.

القضية التالية تبين عــلاقة شبه الزمرة المفعمة بشدة بالرابطة .
قضية (2-22):-
أذا كانت $(G,*)$ زمرة تبولوجية ، $A \subset G$ شبه زمرة مفعمة بشدة فأن A رابطة.
البرهان:
نفرض A شبه زمرة مفعمة بشدة توجد مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $gK \subset A$ لكل $g \in G$ هناك $k \in K, a \in A$ بحيث $gk = a, g = ak^{-1}, g \in AK^{-1}, G \subset AK^{-1}$ بماأن K مجموعة مرصوصة من قضية (2-6) K^{-1} مجموعة مرصوصة جزئية من G بماأن $A, K^{-1} \subset G$ و* عملية ثنائية على G ، $AK^{-1} \subset G$ ، $G = AK^{-1}$ ، A رابطة.
نتيجة (2-23):-
أذا كانت A شبه زمرة مفعمة بشدة من الزمرة التبولوجية G فأن $gK \cap A \neq \phi$.
البرهان :
نفرض A شبه زمرة مفعمة بشدة توجد مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $gK \subset A$ لكل $g \in G$ هناك $k \in K, a \in A$ بحيث $gk = a$, و كذلك $a \in gK$ وبذلك يكون $gK \cap A \neq \phi$.

نــقدم تعريف الــمجموعة المفــعمة بــشدة الغير مــذكور في المصادر .

تعريف (2-24) :-
اذا كانت A مــجموعة جزئية من الــزمرة التبولوجية G فإن A تسمى مــجموعة مفــعمة بشدة(Strongly Replete Set) أذا وجدت مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $g_1 K g_2 \subset A$ لكل $g_1, g_2 \in G$.

القضية التالية تــبين عــلاقة المــجموعة الرابــطة بالمفعــمة بــشدة .
قضية (2-25):-
أذا كانت $(G,*)$ زمرة تبولوجية ، A مجموعة جزئية رابطة فأن Ag_1 مفعمة بشدة.
البرهان :
نفرض A رابطة توجد مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $G = AK$ لكل $g \in G$.
هناك $k \in K, a \in A$ بحيث $gk^{-1} = a, g = ak$ ، $gk^{-1}g_1 = ag_1$ لكل $g_1 \in G$ ، وكذلك $gK^{-1}g_1 \subset Ag_1$ بماأن K مجموعة مرصوصة من قضية (2-6) K^{-1} مجموعة مرصوصة جزئية من G ،بماأن $A \subset G$ أذن Ag_1 مجــموعة جزئية مــفعمة بــشدة .

النتيجة التالية تــبين عــلاقة شبه الزمرة المفعمة بشدة بالمفعــمة بــشدة .

نتيجة (2-26):-

أذا كانت $(G,*)$ زمرة تبولوجية ، $A \subset G$ شبه زمرة مفعمة بشدة فأن Ag_1 مجموعة مفعمة بشدة.

البرهان :

نفرض أن A شبه زمرة مفعمة بشدة توجد مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $gK \subset A$ لكل $g \in G$ هناك $k \in K, a \in A$ بحيث $gk = a$ $gkg_1 = ag_1$ لكل $g_1 \in G$ $gkg_1 \in Ag_1$ وكذلك $gKg_1 \subset Ag_1$ بماأن $A \subset G$ فأن $Ag_1 \subset G$ أذن Ag_1 مجموعة مفعمة بشدة.

نتيجة(2-27):-

أذا كانت A مجموعة جزئية مفعمة بشدة من الــزمرة التبولوجية Gفأن $gKg_1 \cap A \neq \phi$.

البرهان:

نفرض A مجموعة جزئية مفعمة بشدة توجد مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث $g_1Kg_2 \subset A$ لكل $g_1, g_2 \in G$ هناك $k \in K, a \in A$ بحيث $g_1kg_2 = a$, و كذلك $a \in g_1Kg_2$ وبذلك يكون $g_1Kg_2 \cap A \neq \phi$.

القضية التالية تبين علاقة المجموعة الجزئية المفعمة بشدة بالزمرة التبولوجية المفعمة بشدة .

قضية (2-28):-

أذا كانت A مجموعة جزئية مفعمة بشدة من الــزمرة التبولوجية Gفأن G زمرة تبولوجية مفعمة بشدة.

البرهان:

لتكن $A \subset G$ بماأن A مجموعة مفعمة بشدة من النتيجة (2-27) $g_1Kg_2 \cap A \neq \phi$ ،كذلك $g_1Kg_2 \cap A \subset g_1Kg_2 \cap G$ ، $g_1Kg_2 \cap G \neq \phi$ ،لكل $g \in G$ هناك $k \in K$ بحيث $g_1kg_2 = g$ ، $g_1Kg_2 \subset G$, فأن G زمرة تبولوجية مفعمة بشدة لكل $g_1, g_2 \in G$.

المصادر الأجنبية:

[1] **Gottschalk, W. H and Hedlund,G.A**. Topological Dynamics, American Mathematical Society (1955).

[2**] Higgins, P.** J , An Introduction to Topological Groups,Cambridge University Press(1974).

[3] **Jezierski, J and Marzantowicz, W** , Homotopy Methods in Topological Fixed and Periodic Point Theory, Springer Published(2006).

[4] **Merino,O and Kulenovic,M**, Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica,CRC Press Published(2002)