الرياضيات المتقدمة

لطلبة كلية الادارة والاقتصاد

المرحلة الثانية/قسم الاحصاء

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

تأليف

م.وفاء عبد الصمد عاشور
علوم رياضيات

أ.م.ندى بدر جراح
علوم حاسبات

الرياضيات المتقدمة

لطلبة كلية الادارة والاقتصاد

تأليف

م. وفاء عبد الصمد عاشور
علوم رياضيات

أ.م. ندى بدر جراح
علوم حاسبات

المرحلة الثانية / قسم احصاء

الطبعة الثانية 2019م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا

فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ

وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

صدق الله العظيم

اهداء

من بين طيات هذا العمل نرجو من الله العلي القديران يتقبله منا خالصاً لوجهه الكريم .. وان نكون قد وفينا الحق في تقديمه كمرجع لمادة الرياضيات المتقدمة ليُدرس في قسم احصاء في كلية ادارة والاقتصاد.

فالى من علموا حروفاً من ذهب وكلمات من درر وعبارات من أسمى وأجلى عبارات في العلم

الى من صاغو علمهم حروفاً ومن فكرهم منارة تُنير مسيرة العلم والنجاح

الى الشموع التي ذابت في كبرياء لتُنير كل خطوة وتُذلل كل عائق مُمهدة الطريق الى ذروة العلم

الى من كانوا رسلاً للعلم والاخلاق

الى الاساتذة الكرام

المقدمة

يتمتع علم الرياضيات بجاذبية خاصة وسحر اخاذ وبريق مبهر فهو مادة ايقاظ الفكر وشحذ المواهب وبناء العقول ، وان مادة الرياضيات تدخل في جميع مجالات الحياة وتتغلغل بها وتنقل الناس من عالم الى عالم اخر...

وبالرغم من ان الرياضيات مادة مشوقة ، تميل النفس الى دراستها والبحث فيها الا انها في كثير من الاحيان تكون حجر عثرة امام الكثيرين منا ، وذلك بسبب عدم استيعاب لاصولها ونظريتها وقوانينها

ونحنُ في هذا الكتاب نأمل ان نضيء ولو شمعة لتُنير ما هو معتم على طلبتنا الاعزاء

وكانت فكرة تأليف هذا الكتاب ليعتبر مصدر مساعد في تدريس مادة الرياضيات المتقدمة لطلبة المرحلة الثانية / قسم الاحصاء في كلية الادارة والاقتصاد ولعدم وجود كتاب منهجي يضم المفردات حسب منهج وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

كما ويحتوي هذا الكتاب على عدد كبير من الامثلة التوضيحية لكل موضوع يُطرح وفي نهاية كل فصل توجد مجموعة من الاسئلة لاختبار مدى استيعاب الطالب .

يتناول الكتاب مادة الرياضيات المتقدمة في ثمان فصول وهي بأيجاز:

الفصل اول : المجموعات والعمليات على المجموعات .

الفصل الثاني : العلاقات وانواعها ومبرهنات تتعلق بانواع العلاقات .

الفصل الثالث : الدوال وانواعها

الفصل الرابع : حقل الاعداد الحقيقية والعملية الثنائية وانواعها والزمرة وبعض مبرهناتها اضافة الى خاصية ارخميدس ومتراجحة كوشي شوارتز

الفصل الخامس: الغاية والاستمرارية

الفصل السادس: المشتقة وقاعدة لوبيتال ونظرية القيمة الوسطى

الفصل السابع : المتتابعات وانواعها ومبرهنات لانواع المتتابعات

الفصل الثامن : المتسلسلات اللانهائية وانواعها واختبارات التقارب

والله ولي التوفيق

المحتويات

الموضوع		الصفحة
	الفصل الاول : المجموعات	
1.1	مقدمة	13
1.2	المجموعة	13
1.3	طرق التعبير عن المجموعة	13
1.4	مجاميع الاعداد	14
1.4.1	مجموعة الاعداد الطبيعية	14
1.4.2	مجموعة الاعداد الصحيحة	14
1.4.3	مجموعة الاعداد النسبية	15
1.4.4	مجموعة الاعداد غير النسبية	15
1.4.5	مجموعة الاعداد الحقيقية	15
1.5	المجموعة الخالية	15
1.6	المجموعة الجزئية	15
1.7	تساوي المجموعات	16
1.8	مبرهنة (1-1)	17
1.9	المجموعة المنتهية	17
1.10	المجموعة الشاملة	17
1.11	خصائص المجموعة الجزئية	18
1.12	مخططات فين	18
1.13	اتحاد المجموعات	18
1.14	تقاطع المجموعات	19
1.15	مبرهنة (1-2)	20
1.16	مبرهنة (1-3)	21
1.17	مبرهنة (1-4)	23
1.18	المجموعة المتممة	24
1.19	خصائص المتممة	24

	الموضوع	الصفحة
1.20	مبرهنة (5-1)	25
1.21	الفرق بين المجموعتين	25
1.22	خصائص الفرق	26
1.23	مبرهنة (6-1)	26
1.24	مبرهنة (7-1)	27
	اسئلة الفصل الاول	32-28
	الفصل الثاني : العلاقات	
2.1	مقدمة	33
2.2	الزوج المرتب	33
2.3	الضرب الديكارتي	33
2.4	مبرهنة (1-2)	34
2.5	مبرهنة (2-2)	34
2.6	مبرهنة (3-2)	35
2.7	مبرهنة (4-2)	36
2.8	العلاقة	36
2.9	المنطق والمدى للعلاقة	37
2.10	العلاقة العكسية	38
2.11	مبرهنة (5-2)	38
2.12	انواع العلاقات	39
2.12.1	العلاقة الانعكاسية	39
2.12.2	العلاقة المتناظرة	39
2.12.3	العلاقة المتعدية	39
2.12.4	علاقة التكافؤ	39
2.13	العلاقة التخالفية	41
2.14	مبرهنة (6-2)	43
2.15	علاقة الترتيب الجزئي	43
2.16	علاقة الترتيب الكلي	44
2.17	تركيب العلاقات	46

2.18	مبرهنة (2-7)	47
2.19	مبرهنة (2-8)	50
	اسئلة الفصل الثاني	51-58

الفصل الثالث : الدوال

3.1	مقدمة	59
3.2	الدالة	59
3.3	مدى الدالة	60
3.4	بيان الدالة	60
3.5	تساوي الدوال	60
3.6	انواع الدوال	62
3.6.1	الدالة الشاملة	62
3.6.2	الدالة المتباينة	63
3.6.3	الدالة المتقابلة	64
3.6.4	الدالة الذاتية	65
3.6.5	الدالة الثابتة	65
3.6.6	دالة الاحتواء	66
3.6.7	دالة القيمة المطلقة	66
3.6.8	الدالة العكسية	66
3.7	مبرهنة (3-1)	68
3.8	مبرهنة (3-2)	70
3.9	مبرهنة (3-3)	70
3.10	المجموعة النظيرة	71
3.11	مبرهنة (3-4)	72
3.12	تركيب الدوال	73
3.13	مبرهنة (3-5)	74
3.14	مبرهنة (3-6)	74
3.15	مبرهنة (3-7)	75
3.16	مبرهنة (3-8)	75

3.17	مبرهنة (9-3)	75
3.18	مبرهنة (10-3)	75
3.19	نتيجة	76
3.18	أسئلة الفصل الثالث	79-77
	الفصل الرابع : الاعداد الحقيقية	
4.1	مقدمة	80
4.2	العملية الثنائية	80
4.3	النظام الرياضي	81
4.3.1	انواع العمليات الثنائية	82
4.4	الزمرة	83
4.5	بعض مبرهنات الزمرة	87
4.5.1	مبرهنة (1-4)	87
4.5.2	مبرهنة (2-4)	87
4.5.3	مبرهنة (3-4)	88
4.5.4	مبرهنة (4-4)	88
4.5.5	مبرهنة (5-4)	89
4.6	حقل الاعداد الحقيقية	90
4.6.1	الحقل	90
4.7	مجموعة الاعداد النسبية	91
4.8	مجموعة الاعداد غير النسبية	92
4.8.1	خاصية الترتيب	93
4.8.2	خاصية ارخميدس	93
4.8.3	متراجحة كوشي-شوارتز	93
4.9	القيمة المطلقة	94
4.9.1	مبرهنة (6-4)	95
4.9.2	مبرهنة (7-4)	95
4.9.3	مبرهنة (8-4)	96
4.10	الفضاء الاقليدي	96

4.10.1	العمليات الجبرية على R^n	96
4.10.2	خصائص المعيار	79
4.11	الفضاء المتري	99
4.12	انواع الفضاءات المترية	99
4.13	الزمر الجزئية	102
4.14	مبرهنة (4-9)	102
4.15	مبرهنة (4-10)	103
4.16	مبرهنة (4-11)	103
4.16.1	نتيجة	103
4.17	مبرهنة (4-12)	104
4.17.1	نتيجة	104
	اسئلة الفصل الرابع	110-106

الفصل الخامس : الغاية والاستمرارية

5.1	مقدمة	111
5.2	تعريف الغاية	112
5.3	مبرهنة (5-1)(وحدانيةالغاية)	114
5.4	مبرهنة (5-2)	114
5.5	مبرهنة (5-3)	115
5.6	مبرهنة (5-4)	119
5.7	مبرهنة (5-5)	119
5.8	مبرهنة (5-6)	120
5.9	الغاية من جهة واحدة	121
5.10	الغاية اليمنى	122
5.11	الغاية اليسرى	122
5.12	دالة الصحيح الاعظم	123
5.13	مبرهنة (5-7)	124
5.14	الاقتراب الى المالانهاية	127
5.15	مبرهنة (5-8)	129
5.16	مبرهنة (5-9)	130

5.17	مبرهنة (5-10)	130
5.18	الاستمرارية	133
5.19	الدالة المستمرة	133
5.20	الدالة المستمرة دائماً	134
5.21	مبرهنة (5-11)	135
5.22	مبرهنة (5-12)	135
5.23	الاستمرارية في فترة	136
5.24	مبرهنة (5-13)	137
5.25	الدالة المستمرة في العدد	137
5.26	مبرهنة (5-14)	138
5.27	مبرهنة (5-15)	138
	اسئلة الفصل الخامس	143-140

الفصل السادس : المشتقة

6.1	مقدمة	144
6.2	المشتقة	144
6.3	قواعد الاشتقاق	146
6.4	مبرهنة (6-1)	146
6.5	الدالة المركبة	147
6.6	قاعدة السلسلة	148
6.7	مشتقة الدالة الضمنية	148
6.8	المشتقات من الرتب العليا	149
6.9	مبرهنة (6-2)	151
6.10	قاعدة اللوبيتال	152
6.11	مبرهنة رول	155
6.12	مبرهنة (6-3)	156
6.13	القيمة العظمى	157
6.14	مبرهنة (6-4)	157
6.15	مبرهنة رول (6-5)	157
6.16	مبرهنة القيمة المتوسطة(6-6)	160

6.17	التقريب باستخدام نظرية القيمة المتوسطة	162
6.18	نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة	163
	اسئلة الفصل السادس	167-165
	الفصل السابع : المتتابعات	
7.1	مقدمة	168
7.2	المتتابعة	168
7.3	مدى المتتابعة	170
7.4	المتتابعة المقيدة	170
7.5	المتتابعة الرتيبة	171
7.6	المتتابعة المتقاربة	172
7.7	مبرهنة (7-1)	176
7.8	مبرهنة (7-2)	177
7.9	مبرهنة (7-3)	178
7.10	المتتابعة الاساسية (الكوشية)	179
7.11	مبرهنة (7-4)	180
7.12	مبرهنة (7-5)	181
7.13	مبرهنة (7-6)	181
7.14	مبرهنة (7-7)	185
7.15	المتتابعة الجزئية	186
7.16	مبرهنة(7-8)	186
	اسئلة الفصل السابع	188-187
	الفصل الثامن : المتسلسلات اللانهائية	
8.1	مقدمة	189
8.2	المتسلسلة اللانهائية	189
8.3	المتسلسلة التلسكوبية	190
8.4	المتسلسلة المتقاربة	190
8.5	مبرهنة (8-1)	195
8.6	مبرهنة (8-2)	195
8.7	المتسلسلة الهندسية	196

8.8	مبرهنة (8-3)	196
8.9	المتسلسلة الموجبة الحدود	198
8.10	المتسلسلة المتذبذبة	198
8.11	مبرهنة (8-4)	198
8.12	مبرهنة (8-5)	199
8.13	مبرهنة (8-6)	199
8.14	مبرهنة (8-7)	200
8.15	اختبارات التقارب	201
8.16	اختبار القوى	201
8.17	اختبار المقارنة	202
8.18	مبرهنة (8-8)	202
8.19	اختبار التكامل	205
8.20	اختبار المتسلسلة المتذبذبة	213
8.21	مبرهنة (8-9)	213
8.22	التقارب المطلق والتقارب الشرطي	215
8.23	مبرهنة (8-10)	216
8.24	اختبار النسبة	217
8.25	اختبار الجذر	219
8.26	متسلسلة القوى	221
8.27	متسلسلة تايلور وماكلورين	224
	اسئلة الفصل الثامن	232-229
	جدول الرموز	233
	المصادر	236-234

الفصل الأول
المجموعات SETS

1.1 مقدمة

يعتبر مفهوم المجموعة من المفاهيم الاولية الغير قابلة للتعريف لان اي محاولة لتعريف المجموعة تؤدي الى استخدام كلمات مرادفة لها مثلاً اسرة، جملة ، لفيف ، تجمع .

1.2 المجموعة

هي تجمع من الاشياء المحددة والمعرفة تعريفاً تاماً وكل منها يسمى عنصراً ، ويُرمز للمجموعات بحروف لاتينية كبيرة مثل A، B، C ، D، **.....**الخ وعناصرها بحروف صغيرة a ، b ، c ، d ، .....الخ .وعادة ما تُكتب هذه العناصر بين قوسين من النوع {} وتوضع فواصل بينها ،فبهذا التعريف نكتب المجموعة A التي عناصرها $-2,0,1,\pi$ كالتالي:

$$A=\{-2,0,1,\pi\}$$

1.3 طرق التعبير عن المجموعة

توجد طريقتان للتعبير عن المجموعة وهي كما يلي :

(1) يمكن تعريف المجموعة بذكر جميع عناصرها وبدون تكرار ، فأذا رمزنا لمجموعة حروف كلمة (basra) بالرمز X فأن :

$$X=\{b,a,s,r\}$$

(2) يمكن تعريف المجموعة بذكر الخواص التي تُميز عناصرها ، فمثلاً وكما في المثال اعلاه يمكن كتابة المجموعة X بالشكل :

X = { x : (basra) حرف من حروف كلمة x}

والتي تقرأ X هي مجموعة العناصر x ، حيث ان x حرف من حروف كلمة basra.

مثال : اذا كانت $x=\{3,6,9,12,15,18,21\}$
فأن x تعني مجموعة كل مضاعفات العدد 3 الاقل من 24. ويمكن كتابتها بشكل اخر
$X = \{ x :$ x يمثل عدد من مضاعفات العدد 3 الاقل من 24 $\}$

ملاحظة : يستخدم الرمز $\in$ (الانتماء) للتعبير عن علاقة عنصر في المجموعة فأذا قلنا ان $a \in X$ فهذا يعني ان a عنصر من عناصر المجموعة X .
بالمثل يمكن التعبير عن عدم انتماء عنصر للمجموعة بالشكل $b \notin x$

مثال : لتكن $x=\{2,4,6\}$ فأن $2 \in X$ لكن $3 \notin x$

1.4 مجاميع الاعداد

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع العديد من المجموعات التي كل منها توسيع وامتداد لسابقتها .
وقد سبق لك عزيزي الطالب دراستها في مراحل التعليم السابقة ، وفيما يلي تذكير وتأصيل هذه المجموعات

1.4.1 مجموعة الاعداد الطبيعية Natural Numbers

وهي مجموعة الاعداد الاساسية المألوف عليها ويُرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير N وتُعرف كالاتي :

$$N=\{0,1,2,3,4,\ldots..\}$$

1.4.2 مجموعة الاعداد الصحيحة Integer Numbers

وهي مجموعة الاعداد الطبيعية مضافاً اليها مجموعة الاعداد السالبة ويُرمز لها بالحرف Z وتُعرف كالاتي :

$$Z =\{\ldots..,-2,-1,0,1,2,\ \ldots..\}$$

1.4.3 مجموعة الاعداد النسبية او الكسرية Rational Numbers

وهي المجموعة التي تكون فيها الاعداد على شكل كسر لعددين صحيحين (بسط ومقام) بشرط ان لا يساوي المقام فيها الصفر ويُرمز لها بالحرف Q وتُعرف كالاتي :

$$Q = \{\frac{a}{b} \mid b \neq 0, \text{ اعداد صحيحة } b \text{ و } a\}$$

1.4.4 مجموعة الاعداد الغير نسبية Irrational Number

يُرمز لها بالرمز I وتُعرف كالاتي :

I={x| كسر عشري غير منته وغير مدور x}

1.4.5 مجموعة الاعداد الحقيقية Real Number

وتحتوي على مجموعة الاعداد الطبيعية والاعداد الصحيحة والاعداد النسبية والغير النسبية ويُرمز لها بالحرف R وتُعرف كالاتي :

R=IUQ

1.5 المجموعة الخالية

وهي المجموعة التي لا تحتوي على اي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ او { }

مثال: {x عدد صحيح ϕ , $x:x^2=-3$}=

مثال: A={x:x<0 و x>0} هي مجموعة خالية لانه ليس هناك عنصر يحقق الشرط المذكور.

ملاحظة: تعتبر المجموعة الخالية مجموعة وحيدة وجزئية من اي مجموعة اخرى

1.6 المجموعة الجزئية

لتكن A و B مجموعتين يقال ان B مجموعة جزئية من A (Proper subset) اذا كانت محتواة في A ونرمز لها كالاتي: $B \subset A$ ويمكن كتابتها رياضياً كالتالي :

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

اذا كانت $B \subseteq A$ و $A \neq B$ فنقول ان B مجموعة جزئية فعلية من A ونكتب $B \subset A$. اما اذا كانت B ليست مجموعة جزئية من A فنكتب $B \not\subset A$.

مثال : $\{0, 1, 2\} \subset N$ لكن $\{-1, 0, 2\} \not\subset N$

مثال : لتكن المجموعات التالية : $C = \{3,11,12\}$ ، $B = \{5,24\}$ ، $A = \{3,5,11,24\}$ نلاحظ عند مقارنة B و C مع A ان : $B \subset A$ لكن $C \not\subset A$ لان العدد 12 لا ينتمي الى A.

مثال : اذا كانت $A = \{x \mid -2 < x < 2$, عدد صحيح $x\}$ فأن A مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الصحيحة Z اي ان $A \subseteq Z$ حيث ان

$Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

لاحظ ان $A \not\subset N$ حيث ان N مجموعة الاعداد الطبيعية

$N = \{0,1,2,3,\ldots\}$

مثال : لتكن $A = \{2,4,6,8\}$ و $B = \{3,6,9\}$ لاحظ ان

$A \not\subset B$ و $B \not\subset A$

1.7 تساوي المجموعات

يقال ان المجموعتين A و B متساويتين اذا وفقط اذا كانت A مجموعة جزئية من B و B مجموعة جزئية من A اي ان :

$$A = B \longleftrightarrow A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A$$

مثال : اذا كانت

$A = \{ x : (x-2)(x-3) = 0$, عدد صحيح $x\}$

و $B = \{2, 3\}$

لاحظ ان $A = \{2, 3\}$ و $B = \{2, 3\}$

وان $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$ اي ان $A = B$

مثال: هل المجموعتان التاليتان متساويتان :

$A=\{0,1\}$ ، $B=\{x : x \in N , x^2-x=0\}$

الحل : عناصر المجموعة A معروفة ومحددة ولكن علينا تحديد عناصر المجموعة B بحل المعادلة المعطاة:

$$x^2-x= x(x-1)=0 \Longrightarrow x=0 \text{ او } x=1$$

اذن $B=\{0,1\}$ ومنه نستنتج ان $A=B$

1.8 مبرهنة (1-1)

(1) اي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها اي ان $A \subset A$

(2) المجموعة الخالية Φ هي مجموعة جزئية من اي مجموعة كانت A اي ان $\Phi \subset A$

1.9 المجموعة المنتهية

يُقال لمجموعة ما انها منتهية (Finite) اذا كانت خالية او انها تحتوي على عناصر يمكن عدها او حصرها والا فأنها تُسمى غير منتهية (Infinite) .

مثال : A مجموعة الاعداد الطبيعية الاقل من 25 مجموعة منتهية ، بينما مجموعة الاعداد الطبيعية غير منتهية .

$A = \{ 0 , 1 , 2 , 3, \ldots , 24 \}$

$N = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots \}$

1.10 المجموعة الشاملة Universal Set

هي المجموعة التي تكون كل المجموعات قيد البحث جزئية منها ، ويرمز لها بالرمز U.

مثال : اذا كانت $A = \{ 1 , 3 , 5 \}$ ، $B = \{ 2 , 4 , 6 \}$ ،

$C = \{ 1 , 2 , 3 \}$ فأن المجموعة الشاملة بالنسبة للمجموعات A ، B ، C هي :

$U = \{ 1 , 2 , 3 ,4 , 5 , 6 \}$

او ممكن اخذها $U = N = \{ 0 , 1 , 2 , 3 ,4 , 5 , 6 \}$

1.11 خصائص المجموعة الجزئية

1) $\Phi \subseteq A \subseteq U$

2) $A \subseteq A$,

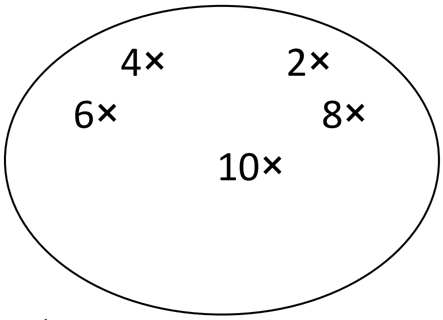
3) $A \subseteq B$ و $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$

4) $A=B \Longrightarrow A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

1.12 مخططات ڤين Venn Diagrams

يمكن تمثيل المجموعة بمنحني مغلق كالدائرة او المستطيل او المربع ويسمى هذا المنحني المغلق بمخطط ڤين .

مثال : المجموعة $A = \{ 2 , 4 , 6 , 8 , 10 \}$ يمكن تمثيلها بمخطط ڤين بالشكل



ملاحظة : مخططات ڤين لا يمكن اعتبارها برهاناً رياضياً فقط يمكن الاستفادة منها في توضيح برهان او مفهوم معين من المفاهيم الرياضية .

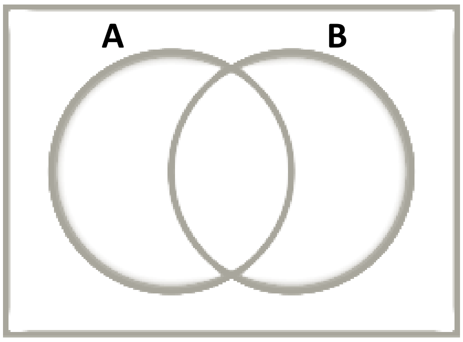
1.13 اتحاد المجموعات Union of sets

لتكن كل من A ، B مجموعة فأن اتحاد A مع B هو مجموعة العناصر التي تنتمي الى A او الى B او الى كليهما ويرمز له بالرمز

$A \cup B$ ويعرف رياضياً كما يلي : $A \cup B = \{ x \mid x \in$ او $x \in B \}$

اي ان $x \in B$ او $x \in A \longleftrightarrow x \in A \cup B$

يمكن توضيح الاتحاد لمجموعتين بمخططات ڤين كالاتي حيث ان الجزء المظلل يمثل الاتحاد :



$A \cup B$

مثال : لتكن المجموعتان $B=\{2,4,6\}$ ، $A=\{1,2,3,5\}$

فأن: $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

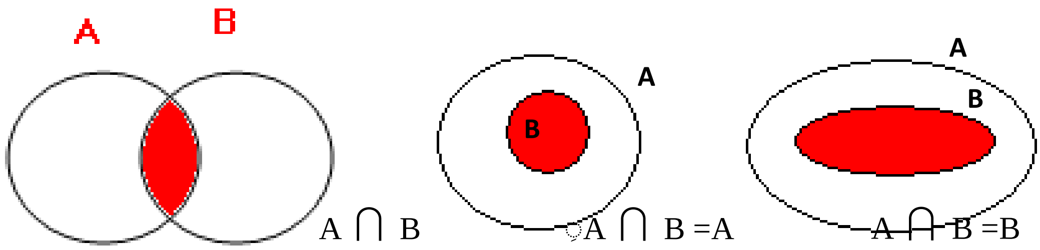
1.14 تقاطع المجموعات Intersection of sets

لتكن A ، B مجموعتين فأن تقاطع A مع B هو مجموعة كافة العناصر المشتركة بين A و B ويرمز له بالرمز $A \cap B$ وتُعرف كما يلي :

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ و } x \in B \}$$

اي ان $x \in B$ و $x \in A \longleftrightarrow x \in A \cap B$

يمكن توضيح التقاطع لمجموعتين بمخططات ڤين كالاتي :



مثال : لتكن المجموعتين $A=\{x: x\in N, x\geq 6\}$ ، $B=\{x: x\in N , x\geq 11\}$

اذاً : $A\cap B=\{x: x\in N , x\geq 11\}$

1.15 مبرهنة (1-2)

(1) $A \cup A = A$ (قانون التحايد)

(2) $A \cup \Phi = A$

(3) $A \cup U = U$

(4) $A \cup B = B \cup A$ (قانون التبادل)

(5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (قانون التجميع)

البرهان : سنبرهن قانون التبادل والتجميع ويترك للقارئ بقية البراهين .

قانون التبادل : يجب ان نبرهن (a) $A \cup B \subseteq B \cup A$

(b) $B \cup A \subseteq A \cup B$

(a) Let $x \in A \cup B \longrightarrow x \in A$ او $x \in B$

باعادة الترتيب $\longrightarrow x \in B$ او $x \in A$

$\longrightarrow x \in B \cup A$

اي ان $A \cup B \subseteq B \cup A$

وبنفس الطريقة نفرض ان

(b) $x \in B \cup A \longrightarrow x \in B$ او $x \in A$

باعادة الترتيب $\longrightarrow x \in A$ او $x \in B$

$\longrightarrow x \in A \cup B$

اي ان $B \cup A \subseteq A \cup B$

من (a) و (b) نحصل على $A \cup B = B \cup A$

قانون التجميع : يجب ان نبرهن

a) $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

b) $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

a) Let $x \in A \cup (B \cup C)$

$\longrightarrow$ $x \in A$ او $x \in (B \cup C)$
$\longrightarrow$ $x \in A$ او $x \in B$ او $x \in C$
$\longrightarrow$ $(x \in A$ او $x \in B)$ او $x \in C$
$\longrightarrow$ $x \in (A \cup B)$ او $x \in C$
$\longrightarrow$ $x \in (A \cup B) \cup C$

أي ان $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

وبنفس الطريقة نبرهن فرع (b)اي ان

$$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$$

اذن من (a) و (b) نحصل على

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

1.16 مبرهنة (1-3)

(1) $A \cap A = A$ (قانون التحايد)

(2) $A \cap \Phi = \Phi$

(3) $A \cap U = A$

(4) $A \cap B = B \cap A$ (قانون التبادل)

(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (قانون التجميع)

البرهان

5) قانون التجميع :

يجب ان نبرهن ان

a) $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$
b) $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

نفرض

a) $x \in A \cap (B \cap C)$

$\longrightarrow$ $x \in A$ و $x \in (B \cap C)$
$\longrightarrow$ $x \in A$ و $x \in B$ و $x \in C$
$\longrightarrow$ $(x \in A$ و $x \in B)$ و $x \in C$
$\longrightarrow$ $x \in (A \cap B)$ و $x \in C$

$\longrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

$\therefore A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

وبنفس الطريقة نفرض ان : $x \in (A \cap B) \cap C$

$\longrightarrow x \in (A \cap B)$ و $x \in C$

$\longrightarrow x \in A$ و $x \in B$ و $x \in C$

$\longrightarrow x \in A$ و ($x \in B$ و $x \in C$)

$\longrightarrow x \in A$ و $x \in (B \cap C)$

$\longrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

اي ان

$(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

اذن من (a) و (b) نحصل على

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

<u>أمثلة :</u>

1) لتكن $A = \{ x \mid$ عدد طبيعي زوجي : $x \}$

$= \{ 0 , 2 , 4 , 6 , \ldots \}$

و $B = \{ x \mid$ عدد طبيعي فردي $x \}$

$= \{ 1 , 3 , 5 , 7 , \ldots \}$

فأن :

$A \cup B = N = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , \ldots\}$

و $A \cap B = \{ \ \} = \Phi$

1) اذا كانت

$A = \{ x \mid x \leq 5$, عدد طبيعي $x \}$

$A = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$

$B = \{ x \mid x \leq 5$, عدد اولي $x \}$

$B = \{ 2 , 3 , 5 \}$

فأن $A \cap B = \{ 2 , 3 , 5 \} = B$

$A \cup B = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \} = A$

1.17 مبرهنة (1-4) Distribution Lows

لتكن كل من A ، B ، C مجموعة فأن :

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

البرهان : 1) يجب ان نبرهن

a) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

نفرض a) $x \in A \cap (B \cup C)$

$\longrightarrow x \in A$ و $x \in (B \cup C)$

$\longrightarrow x \in A$ و $(x \in B$ او $x \in C)$

$\longrightarrow (x \in A$ و $x \in B)$ او $(x \in A$ و $x \in C)$

$\longrightarrow x \in (A \cap B)$ او $x \in (A \cap C)$

$\longrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

اي ان $\therefore A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) وبنفس الطريقة نفرض ان :

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\longrightarrow x \in (A \cap B)$ **او** $x \in (A \cap C)$

$\longrightarrow (x \in A$ و $x \in B)$ او $(x \in A$ و $x \in C)$

$\longrightarrow x \in A$ و $(x \in B$ او $x \in C)$

$\longrightarrow x \in A$ و $x \in (B \cup C)$

$\longrightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

اي ان

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

من (a) و (b) نحصل على

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

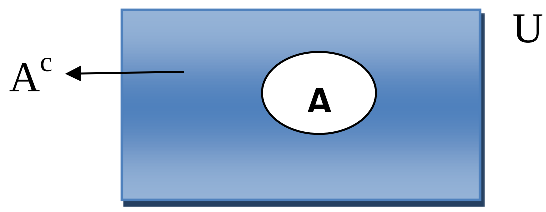
برهان الفرع الثاني يُترك للطالب

1.18 المجموعة المتممة Complement Of A Set

المجموعة المتممة الى المجموعة A هي المجموعة التي عناصرها تنتمي الى المجموعة الشاملة U ولا تنتمي الى A ويرمز لها بالرمز A^c وتُعرف كما يلي :

$$A^c = \{ x \mid x \in U , x \notin A \}$$

وتمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم :



مثال : لتكن المجموعة الشاملة مجموعة الاعداد الطبيعية N وان

$A = \{0 , 1 , 2 , 3 \}$

فأن $A^c = \{ 4 , 5 , 6 , 7 , \ldots\}$

مثال : لتكن المجموعة الشاملة مجموعة الاعداد الصحيحة Z وان

$A = \{ 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , \ldots\}$

فأن $A^c = \{ \ldots , -3 , -2 , -1 , 1 , 3 , 5 , 7 , \ldots \}$

1.19 خصائص المتممة

1) $A^c \cup A = U$, 2) $A^c \cap A = \Phi$, 3) $\Phi^c = U$

4) $U^c = \Phi$, 5) $(A^c)^c = A$

1.20 مبرهنة (1-5)

لتكن A مجموعة فأن $(A^c)^c = A$

البرهان : يجب ان نبرهن $a)\ (A^c)^c \subseteq A$

$b)\ A \subseteq (A^c)^c$

لنفرض $a)\ x \in (A^c)^c$

$\longrightarrow x \notin A^c \longrightarrow x \in A$

اي ان $(A^c)^c \subseteq A$

الان ليكن $b)\ x \in A$

$\longrightarrow x \notin A^c \longrightarrow x \in (A^c)^c$

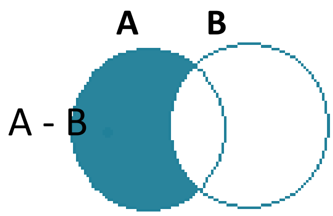
اي ان $A \subseteq (A^c)^c$

اذن من a) و b) نحصل على $(A^c)^c = A$

1.21 الفرق بين المجموعتين The Difference Between Two Sets

تسمى المجموعة التي عناصرها جميع العناصر التي تنتمي الى A ولا تنتمي الى B مجموعة الفرق بين A و B ويرمز لها بالرمز$(A - B)$ وتُعرف بالشكل

$A - B = \{x \mid x \in A$ و $x \notin B\}$



مثال : لتكن N مجموعة الاعداد الطبيعية و N_0 مجموعة الاعداد الطبيعية الفردية فأن

$N - N_0 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\ldots\}$

مثال: لتكن المجموعتين : A={1,5,6,12,20}، B={3,6,12,18,20}
اذا : A-B={1,5}

1.22 خصائص الفرق :

1) $A-A=\phi$, 2) $A-\phi=A$, 3) $A-U=\phi$

4) $A-B=B-A \Leftrightarrow A=B$, 5) $A-B=A \Leftrightarrow A\cap B=\phi$

6) $A-B=\phi \Leftrightarrow A\subseteq B$

1.23 مبرهنة (1-6)

اذا كانت A و B مجموعتين فأن $A - B = B^c - A^c$

البرهان: يجب ان نبرهن a) $A - B \subseteq B^c - A^c$

b) $B^c - A^c \subseteq A - B$

لنفرض a) $x \in A - B$

$\longrightarrow$ $x \in A$ و $x \notin B$

$\longrightarrow$ $x \notin A^c$ و $x \in B^c$

بالترتيب $\longrightarrow$ $x \in B^c$ و $x \notin A^c$

$\longrightarrow$ $x \in (B^c - A^c)$

اي ان $A - B \subseteq A^c - B^c$

الان ليكن b) $x \in B^c - A^c$

$\longrightarrow$ $x \in B^c$ و $x \notin A^c$

$\longrightarrow$ $x \notin B$ و $x \in A$

بالترتيب $\longrightarrow$ $x \in A$ و $x \notin B$

$\longrightarrow$ $x \in (A - B)$

اي ان $B^c - A^c \subseteq A - B$

من a) و b) نحصل على $A - B = B^c - A^c$

1.24 مبرهنة (1-7) قوانين دي – موركان De-Morgan's Lows

اذا كانت A و B مجموعتين ضمن المجموعة الشاملة U فأن :

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

برهان (1) : يجب ان نبرهن

a) $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

b) $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

a) $x \in (A \cup B)^c$

$\longrightarrow x \notin (A \cup B)$

$\longrightarrow x \notin A$ و $x \notin B$

$\longrightarrow x \in A^c$ و $x \in B^c$

$\longrightarrow x \in (A^c \cap B^c)$

اي ان $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

الان ليكن b) $x \in A^c \cap B^c$

a) $x \in A^c$ و $x \in B^c$

$\longrightarrow x \notin A$ و $x \notin B$

$\longrightarrow x \notin (A \cup B)$

$\longrightarrow x \in (A \cup B)^c$

اي ان $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

من (a) و (b) نحصل على $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

برهان (2) يُترك للطالب .

أسئلة الفصل الأول

س1: اذا كانت $A = \{x \in Z \mid x = 4k + 3 , k \in Z\}$ هل ان

(a) $-2 \in A$ (b) $7 \in A$

س2: اذا كانت
$$A = \{x \in Z^+ \mid x = 2y , y \in Z\}$$
$$B = \{x \in Z^+ \mid x = 2y+1 , y \in Z\}$$
$$C = \{x \in Z^+ \mid x = 3y , y \in Z\}$$

أ- تحقق من صحة العبارة التالية: $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

ب- جد $A \cap C$ ، $B \cup C$

س3: لتكن كل من A ، B مجموعة برهن ان :

أ- $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$

ب- $A \cup (A\cup B^c)^c = A\cup B$

س4: ليكن كل من A، B ، C مجموعة فأن

$$A- (B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$$

س5: اي من الجمل التالية تحدد مجموعة رياضية :

أ- مجموعة القاعات الكبيرة داخل الكلية.

ب- مجموعة الاعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على 5.

ت- مجموعة الاعداد الطبيعية التي هي اكبر من 1 واصغر من 2.

ث- مجموعة الطلبة الاذكياء في الكلية.

س6: اذكر عناصر المجموعات التالية:

(1) $A=\{x:x\in N,3<x<12\}$

(2) $B=\{x:x\in N,x$ فردي ، $3\leq x<11\}$
(3) $C=\{x:x\in N,4x-3=1\}$
(4) $D=\{x:x|\in N,x+1=0\}$
(5) $E=\{x:x=5n-6,n\in N,1\leq n<5\}$
(6) $A=\{x:x\in N,\ \sqrt{x^2+1}=2\}$

س7: عبر عن المجموعات التالية بذكر الخواص التي تُميز عناصرها:
(1) $A=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$
(2) $B=\{0,4,8,12,16,\ldots\ldots\}$
(3) $C=\{\ldots,-10,-5,0,5,10,\ldots\}$
(4) $D=\{1,4,9,16,25,36,49\}$

س8: لتكن المجموعات التالية :
Φ, $A=\{1\}$, $B=\{1,3\}$, $C=\{1,3,5\}$, $D=\{1,2,3,4,5\}$,
$E=\{1,3,5,7,9\}$, $U=\{1,2,\ldots.,8,9\}$
أملأ الفراغات التالية بالرمز المناسب :
1) Φ…..A , 2)A…..B , 3)B…..C , 4)B…..E ,
5)C…..D , 6)C…..E, 7)D…..E , 8)D…..U

س9: هل العبارات التالية صحيحة ام خاطئة :
(1) $a=\{a\}$, (2) $5\in\{5\}$, (3) $9\in\{1,3,6,\ldots.\}$, (4) $\Phi\subseteq A$

(5) $A\not\subset U$, (6) $\Phi\in\{\Phi\}$, (7) $4\in\{1,2,3,\{4\}\}$, (8) $7\notin\{3,4,2,\{5\}\}$

س10: لتكن المجموعة الشاملة $U=\{1,2,\ldots,9\}$ والمجموعات التالية :
$A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{4,5,6,7\}$ $C=\{5,6,7,8,9\}$
$D=\{1,3,5,7,9\}$ $E=\{2,4,6,8\}$ $F=\{1,5,9\}$

أ- جد كل من : a) $B\cup D$ و $B\cap D$ b) $A\cup B$ و $A\cap B$
c) $A\cup C$ و $A\cap C$ d) $D\cup E$ و $D\cap E$ e) $E\cup F$ و $E\cap F$
f) $D\cup F$ و $D\cap F$ g) A^c,B^c,C^c,D^c h) A-B

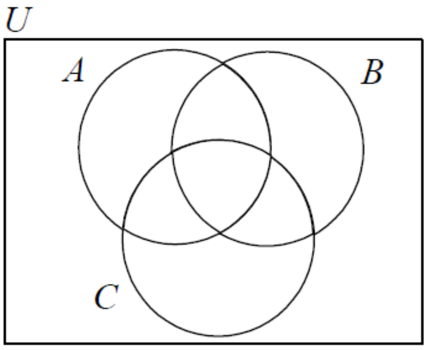
l) $B-A$ k) $D-E$ j) $F-D$ i) $A\cap(B\cup E)$
m) $(A-E)^c$ n) $(A\cap D)^c-B$ o) $(B\cap F)\cup(C\cap E)$

ب- جد ما يلي :

c) $A\cap B\cap A^c$ b) $(A^c\cup \Phi)\cup A$ a) $(A\cup B)\cap B^c$
g) $(A\cap U)\cup A^c$ f) $A\cup B\cup A^c$ e) $(A\cup B)^c\cup A^c\cap B$
h) $[(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)]\cap B$

س11: لتكن A و B مجموعتين باستخدام اشكال فن ظلل $A\cap B^c$ و $(B-A)^c$ في كل من الحالات التالية : a) $A\cap B\neq\Phi$, b) $A\cap B=\Phi$, c) $B\subset A$

س12: بين قانون توزيع التقاطع على الاتحاد وقانون دي موركان باستخدام اشكال فن؟



س13: بين ان : $(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A$

س14: اذا كان $A-B=A\cap B^c$ اثبت ان: $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$

س15: الرسم التالي يبين ثلاثة مجموعات A,B,C ظلل التالي :

a) $A-(B\cup C)$ b) $A^c\cap(B\cup C)$
c) $A^c\cap(C-B)$

س16: ضع علامة(✓)او(×) امام العبارات التالية :

$(iii)\{\phi\}\in\{\{\phi\}\}$ $(ii)\phi\notin\phi$ $(i)\phi\subseteq\phi$

$(vi)P(\{\phi\})=\{\phi,\{\phi\}\}$ $(v)P(\phi)=\{\phi\}$ $(iv)\{\phi\}\not\subset\{\{\phi\}\}$

$(vii)P(\{0,1\})=\{\phi,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

س17: اكتب احد الرمزين$\{\in,\subseteq\}$في الفراغات التالية بحيث تصبح الجملة صحيحة؟

أ) $\{\phi,\{\phi\}\}$..........$\{\phi\}$ ب) $\{\phi,\{\{\phi\}\}\}$..........$\{\phi\}$

ج) $\{\phi,\{\phi\}\}$..........$\{\{\phi\}\}$ د) $\{\phi,\{\{\phi\}\}\}$..........$\{\{\phi\}\}$

س18: اكمل ما يلي :

أ)$\{x:x\in A, x\in B\}=$.......... ب)$\{x:x\in A \text{ or } x\in B\}=$..........

ج)$\{x:x\neq x\}=$.......... د)$\{x:x\subseteq A\}=$..........

س19: اذا كانت المجموعة $A=\{\phi,\{\phi\},\{1,2\},3\}$ بين اياً من الجمل الاتية صحيح واياً منها خطأ:

$\{1,2\}\subseteq A$ $\phi\in A$ $\phi\subseteq A$ $2\in A$

$\{1,2\}\in A$ $\{\{\phi\}\}\in A$ $\{\phi\}\in A$ $\{\phi\}\subseteq A$

س20: ليكن A،B،C مجموعات غير خالية برهن ان :

1)$A\subseteq B'$ اذا كان واذا كان فقط $A\cap B=\phi$	6) $(A-B)\cap B=\phi$
2) اذا كان $A\subseteq C$،$B\subseteq C$ فأن $C\subseteq A\cap B$	7) $(B-A)\subset A^c$
3) $A\cap(BUC)=A\cap B$ $A\cap C=\phi$	8)$AU(AUB^c)^c=AUB$
4) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$	9)$A\cap(A^cUB)A\cap B$
5)$A\cap(A^cUB)=A\cap B$	10)$A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$

س21: اعط مثالاً لمجموعات A،B،C حيث $AUB=AUC$ ولكن $B\neq C$ ؟

س22: اوجد :1) $\phi\cap\{\phi\}$ 2)$\{\phi\}\cap\{\phi\}$ 3) $\{\phi\{,\phi\}\}-\phi$

س23: ضع علامة(✓)او(×) امام العبارات التالية :

1.اذا كان $AUB\subset AUC$ فأن $B\subseteq C$

2. اذا كان $A\cap B \subset A\cup C$ فأن $B\subseteq C$
3. اذا كان $A\cup C=A\cup B$ فأن $B=C$
4. اذا كان $A\cap B\subset A\cap C$ فأن $B=C$
5. اذا كان $A\subset B$ فأن $(C-A)\subset(C-B)$
6. $A-(B-C)=(A-B)-C$

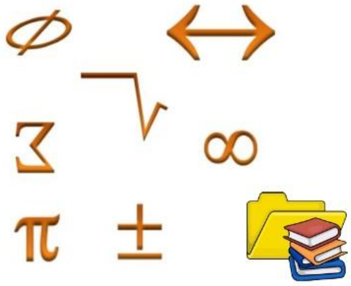
س24: اذا كان A,B,C,D مجموعات ، برهن ان :

1. اذا كان $A\subseteq B$، $C\subseteq D$ فأن $A\cup C\subseteq B\cup D$
2. اذا كان $A\subseteq B$، $B\subseteq C$ فأن $A\subseteq C$
3. اذا كان $A\subseteq B$، $C=B-A$ فأن $A=B-C$
4. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
5. $(A\cup B)'=A'\cap B'$

س25: اذا كان $A=[0,3)$ ، $B=(-1,1)$ اوجد $A\cap B$، $A\cup B$

س26: اذا كان $A=\{X:X^2\geq 5X\}$ ، $B=\{X:|X-2|\geq 3\}$ فأوجد $A\cap B$ ، B^c ، $A-B$ ؟

س27: لتكن A مجموعة ما ، U هي المجموعة الشاملة، ϕ هي المجموعة الخالية، برهن ان : 1) $U^c=\phi$ 2) $\phi^c=U$ 3) $A\cap A^c=\phi$ 4) $A\cup A^c=U$



الفصل الثاني
العلاقات RELATIONS

2.1 مقدمة

يُعد موضوع العلاقات من المواضيع الاساسية والمهمة في مختلف فروع الرياضيات ، والعلاقة كما درسها الطالب سابقاً ، تُمثل مجموعة الازواج المرتبة وهي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين ، ومن المفيد هنا ان نُذكر الطالب بأنواع العلاقات وبعض العمليات الجبرية عليها.

2.2 الزوج المرتب Order Pair

يقال ان $x = (a,b)$ زوج مرتب حيث ان a المسقط الاول للزوج المرتب x وb المسقط الثاني للزوج المرتب x.

ومن المهم معرفة ان الزوج المرتب (a,b) لا يساوي الزوج المرتب (b,a) .

2.3 الضرب الديكارتي Cartesian Product

لتكن كل من A و B مجموعة غير خالية ، فأن حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين A و B هو مجموعة عناصرها لجميع الازواج المرتبة (a,b) حيث ان $a \in A$ و $b \in B$ ويرمز له بالرمز $A \times B$ وبعبارة اخرى

$$A\times B = \{(a,b) | a \in A , b \in B\}$$

مثال : لتكن $A=\{1,2,3,4\}$ و $B =\{a,b\}$

فأن $A\times B= \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,a),(1,b),(2,b),(3,b),(4,b)\}$

وأن $B\times A= \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4)\}$

لاحظ ان $A\times B \neq B\times A$

ملاحظة :

1) اذا كانت المجموعة A تحتوي على m من العناصر وان المجموعة B تحتوي على n من العناصر فأن المجموعة $A\times B$ تحتوي على (mn) من العناصر . ففي المثال اعلاه المجموعة $(A\times B)$ تحتوي على $2(4)=8$ من العناصر وان $B\times A$ تحتوي على $4(2)=8$ من العناصر

2) اذا كانت المجموعة A او المجموعة B تحتوي على عدد غير منتهي من العناصر (مجموعة غير منتهية) فأن $A\times B$ ايضاً تكون غير منتهية.

3) اذا كانت المجموعة A او المجموعة B مجموعة خالية فأن المجموعة $A\times B$ تكون مجموعة خالية.

2.4 مبرهنة (2-1)

لتكن كل من A و B مجموعة غير خالية فأن $A\times B = B\times A$ اذا وفقط اذا $A=B$.

<u>البرهان</u> : نفرض $A=B$

بما ان $A\times A = A\times A$ اذن $A\times B = B\times A$

$A\times B = B\times A$ وليكن $a\in A$

الان نفرض $(a,b) \in A\times B$ (لكل $b\in B$)

وعليه فأن $(a,b)\in B\times A$

اذن $(a,b) \in B\times A \longrightarrow a\in B, b\in A$

وبما ان $a \in A \longrightarrow a \in B$

اذن $A \subseteq B$

وبنفس الطريقة نبرهن ان $B \subseteq A$

اذن $A=B$

2.5 مبرهنة (2-2)

اذا كانت كل من C,B,A مجموعة فأن :

1) $A\times(B\cap C)= (A\times B) \cap (A\times C)$

2) $A\times(B\cup C)= (A\times B) \cup (A\times C)$

<u>البرهان :</u> (1) يجب ان نبرهن

(a) $A\times(B\cap C)\subseteq (A\times B)\cap(A\times C)$

(b) $(A\times B)\cap(A\times C) \subseteq A\times(B\cap C)$

(a) ليكن $(a,b) \in A\times(B\cap C)$

$\longrightarrow$ $a \in A$ و $b \in (B\cap C)$

$\longrightarrow$ $a \in A$ و $(b \in B\ ,\ b \in C)$

$\longrightarrow$ $(a \in A$ و $b \in B)$ و $(a \in A$ و $b \in C)$

$\longrightarrow$ $(a,b)\ (A\times B)$ و $(a,b) A \times C$

$\longrightarrow$ $(a,b) \in (A\times B)\cap(A\times C)$

اذن $A\times(B\cap C) \subseteq (A\times B)\cap(A\times C)$

(b) لنفرض $(a,b) \in (A\times B)\cap(A\times C)$

$\longrightarrow$ $(a,b) \in (A\times B)$ و $(a,b) \in (A\times C)$

$\longrightarrow$ $(a \in A$ و $b \in B)$ و $(a \in A$ و $b \in C)$

$\longrightarrow$ $a \in A$ و $(b \in B$ و $b \in C)$

$\longrightarrow$ $a \in A$ و $b \in (B\cap C)$

$\longrightarrow$ $(a,b) \in A\times(B\cap C)$

اذن

$\longrightarrow$ $(A\times B)\cap(A\times C) \subseteq A\times(B\cap C)$

اذن من (a) و (b) نحصل على

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$$

فرع (2) يترك البرهان للطالب

<u>2.5 مبرهنة (2-3)</u>

لتكن كل من A و B و C مجموعة فأن :

$$(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$$

<u>البرهان</u>: يجب ان نبرهن ان :

(a) $(A\times B)\cap(C\times D) \subseteq (A\cap C)\times(B\cap D)$

(b) $(B\cap D)(A\cap C) \subseteq (A\times B)\cap(C\times D)$

(a) نفرض ان $(x,y) \in (A\times B)\cap(C\times D)$

$\longrightarrow$ $(x,y) \in (A\times B)$ و $(x,y) \in (C\times D)$

$\longrightarrow$ $(x\in A$ و $y \in B)$ و $(x \in C$ و $y \in D)$

$\longrightarrow$ $(x\in A$ و $x \in C)$ و $(y \in B$ و $y \in D)$

$\longrightarrow$ $x \in (A\cap C)$ و $y \in (B\cap D)$

$\longrightarrow$ $(x,y) \in (A\cap C)\times(B\cap D)$

اذن $(A\times B)\cap(C\times D) \subseteq (A\cap C)\times(B\cap D)$

(b) الان نفرض ان $(x,y) \in (A\cap C)\times (B\cap D)$

$x \in (A\cap C)$ و $y \in (B\times D)$

$\longrightarrow$ $(x\in A$ و $x\in C)$ و$(y\in B$ و $y\in D)$

$\longrightarrow$ $(x\in A$ و $y\in B)$ و$(x\in C$ و $y\in D)$

$\longrightarrow$ $(x,y)\in(A\times B)$ و $(x,y)\in(C\times D)$

$\longrightarrow$ $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$

$\longrightarrow$ اذن $(A\cap C)\times(B\cap D) \subseteq (A\times B)\cap(C\times D)$

اذن من (a) و (b) نحصل على:

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times (B\cap D)$$

2.7 مبرهنة (2-4)

الضرب الديكارتي لمجموعة A مع المجموعة الخالية Φ هي مجموعة خالية

اي ان $A\times \Phi = \Phi \times A= \Phi$

البرهان :

اذا لم يكن $A \times \Phi$ مجموعة خالية فأنه يوجد عنصر $(x,y) \in \Phi\times A$

$\longrightarrow$ $x\in\Phi$, $y\in A$

وهذا تناقض لان Φ مجموعة خالية لا تحتوي على عناصر اذن يجب ان تكون A

$\Phi \times = \Phi$

2.8 العلاقة Relation

لتكن كل من A و B مجموعة فأن اي مجموعة جزئية من $A \times B$ تسمى علاقة ، فأذا فرضنا ان R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B فأن

$$R \subseteq A\times B$$

ويمكن التعبير عن العلاقة بأحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الاولى : كتابة عناصرها

الطريقة الثانية : أعطاء الصفة المميزة لعناصرها فتكتب بالشكل :

$R=\{(x,y)|x\in A$ و $y\in B,P(x,y)\}$

حيث ان $P(x,y)$ هي الصفة المميزة لعناصرها

ملاحظة : اذا كان (x,y) عنصراً في R فأننا نعبر عن هذا الانتماء بالرمز xRy ويُقرأ x يرتبط مع y بالعلاقة R واذا لم يكن (x,y) عنصراً في R اي ان R $\not\in (x,y)$ فيكتب $x\not R y$ ويُقرأ (x لا يرتبط مع y بالعلاقة R)

تعريف : تُسمى R علاقة على المجموعة A اذا كانت $R \subseteq A\times A$

مثال : لتكن $A=\{2,3,5,7\}$ و $B=\{4,6,8\}$ وان العلاقة R من A الى B مُعرفة كالاتي : aRb اذا وفقط اذا كان $b=a+1$ حيث ان $a\in A$ و $b\in B$ فأن $R=\{(3,4),(5,6),(7,8)\}$

مثال : اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5,9,16,25\}$ والعلاقة R مُعرفة على المجموعة A كما يلي aRb اذا وفقط اذا كان $b=a^2$ حيث ان $a,b \in A$ فأن $R=\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)\}$

2.9 المنطلق والمدى للعلاقة

لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B.

تسمى مجموعة العناصر الاولى من الازواج المرتبة في R بمنطلق العلاقة R ويُرمز لها بالرمز dom R اي ان :

$$\text{dom } R=\{x : \exists\, y\in B: (x,y)\in R\}$$

تسمى مجموعة العناصر الثانية من الازواج المرتبة في R بمدى العلاقة R ويُرمز لها بالرمز ran R اي ان :

$$\text{ran } R=\{y : \exists\, x\in A: (x,y)\in R\}$$

ونلاحظ ان : $\text{dom } R \subseteq A$ ، $\text{ran } R \subseteq B$

مثال : اذا كانت $A=\{1,2,3\}$، $B=\{a,b\}$ و $R=\{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ علاقة من A الى B فأن $\text{ran } R=\{a,b\}$ ، $\text{dom } R=\{1,2,3\}$

مثال : اذا كانت R علاقة على مجموعة الاعداد الحقيقية $\Re$ ومعرفة كالاتي :

$R=\{(x,y)\in \Re^2 :y=x\}$ فأن $\text{dom } R=\Re$ ، $\text{ran } R=\Re$

2.10 العلاقة العكسية The Inverse Relation

اذا كانت R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B فأن العلاقة العكسية لـR هي علاقة من B الى A معرفة بمجموعة الازواج المرتبة (b,a) حيث (a,b)ЄR ويرمز لها بالرمز R^{-1} اي ان

$$R^{-1}=\{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

مثال : لتكن $A=\{2,3,5\}$ و $B=\{2,4,6\}$

و $R=\{(2,2),(2,4),(3,6)\}$

فأن $R^{-1}= \{(2,2),(4,2),(6,3)\}$

2.11 مبرهنة (2-5)

لتكن R علاقة على A فأن $(R^{-1})^{-1}= R$

البرهان : نفرض ان $(x,y) \in (R^{-1})^{-1}$

$(x,y) \in R \longrightarrow (y,x) \in R^{-1} \longrightarrow$

اي ان $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$

الان ليكن $(x,y) \in R$

$(x,y) \in (R^{-1})^{-1} \longrightarrow (y,x) \in R^{-1} \longrightarrow$

اي ان $R \subseteq (R^{-1})^{-1}$

اذن $R =(R^{-1})^{-1}$

ملاحظة: بما ان العلاقة هي مجموعة فأنه ما يصح على المجموعات يجوز ايضاً على العلاقات كالاتحاد والتقاطع او الفرق بين علاقتين.

لنفرض ان R وQ علاقة من A الى B اي انه

$$R \subseteq A \times B \text{ و } Q \subseteq A \times B$$

فأنه

$$R\cup Q \subseteq A \times B,\ R\cap Q \subseteq A\times B;\ (R-Q) \subseteq A\times B$$

اي ان RUQ و R∩Q و R-Q علاقة من A الى B وتُعرف كالاتي :

$$R\cap Q=\{(x,y) \in A \times B \mid (x,y)\in R \text{ و } (x,y) \in Q\}$$

$$R\cup Q=\{(x,y) \in A \times B \mid (x,y)\in R \text{ أو } (x,y) \in Q\}$$

$R-Q=\{(x,y) \in A \times B|(x,y)\in R$ و $(x,y) \notin Q\}$

مثال: لتكن كل من R، Q علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية

$R=\{(x,y)\in R\times R|x+y =5\}$

$Q=\{(x,y)\in R\times R|2x-y =4\}$

فأنه $R\cap Q=\{(x,y)\in R\times R|x+y =5$ و $2x-y=4\}$

$RUQ=\{(x,y)\in R\times R|x+y =5$ أو $2x-y=4\}$

اي ان $R=\{1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(10,-5),(-5,10),\ldots\}$

$Q=\{(1,-2),(2,0),(3,2),(4,4),(5,6),(6,8),(-5,-14),\ldots.\}$

$RUQ=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(1,-2),(2,0),(4,4),\ldots.\}$

$R\cap Q=\{(3,2)\}$

2.12 انواع العلاقات

2.12.1 العلاقة الانعكاسية Reflexive Relation

تُسمى R علاقة انعكاسية على المجموعة A اذا وفقط اذا كان لكل $a\in A$ يكون $(a,a) \in R$.

2.12.2 العلاقة المتناظرة Symmetric Relation

تُسمى R علاقة متناظرة على المجموعة A اذا وفقط اذا كان

$(b,a)\in R \longleftrightarrow (a,b) \in R$

2.12.3 العلاقة المتعدية Transitive Relation

تُسمى R علاقة متعدية على المجموعة A اذا وفقط اذا كان

$(a,b)\in R$ و $(b,c) \in R \longrightarrow (a,c) \in R$

2.12.4 علاقة التكافؤ Equivalent Relation

تُسمى R علاقة تكافؤ على المجموعة A اذا وفقط اذا كان كانت R علاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية .

مثال : لتكن كل من R وT علاقة متناظرة على مجموعة ما ، برهن على ان العلاقة $R\cap T$ علاقة متناظرة على نفس المجموعة ؟

البرهان : لنفرض ان $(x,y) \in R \cap T$
$\longrightarrow$ $(x,y) \in R$ و $(x,y) \in T$
وبما ان R ، T علاقة متناظرة
اذن $(y,x) \in R$ و $(y,x) \in T$
$\longrightarrow$ $(y,x) \in R \cap T$
اذن $R \cap T$ علاقة متناظرة

مثال: اذا كانت $A=\{1,2,3\}$ و R_1 ، R_2 ، R_3 علاقة معرفة على A كالاتي :

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$$
$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)\}$$
$$R_3 = \{(3,1),(2,2),(3,3),(3,2),(1,1),(1,3)\}$$

الحل : (1) العلاقة R_1
أ- R_1 علاقة انعكاسية لان لكل $a \in A$ يكون $(a,a) \in R_1$
ب- R_1 علاقة متناظرة لانه $(1,2) \in R_1$ و $(2,1) \in R_1$
ج- R_1 علاقة متعدية لانه

$$(1,2) \in R_1 \text{ و } (2,1) \in R_1 \longrightarrow (1,1) \in R1$$
$$(1,2) \in R_1 \text{ و } (2,2) \in R_1 \longrightarrow (1,2) \in R1$$

د- $R1$ علاقة تكافؤ لانها انعكاسية ومتناظرة ومتعدية
(2) العلاقة R_2
R_2 ليست انعكاسية لان $(3,3) \notin R_2$ اذن R_2 ليست تكافؤ
(3) العلاقة R_3
أ- R_3 انعكاسية لانهُ لكل $a \in A$ يكون $(a,a) \in R_3$
ب-R_3 ليست متناظرة لانه $(3,2) \in R_3$ لكن $(2,3) \notin R_3$ اذن R_3 ليست تكافؤ.

مثال: لتكن S علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R بالشكل التالي :

$$S =\{(x,y)|x+2y=3\}$$

اختبر العلاقة S من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ، تكافؤ .

<u>الحل</u>: (1) S ليست انعكاسية لانه $2 \in R$ لكن $S \notin (2,2)$ لان
$X+2y=2+2(2)=2+4=6 \neq 3$
(2) S ليست متناظرة لانه $(-1,2) \in S$
لكن $S \notin (2,-1)$ لانه $2+2(-1)=2-2=0 \neq 3$
(3) S ليست متعدية لان $(-1,2) \in S$, $(2,\frac{1}{2}) \in S$
لكن $S \notin (-1, \frac{1}{2})$ اذن S ليست تكافؤ .

<u>مثال</u>: لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الصحيحة كالاتي :
(x-y) يقبل القسمة على 7 $\longleftrightarrow (x,y) \in R$
اثبت ان R علاقة تكافؤ.
<u>الحل</u>: (1) بما ان $x \in Z$ فأن $(x,x) \in R$ لان $x-x=0$ والصفر عدد يقبل القسمة على 7 اذن R علاقة انعكاسية.
(2) اذا كان $(x,y) \in R$ اي ان x-y يقبل القسمة على 7 اذن
$y-x=-(x-y)$
اذن y-x يقبل القسمة على 7 اذن $(y,x) \in R$ اذن R علاقة متناظرة
(3) (x-y) يقبل القسمة على 7 و (y-z) يقبل القسمة على 7 فأن
$x-y+y-z=x-z$
حاصل جمع عددين يقبلان القسمة على 7 عدد اخر يقبل القسمة على 7 اي انه (x-z) يقبل القسمة على 7 ، اذن R علاقة متعدية
اي ان R علاقة تكافؤ.

2.13 العلاقة التخالفية Antisymmetric Relation

يقال للعلاقة R المعرفة على المجموعة A انها علاقة تخالفية اذا تحقق الشرط التالي : $\forall (a,b) \in R$ و $(b,a) \in R \longrightarrow a=b$

<u>مثال</u> :اذا كانت $A=\{1,2,3,4\}$ و R علاقة معرفة على A بالشكل الاتي:
$R=\{(2,1),(1,2),(4,3)\}$
هل ان R علاقة تخالفية ؟
<u>الجواب</u> : R ليست تخالفية لان $(2,1) \in R$ و $(1,2) \in R$ لكن $1 \neq 2$

مثال : اذا كانت S علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية N بالشكل الاتي S
$=\{(a,b) \in N\times N \mid a\geq b\}$ فهل ان S علاقة تخالفية ؟
الجواب :اذا كان $a\geq b$ و $b\geq a$ فان $a=b$ اذن S تخالفية .

مثال : لتكن S علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R بالشكل الاتي:

$$S=\{((a,b),(c,d)) \in (R\times R)\times(R\times R) \mid a+b=c+d\}$$

فان R تكون علاقة تكافؤ على A .

الحل : أ- اذا كان $(a,b) \in R\times R$
فأن $a+b=a+b$
اي ان $\forall\ (a,b) \in R\times R$
$((a,b),(a,b)) \in S$
اذن S علاقة انعكاسية

ب) اذا كان $((a,b),(c,d)) \in R\times R$
وكان $((a,b),(c,d)) \in S$
فأن $a+b=c+d$
اذن $c+d=a+b$
اي ان $((c,d),(a,b)) \in S$
اذن S علاقة متناظرة

ج) اذا كان $(a,b),(c,d),(e,f) \in R\times R$
وكان $((c,d),(e,f)) \in S$ و $((a,b),(c,d)) \in S$
$a+b=c+d$
$c+d=e+f$
اذن $a+b = e+f$
اي ان $((a,b),(e,f)) \in S$
اذن S علاقة متعدية اي ان S علاقة تكافؤ

2.14 مبرهنة (2-6)

اذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة A فأن $RoR=R$

البرهان : ليكن $(x,z)\in RoR$

$\exists y \in A \ni (x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$

بما ان R متعدية اذن $(x,z)\in R$

اي ان $RoR\subseteq R$ ----(a

الان لنفرض $(X,Y) \in R$

وبما ان R علاقة انعكاسية اذن $(x,x)\in R$

$\exists x \in A \ni (x,x) \in R$ و $(x,y) \in R$

اي ان $(x,y) \in RoR$

اذن $R \subseteq RoR$ ---- (b

من (a و (b نحصل على $R= RoR$

2.15 علاقة الترتيب الجزئي Partial ordered Relation

يُقال لعلاقة معرفة على المجموعة A انها علاقة ترتيب جزئي اذا وفقط اذا كانت هذه العلاقة انعكاسية ومتخالفة ومتعدية.

مثال: بين ان العلاقة R المعرفة على N علاقة ترتيب جزئي حيث ان :

$$R=\{(a,b)\in N\times N \mid a\geq b\}$$

الحل : (1) R انعكاسية لان $a\geq a$ لكل $a\in N$

(2) $a\geq b$ و $b\geq a \Longrightarrow a=b$ $\therefore$ R تخالفية

(3) $a\geq b$ و $b\geq c \Longrightarrow a\geq c$ $\therefore$ R متعدية

$\therefore$ R علاقة ترتيب جزئي

مثال: لتكن S علاقة معرفة على N^+ بالشكل

$S=\{(a,b)\in N^+\times N^+ | a/b$ (b يقسم a)$\}$ برهن على ان S علاقة ترتيب جزئي؟

الحل :1) S انعكاسية لان $\forall a\in N^+ , a|a$

2) S تخالفية لان $a|b$ و $b|a \longrightarrow a=b$ $\forall a,b\in N^+$

3) S متعدية لان $a|b$ و $b|c \longrightarrow a|c$ $\forall a,b,c \in N^+$

اذن S علاقة ترتيب جزئي.

2.16 علاقة الترتيب الكلي Total ordered Relation

يُقال للعلاقة المعرفة على المجموعة A انها علاقة ترتيب كلي اذا كانت R علاقة ترتيب جزئي و لكل $a,b \in A$ اما $(a,b) \in R$ او $(b,a) \in A$.

مثال : لتكن $A=\{1,2,3,4,12\}$ برهن ان علاقة ($\geq$) علاقة ترتيب كلي $R=\{(a,b) \in AxA|a\leq b\}$ ؟

الحل :1) R انعكاسية لان $a\leq a$ لكل $a \in A$.
2) R تخالفية لان $a\leq b$ و$b\leq a$ فأن $a=b$
3) R متعدية لان $\forall$ $a,b,c \in A$ فأنه اذا كان $a\leq b$ و$b\leq c$ فأن $a\leq c$
اذن R علاقة ترتيب جزئي
4)لاحظ ان $1\leq 12$ و$1\leq 4$ و$1\leq 3$ و $1\leq 2$
$2\leq 12$ و$2\leq 4$ و$2\leq 3$
$3\leq 4$ و$3\leq 12$ و $4\leq 12$
$\therefore$ R علاقة ترتيب كلي علي A

مثال : لتكن $A=\{1,2,3\}$ فأن:
$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
العلاقة $R=\{(1,1),(1,3),(2,2)\}$ المعرفة على المجموعة A ليست انعكاسية وليست متناظرة(non-symmetric) ولكنها متعدية ومتخالفة.
العلاقة $Q=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ المعرفة على المجموعة A متناظرة وليست متعدية وليست متخالفة ، ليست انعكاسية ؟
العلاقة $H=\{(1,1),(1,2)(2,1)\}$ المعرفة على المجموعة A متناظرة وليست متعدية (non-transitiv)، وليست متخالفة ،ليست انعكاسية non-reflexive)) .

مثال : اذا كانت N مجموعة الاعداد الطبيعية وR هي العلاقة $\leq$ على N فأن:
R علاقة متخالفة لانه اذا كان $(x,y)\in R,(y,x)\in R$ فأن $x=y$ اي ان
$x\leq y$, $y\leq x \Longrightarrow x=y$
ايضاً العلاقة R انعكاسية لانه لكل $a\in N$ فان $(a,a)\in R$ حي كل عدد طبيعي يساوي نفسه.
العلاقة R ليست متناظرة لان $(1,2)\in R$ بينما $(2,1)\notin R$

العلاقة R علاقة متعدية وذلك لانه لاي ثلاثة أعداد طبيعية x,y,z اذا كان $x\leq y$، $y\leq z$ فأن $x\leq z$ اي ان :

$$(x,y)\in R \text{ و } (y,z)\in R \Longrightarrow (x,z)\in R$$

<u>مثال</u> : ليكن كل من R_1 ، R_2، R_3 علاقة معرفة على N كالتالي :

$$R_1=\{(x,y)\in N\times N: y|x\}$$
$$R_2=\{(x,y)\in N\times N: x+y=5\}$$
$$R_3=\{(x,y)\in N\times N: x+2y=14\}$$

اولاً : بالنسبة للعلاقة R_1

R_1 علاقة انعكاسية وذلك لان كل عنصر من عناصر N يقبل القسمة على نفسه اي ان: $(x,x)\in R_1\ \forall\ x\in N$

R_1 ليست متناظرة وذلك على سبيل المثال اذا كان $(12,6)\in R_1$: فأن $(6,12)\notin R_1$ حيث 12 تقبل القسمة على 6 ولكن 6 لا تقبل القسمة على 12

R_1 متعدية لانه اذا كان

$$(x,y)\in R_1 \text{ و } (y,z)\in R_2 \Longrightarrow (x,z)\in R_1$$

ثانياً: بالنسبة للعلاقة R_2

R_2 ليست انعكاسية لانه يوجد $x\in N$ بحيث $x+x\neq 5$ اي ان: $(x,x)\notin R_2$

R_2 علاقة متناظرة وذلك لانه اذا كان $x+y=5$ اي انه لكل $x,y\in R_2$: اذا كان $(x,y)\in R_2$ فأن $(y,x)\in R_2$

R_2 ليست متعدية لانه $(3,2),(2,3)\in R_2$ بينما $(3,3)\notin R_2$ حيث :

$3+2=5, 2+3=5$ بينما $3+3\neq 5$

ثالثاً: بالنسبة للعلاقة R_3

R_3 ليست انعكاسية لانه يوجد $x\in N$ بحيث $x+2x\neq 14$ اي ان $(x,x)\notin R$ فمثلاً $2+2(2)\neq 14$ اي ان $(2,2)\notin R_3$

R_3 ليست متناظرة لانه يوجد $x,y\in N$ بحيث $(x,y)\in R_3 \Longrightarrow (y,x)\notin R_3$

مثلاً $(4,5)\in R_3$ لان $4+2(5)=14$ بينما $(5,4)\notin R_3$ لان $5+2(4)\neq 14$

R_3 ليست متعدية لانه : $(4,5)\in R_3, (6,4)\in R_3$ ولكن $(6,5)\notin R_3$

مثال : اذا كانت $R=\left\{(a,b)\in Z\times Z:\dfrac{a+b}{2}\in Z\right\}$ علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الصحيحة Z فأن R علاقة تكافؤ على المجموعة Z.

البرهان : العلاقة R انعكاسية لان

$$\frac{a+a}{2}=a\in Z\forall a\in Z\Rightarrow(a,a)\in R\forall a\in Z$$

نفرض ان (a,b)ЄR وهذا يعني ان $\frac{a+b}{2}\in Z$ ولكن هذا يؤدي الى ان $\frac{b+a}{2}\in Z$ وبالتالي فأن (a,b)ЄR وهذا يبرهن ان R علاقة متناظرة

نفرض ان (a,b)ЄR ,(b,c)ЄR وهذا يعني ان $\frac{a+b}{2}=h\in Z,\frac{b+c}{2}=k\in Z$ لذلك

$$\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}=(h+k)\in Z\Rightarrow\frac{a+c}{2}=(h+k-b)\in Z\Rightarrow(a,c)\in R$$

أي ان R علاقة متعدية ، مما سبق نستنتج ان R علاقة تكافؤ

2.17 تركيب العلاقات Composition of Relations

اذا كانت Rعلاقة من X وY ، S علاقة من Y الى Z فأن SoR (تركيب العلاقة R مع S) تُعرف كما يلي :

SoR ={ (x,z)Є X x Z | ∃ yЄY ∍ (x,y) ЄR و (y,z)ЄS}

مثال : لتكن A={a,b,c,d,e} و B={1,2,3,4} C={$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$} و R علاقة من A الى B وS علاقة من B الى C وبالشكل :

R={(a,1),(b,1),(b,2),(c,3),(c,2)}

S={(1, $\frac{1}{2}$),(4,$\frac{1}{8}$)}

SoR={(a, $\frac{1}{2}$),(b, $\frac{1}{2}$)} ; SoR ⊆ A ×C

2.18 مبرهنة (2-7)

لتكن T,S,R علاقات على المجموعة A فأن :

(1) $(ToS)oR=To(SoR)$

(2) $(SUT)oR=(SoR)U(ToR)$

(3) $(S\cap T)oR \subseteq (SoR) \cap (ToR)$

(4) اذا كانت $R \subseteq S$ فأن $ToR \subseteq ToS$

(5) $(ToR^{-1})\cap S=\Phi \longleftrightarrow (SoR)\cap T=\Phi$

(6) $(SoR)^{-1}=R^{-1}o\,S^{-1}$

برهان (1) : $(ToS)oR=To(SoR)$

يجب ان نبرهن :

(a) $(ToS)oR \subseteq To(SoR)$

(b) $To(SoR) \subseteq (ToS)oR$

(a) افرض ان $(x,w)\in(ToS)oR$

$\longrightarrow$ $(y,w)\in ToS$ و $\exists\, y \ni (x,y)\in R$

$\longrightarrow$ $(z,w)\in T$ و $\exists\, S \notin (y,z)\ni z$ و $(x,y)\in R$

$\longrightarrow$ $(x,y)\in R$ و $[(y,z)\in S$ و $(z,w)\in T]$

$\longrightarrow$ $[(x,y)\in R$ و $(y,z)\in S]$ و $(z,w)\in T$

$(x,z)\in SoR$ و $(z,w)\in T$

$\therefore\ (x,w)\in To(SoR)$

اذن $(ToS)oR \subseteq To(SoR)$

(b) الان ليكن $(x,y)\in To(SoR)$

$\longrightarrow$ $(z,w)\in T$ و $\exists\, z \ni (x,z)\in SoR$

$\longrightarrow$ $(y,z)\in S,(z,w)\in T$ و $\exists\, y \ni (x,y)\in R$

$\longrightarrow$ $(x,y)\in R$ و $[(y,z)\in S$ و $(z,w)\in T]$

$\longrightarrow$ $(x,y)\in R$ و $(y,w)\in ToS$

$\longrightarrow$ $(x,w)\in (ToS)oR$

اي ان $To(SoR) \subseteq (ToS)oR$

اذن من (a) و(b) نحصل على $(ToS)oR=To(SoR)$

برهان <u>(2)</u> : $(S \cup T)oR = (SoR) \cup (ToR)$

يجب ان نبرهن :

(a) $(S \cup T)oR \subseteq (SoR) \cup (ToR)$

(b) $(SoR) \cup (ToR) \subseteq (S \cup T)oR$

(a) ليكن $(x,w) \in (S \cup T)oR \longrightarrow$

$\exists y \ni (x,y) \in R$ و $(y,w) \in (S \cup T)$

$(x,y) \in R$ و $[(y,w) \in S$ او $(y,w) \in T]$

$(x,y) \in R$ و $(y,w) \in S$ او $(x,y) \in R , (y,w) \in T$

$(x,w) \in SoR$ او $(x,w) \in ToR$

$\therefore (x,w) \in (SoR) \cup (ToR)$

اذن $(S \cup T)oR \subseteq (SoR) \cup (ToR)$

(b) الان لنأخذ $(x,w) \in (SoR) \cup (ToR) \longrightarrow$

$(x,w) \in SoR$ أو $(x,w) \in ToR$

$\exists y \ni (x,y) \in R$ و $(y,w) \in S$ أو $\exists y \ni (x,y) \in R$ و $(y,w) \in T$

$(x,y) \in R$ و $(y,w) \in T$ او $(x,y) \in R$ او $(y,w) \in S$ او $(x,y) \in R \longrightarrow$

$(x,y) \in R$ و $(y,w) \in S$ او $(y,w) \in T$

$(x,y) \in R$ و $(y,w) \in S \cup T$

$(x,w) \in (S \cup T)oR$

اي ان $(SoR) \cup (ToR) \subseteq (S \cup T)oR$

من (a) و(b) نحصل على $(S \cup T)oR = (SoR) \cup (ToR)$

<u>برهان (3)</u> يُترك للطالب

<u>برهان (4) :</u> $R \subseteq S \longrightarrow ToR \subseteq ToS$

ليكن $(x,w) \in ToR \longrightarrow$

$\exists y \ni (x,y) \in R$ و $(y,w) \in T$

$(x,y) \in R$ و $(y,w) \in T$

لكن $R \subseteq S$ من الفرض

$(x,y) \in R \longrightarrow (x,y) \in S$
اي ان $(x,w) \in ToS \longrightarrow (y,w) \in T$ و $(x,y) \in S$
اذن $ToR \subseteq ToS$

برهان (5) : $(ToR)^{-1} \cap S = \Phi \longleftrightarrow (SoR) \cap T = \Phi$
افرض ان $(SoR) \cap T \neq \Phi$
اذن يوجد (x,z) بحيث ان $(x,z) \in (SoR) \cap T$
$(x,z) \in T$ و $(x,z) \in (SoR)$
بما ان $(x,z) \in (SoR)$ اذن يوجد y بحيث ان :
$(y,z) \in S$ و $(x,y) \in R$
من تعريف العلاقة العكسية $\therefore (z,y) \in R^{-1} \longleftarrow (x,y) \in R$
$(y,z) \in T$ و $\therefore (y,x) \in R^{-1}$
$\longrightarrow (z,y) \in (ToR^{-1})$
$\because (z,y) \in S$
$(z,y) \in (ToR^{-1})$ و $(z,y) \in S$
$(z,y) \in (ToR^{-1}) \cap S$
$\therefore (ToR^{-1}) \cap S \neq \Phi$
وبنفس الطريقة نبرهن ان
$(SoR) \cap T \neq \Phi \longleftarrow (ToR^{-1}) \cap S \neq \Phi$
اذن $(ToR^{-1}) \cap S = \Phi \longleftrightarrow (SoR) \cap T = \Phi$

برهان (6) : $(SoR)^{-1} = R^{-1} o S^{-1}$
يجب ان نبرهن ان
(a) $(SoR)^{-1} \subseteq R^{-1} o S^{-1}$
(b) $R^{-1} o S^{-1} \subseteq (SoR)^{-1}$

(a) نفرض ان $(z,x) \in (SoR)^{-1}$
$\longrightarrow (x,z) \in SoR$
$\longrightarrow y \ni (x,y) \in R \ \exists$ و $(y,z) \in S$
$\longrightarrow (y,x) \in R^{-1}$ و $(z,y) \in S^{-1}$
$\longrightarrow (z,y) \in S^{-1}$ و $(y,x) \in R^{-1}$
$\longrightarrow (z,x) R^{-1} o S^{-1}$

اذن $(SoR)^{-1} \subseteq R^{-1}o\ S^{-1}$

(b) لنفرض ان $(z,x) \in R^{-1}o\ S^{-1}$

$\longrightarrow$ $(y,x) \in R^{-1}$ و $\exists\ (z,y) \in S^{-1} \ni y$

$\longrightarrow$ $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in S$

$\longrightarrow$ $(y,z) \in S$ و $(x,y) \in R$

$\longrightarrow$ $(x,z) \in SoR$

$\longrightarrow$ $(z,x) \in (SoR)^{-1}$

اذن $R^{-1}o\ S^{-1} \subseteq (SoR)^{-1}$

من (a) و(b) نحصل على $R^{-1}o\ S^{-1}=(SoR)^{-1}$

<u>2.19 مبرهنة (2-8)</u>

اذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة A فأن RoR=R

<u>البرهان</u> : ليكن $(x,z) \in RoR$ $\longleftarrow$

$(y,z) \in R$ و $\exists\ (x,y) \in R \ni y \in A$

بما ان R متعدية اذن $(x,z) \in R$

اي ان $RoR \subseteq R$ -------(1)

الان نفرص $(x,y) \in R$

بما ان R علاقة انعكاسية اذن $(x,x) \in R$

$\longrightarrow$ $(x,y) \in R$ و $\exists\ (x,x) \in R \ni x \in A$

اي ان $(x,y) \in RoR$

اذن $R \subseteq RoR$ --------(2)

من (1) و(2) نحصل على RoR=R

أسئلة الفصل الثاني

س1: جد قيمة كل من a وb اذا علمت ان :

$$(a+b\ ,3a+5b) = (a-b\ ,\ 2a-7b)$$

س2: اذا كانت $A=\{1,3,5,7\}$ ، $B=\{-2,-9,6\}$ ، $C=\{x,y,z\}$
جد كلاً مما يلي :
أ) $(AUB)\times C$ ب) $(A\times C)U(B\times C)$ ج) $(AUB)\times (BUC)$

س3: اذا كانت كل من A,B,C مجموعة وان $A\subseteq B$ اثبت ان
$A\times C\subseteq B\times C$

س4: لتكن $A=\{1,2,3\}$ اي علاقة على A بحيث تكون :
أ- متناظرة وتخالفية ج- علاقة ترتيب جزئي
ب- غير متناظرة وغير تخالفية د- علاقة ترتيب كلي

س5: عرف كل من : العلاقة الانعكاسية ، العلاقة المتناظرة ، العلاقة المتعدية ، علاقة التكافؤ ، علاقة الترتيب الجزئي ، علاقة الترتيب الكلي

س6: لتكن S و T علاقتين من X الى Y برهن ان :
أ- $(S\cap T)^{-1} = S^{-1}\cap T^{-1}$ ب- $(SUT)^{-1} = S^{-1}\ UT^{-}$

س7: لتكن كل من S و T علاقة متعدية على المجموعة X فهل ان العلاقة $S\cap T$ علاقة متعدية ؟

س8: لتكنRوS علاقتين على المجموعة A بين ان العبارات التالية كاذبة؟
أ- اذا كانت Sو R علاقة تخالفية فأن RUS تكون ايضاً تخالفية ؟
ب- اذا كانت R متعدية وS متعدية فأن RUS تكون متعدية ؟

س9: لتكن $x=\{1,2,3\}$ ، $y=\{4,5\}$ جد كل من:
أ- $x\times y$ ب- $y\times x$ ج- $x\times x$ د- $y\times y$

س10: لتكن $A=\{a,b,c\}$ ، $B=\{x,y,z\}$ ، $C=\{1,2,3\}$ ، حيث $R=\{(a,x),(a,y),(b,z),(c,x)\}$ علاقة من A الى B و $Q=\{(x,1),(y,3),(z,4),(x,2)\}$ علاقة من B الى C جد: QoR

س11: اذا كانت $\{R_i\}_{i\in I}$ عائلة علاقات برهن ان :

$Ran(UR_i)=U(ran\ R_i)$, $dom(UR_i)=U(dom\ R_i)$

س12: ليكن كل من R,Q علاقة ، وليكن A,B,C مجموعات برهن أن :

أ- $R\subseteq Q$ اذا وفقط اذا $R^{-1}\subseteq Q^{-1}$

ب-اذا كان $R\subseteq A\times B$ فأن $R^{-1}\subseteq B\times A$

ج- اذا كان $R\subseteq A\times B$ و $Q\subseteq B\times C$ فأن $QoR\subseteq A\times C$

د- $dom(R-Q)\subseteq dom\ R-dom\ Q$

هـ - $ran(R-Q)\subseteq ran\ R-ran\ Q$

س13: ليكن كل من A,B,C مجموعة برهن ان :

أ- اذا كان $A\cap B\neq\Phi$ فأن $(A\times B)o(A\times B)=A\times B$

ب- اذا كان $A\cap B=\Phi$ فأن $(A\times B)o(A\times B)=\Phi$

ت- اذا كان $B\neq\Phi$ فأن $(A\times C)o(A\times B)=A\times C$

ث- $(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$

س14: اذا كان R، Q علاقتين على المجموعة غير الخالية A برهن ان :

أ) $dom(RUQ)=(domR)U(domQ)$

ب) $ran(RUQ)=(ranR)U(ranQ)$

س15: لتكن P,Q,R,S علاقات على المجموعة A برهن ان :

أ-اذا كان $P\subseteq Q$ ، $R\subseteq S$ فأن $PoR\subseteq QoS$

ب- $P\subseteq Q$ اذا وفقط اذا $P^{-1}\subseteq Q^{-1}$

س16: ليكن J,G,H علاقات على المجموعة A برهن ان:

أ) $(G\cap H)^{-1}=G^{-1}\cap H^{-1}$ ب) $(G-H)^{-1}=G^{-1}-H^{-1}$

ج) $(GoH)-(GoJ)\subseteq Go(H-J)$ د) $(G\cup H)^{-1}=G^{-1}\cup H^{-1}$

س17: ادرس أنواع العلاقات المعطاة فيما يلي من حيث الانعكاس والتناظر والتعدي :

أ- لتكن A مجموعة سكان مدينة ما ولتكن R العلاقة المعرفة على A كما يلي: {x اخ R={(x,y):y

ب-العلاقة > على مجموعة الاعداد الحقيقية

ج-علاقة التساوي على مجموعة الاعداد الحقيقية

س18: فيما يلي بين ما اذا كان العلاقات المعطاة علاقات تكافؤ ام لا ؟

أ- $R=\{(4,3),(3,4),(2,1),(1,2),(4,4),(3,3),(2,2),(1,1)\}$ المعرفة على المجموعة $\{1,2,3,4\}$

ب- $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,c),(c,a),(b,d),(b,e),(d,b),(d,e),(e,b),(e,d)\}$ المعرفة على المجموعة $\{a,b,c,d,e\}$

س19: في التمارين التالية كون علاقة لها الخواص المذكورة :

أ-ليست انعكاسية ب-انعكاسية فقط ت-متناظرة فقط ث-متعدية فقط

ج- انعكاسية ومتعدية فقط ح-انعكاسية ومتناظرة فقط خ-متناظرة ومتعدية فقط

د-علاقة تكافؤ

س20: لتكن R علاقة على المجموعة A برهن انه اذا كانت Rعلاقة متعدية وانعكاسية فأن RoR=R ثم وضح ما اذا كان العكس صحيح ام لا؟

س21: لتكن R علاقة انعكاسية على المجموعة A برهن ان لكل علاقة Q على A فأن $Q\subseteq RoQ$ ، $Q\subseteq QoR$

س22: لتكن كل من R,Q علاقة على المجموعة A وبفرض ان R علاقة انعكاسية ،Q علاقة انعكاسية ومتعدية ، برهن ان : $R\subseteq Q$ اذا وفقط اذا RoQ=Q ؟

س23: لتكن كل من R,Q علاقة تكافؤ على المجموعة A برهن ان RoQ علاقة تكافؤ على A اذا وفقط اذا RoQ=QoR ؟

س24: لتكن كل من R,Q علاقة تكافؤ على المجموعة A برهن ان RUQ علاقة تكافؤ على A اذا وفقط اذا $RoQ\subseteq RUQ$، $QoR\subseteq RUQ$ ؟

س25: لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A ولتكن Q,T علاقتين على A برهن ان $R\subseteq QoT$ اذا كانت $R\subseteq Q$ ، $R\subseteq T$ ؟

س26: لتكن كل من R,Q، RoQ علاقة تكافؤ على المجموعة A برهن ان RoQ=QoR ؟

س27: لتكن S كل الدول في قارة افريقيا ، عرفت العلاقة R على S كالتالي{A تحد بـB :(R={(A,B ، هل R علاقة متخالفة ؟

س28: ليكن $R=\{(a,b)\in N\times N: b$ يقسم $a\}$ برهن ان R علاقة انعكاسية ومتخالفة ؟

س29: برهن ان المعادلة $(A\cap X)U(B\cap X^c)=\Phi$ لها حل اذا وفقط اذا كان $B\subseteq A^c$ وان اي مجموعة X تحقق العلاقة $B\subseteq X\subseteq A^c$ تكون حلاً للمعادلة ، برهن انه من الممكن التعبير عن X كما يلي: $X=(BUT)\cap A^c$ حيث T اية مجموعة ؟

س30: اذكر أمثلة لعلاقات T,Q,R معرفة على المجموعة Z بحيث تكون R انعكاسية ومتناظرة وليست متعدية ،Q انعكاسية ومتعدية وليست متناظرة ، بينما T متناظرة ومتعدية وليست انعكاسية ؟

س31: ليكن $R=\{(x,y)\in N\times N:\exists n\in Z\ni x=2^n y\}$ برهن ان R علاقة تكافؤ.(حيث N مجموعة الاعداد الطبيعية ،Z مجموعة الاعداد الصحيحة)

س32: ليكن R علاقة انعكاسية ومتعدية على المجموعة S وليكن $T=\{(a,b)\in S\times S: (a,b),(b,a)\in R\}$ برهن ان T علاقة تكافؤ ؟

س33: لتكن R علاقة انعكاسية على المجموعة B برهن ان R علاقة تكافؤ اذا وفقط اذا (a,b),(a,c)ЄR يؤدي الى ان (b,c)ЄR ؟

س34: ليكنZ^+ مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة وليكن $A=Z^+\times Z^+$ ، عرفت العلاقة R على A كالتالي {R={((a,b),(c,d)):ad=bcبرهن ان R علاقة تكافؤ على المجموعة A ؟

س35: ليكن A اي مجموعة :أ) هل يوجد اي علاقة عكسية في A اذا كانت هذه العلاقة تمثل دالة ؟
ب) هل يوجد اكثر من علاقة عكسية في A اذا كانت هذه العلاقة تمثل دالة ؟

س36: هل علاقة تشابه المثلثات في المستوى تكون علاقة تكافؤ؟ برهن صحة ما تقول ؟

س37: برهن ان R علاقة متناظرة اذا وفقط اذا $R^{-1}\subseteq R$ ؟

س38: برهن ان R علاقة متناظرة ومتعدية اذا وفقط اذا $R^{-1}\subseteq RoR$ ؟

س39: اذا كانت A عائلة من المجموعات ،R علاقة على A معرفة بالجملة

المفتوحة (Xمنفصلة عن Y)، حدد ما اذا كانت R: انعكاسية – متناظرة – متخالفة –متعدية- غير انعكاسية – غير متناظرة – غير متعدية؟

س40: برهن ان $R=\left\{(a,b)\in Z\times Z:\dfrac{a^2-b^2}{5}\in Z\right\}$ علاقة تكافؤ على مجموعة الاعداد الصحيحة Z ؟

س41: برهن ان $R=\left\{(a,b)\in Z\times Z:\dfrac{a+2b}{5}\in Z\right\}$ علاقة تكافؤ على مجموعة الاعداد الصحيحة Z ؟

س42: ليكن R علاقة متناظرة ومتعدية على المجموعة A وليكن لكل aЄA يوجد bЄA بحيث (a,b)ЄR برهن ان R علاقة تكافؤ ؟

س43: ليكن R علاقة متعدية وغير انعكاسية على المجموعة غير الخالية A، برهن ان R ليست دالة ؟

س44: اذا كان R، Q علاقتان على المجموعة A، ناقش صحة العبارات التالية :
1-اذا كان R متناظرة ، Q متناظرة فأن RUQ متناظرة.
2-اذا كان R انعكاسية ، Q اي علاقة فأن RUQ انعكاسية.
3-اذا كان R متعدية ، Q متعدية فأن RUQ متعدية.
4-اذا كان R انعكاسية ، Q فأن $RUR^{-1}\neq\phi$ متناظرة.
5-اذا كان R متناظرة فأن $R\cap R^{-1}=\phi$.
6-اذا كان R متعدية ،Q متعدية فأن $R\cap Q$ متعدية.
7- اذا كان R انعكاسية ،Q انعكاسية فأن RUQ انعكاسية ، $R\cap Q$انعكاسية .

س45: اذا كان Aعائلة من المجموعات ، R علاقة في A معرفة بالجملة المفتوحة (x منفصلة عن y) حدد اذا ما كانت :
1-انعكاسية 2- متناظرة 3-متخالفة

س46: اي نوع من العلاقات R اذا ما كان :
$R\cap R^{-1}=\phi$ -1 $R=R^{-1}$ -2

س47: كل من الجمل المفتوحة التالية تعرف علاقة بين الاعداد الطبيعية N:(x اكبر من y) ،(حاصل ضرب x،y هو مربع عدد ما)، (x+3y=12) ، حدد ما اذا كانت كل علاقة من العلاقات السابقة : انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ؟

س48: بين ما اذا كانت العلاقة $R=\{(x,y):y\geq x^2\}$ المعرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية IR علاقة انعكاسية او متعدية او متناظرة ؟

س49: ليكن $A=\{3,6,9,12,15\}$ وليكن $R=\{(x,y)\in A\times A:x\leq y\}$ ، $Q=\{(x,y)\in A\times A:x\geq y\}$ ، $T=\{(x,y)\in A\times A:x$ يقبل القسمة على $y\}$ اوجد : العنصر الاصغر في A بالنسبة لكل من العلاقات T,Q,R ؟

س50: ليكن $A=\{3,5,6,9,10,12,13\}$ وليكن
$Q=\{(x,y)\in A\times A:x\geq y\}$ ، $R=\{(x,y)\in A\times A:x\leq y\}$ ،
$T=\{(x,y)\in A\times A:x$ يقبل القسمة على $y\}$ اوجد : العنصر الاكبر في A بالنسبة لكل من العلاقات T,Q,R ؟

س51: ليكن $R=\{(a,b)\in IN\times IN:b$ يقسم $a\}$ برهن ان R علاقة انعكاسية ومتخالفة ؟

س52: برهن ان المعادلة $(A\cap X)\cup(B\cap X^c)=\phi$ لها حل اذا وفقط اذا $B\subseteq A^c$ تكون حلاً للمعادلة ، برهن انه من الممكن التعبير عن X كما يلي :
$X=(B\cup T)\cap A^c$ حيث T اية مجموعة ؟

س53: ليكن J,G,H علاقات على المجموعة A برهن ان :

أ) $(G-H)^{-1}=G^{-1}-H^{-1}$ ب) $(G-H)^{-1}=G^{-1}\cap H^{-1}$

ج) $(G\cup H)^{-1}=G^{-1}\cup H^{-1}$ د) $(GoH)-(GoJ)\subseteq Go(H-J)$

س54: ليكن G علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A برهن ان G^{-1} تكون ايضاً علاقة ترتيب جزئي للمجموعة A؟

س55: فيما يلي بين ما اذا كانت العلاقات المعطاة علاقات تكافؤ ام لا ؟

أ) $R=\{(4,3),(3,4),(2,1),(1,2),(4,4),(3,3),(2,2),(1,1)\}$ المعرفة على المجموعة $\{1,2,3,4\}$.

ب) $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,c),(c,a),(b,d),(b,e),(d,b),(d,e),(e,d),(e,b)\}$ المعرفة على المجموعة $\{a,b,c,d,e\}$.

س56: بين ما اذا كان كل من العلاقات الاتية على Z تكون علاقة تكافؤ او علاقة ترتيب جزئي او علاقة ترتيب كلي او لا تكون اي نوع من الانواع المذكورة :

1. $R=\{(x,y):x+y\in R\}$
2. $R=\{(x,y):xy>0\}$
3. $R=\{(x,y):x+y<2\}$
4. $R=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$
5. $R=\{(x,y):x=y\}$
6. $R=\{(x,y):x<y\}$

س57: بين ما اذا كان كل من العلاقات الاتية على Z علاقة تكافؤ او علاقة ترتيب جزئي او علاقة ترتيب كلي او خلاف ذلك :

$5.R=\{(x,y):x\leq y\}$	$3.R=\{(x,y):xy\geq 0\}$	$1.R=\{(x,y):x-y$ عدد زوجي$\}$
$6.R=\{(x,y):x<y\}$	$4.R=\{(x,y):x^2+y^2=9\}$	$2.R=\{(x,y):2x+y=10\}$

س58: اثبت انه اذا كانت R علاقة عكسية على مجموعة A فأن :

$$D_R=R_R=A$$

س59: في التمارين التالية كون علاقة لها الخواص المذكورة :

أ) ليست انعكاسية ب)انعكاسية فقط ج)متناظرة فقط د)متعدية فقط

هـ)انعكاسية ومتعدية فقط و)انعكاسية ومتناظرة فقط

ز)متناظرة ومتعدية فقط ي)علاقة تكافؤ

س60: اختبر العلاقات التالية المعرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية:

$$R=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2=4\}$$

$$S=\{(x,y)|y\leq 0\}$$

س61: في التمارين التالية كون علاقة لها الخواص المذكورة :

(أ)ليست انعكاسية (ب) انعكاسية فقط (ج) متناظرة فقط

(د) متعدية فقط)(هـ) انعكاسية ومتعدية فقط (و) انعكاسية ومتناظرة فقط

(ز) متناظرة ومتعدية فقط (ي) علاقة تكافؤ

الفصل الثالث
الدوال THE FUNCTIONS

3.1 مقدمة

سندرس في هذا الفصل نوعاً مهماً من العلاقات ، والتي تسمى بالدوال او التطبيقات ، ولهذه الدوال أهمية كبيرة في تطبيقات عديدة في العلوم المختلفة.

3.2 الدالة

اذا كانت f علاقة من المجموعة $A\neq \Phi$ الى المجموعة B، يُقال ان f دالة من A الى B اذا كان لكل عنصر في A يوجد عنصر وحيد في B ويرمز لذلك بالرمز $f: A \longrightarrow B$ اي ان f دالة من A الى B اذا وفقط اذا كان :

1) f علاقة من A الى B $(f \subseteq AxB)$

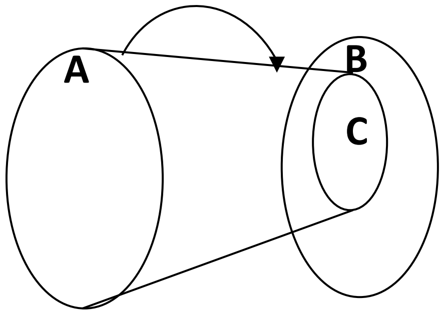
2) لكل $x \in A$ يوجد $y \in B$ بحيث ان $(x,y) \in f$

3) اذا كان $y_1=f(x_1)$ و $y_2=f(x_1)$ فأن $y_1=y_2$ لكل $x_1 \in A$

اي انه لكل عنصر في المجموعة A يوجد عنصر وحيد في B بحيث ان $y=f(x)$

3.3 مدى الدالة :

المجموعة A تسمى منطلق الدالة f (Domain of f) ويرمز لها بالرمز D_f والمجموعة B تسمى مستقر الدالة f (Co.domain of f) واذا كانت $C\subseteq B$ و $f:A \longrightarrow C$ فأن المجموعة C تسمى مدى الدالة f (Range of f) ويرمز لها بالرمز R_f.



اي ان $R_f=\{f(x)|\ x \in A\}$

∀∀

<u>3.4 بيان الدالة :</u>

لتكن $f:A\longrightarrow B$ دالة فأن المجموعة التي عناصرها جميع الازواج المرتبة (x,y) في AxB تسمى بيان الدالة ويرمز لها بالرمز G وتُعرف :

$$G=\{(x,y)\in AxB|y=f(x)\}$$

<u>3.5 تساوي الدوال :</u>

اذا كانت $f:A\longrightarrow B$ و $g:A\longrightarrow B$ فيقال ان $f=g$ اذا كان

$$f(x)=g(x);\ \forall\ x\in A$$

واذا وجد على الاقل عنصر واحد x في A بحيث ان $g(x) \neq f(x)$ فيقال ان f لا تساوي g ويكتب $f \neq g$.

<u>مثال</u>: لتكن $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{1,2,3\}$ و

$f_1=\{(a,1),(b,2),(d,3),(e,3)\}$

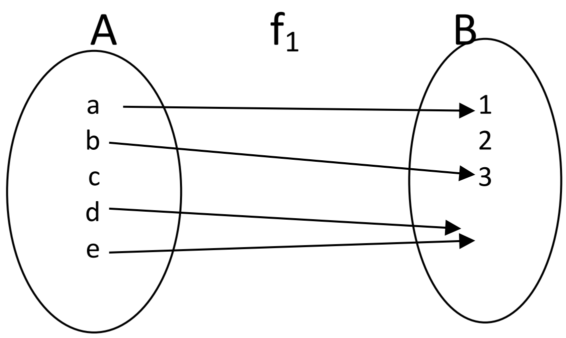
$f_2=\{(a,1),(b,1),(c,1),(d,1),(d,2),(e,3)\}$

$f_3=\{(a,1),(b,1),(c,2),(d,2),(e,2)\}$

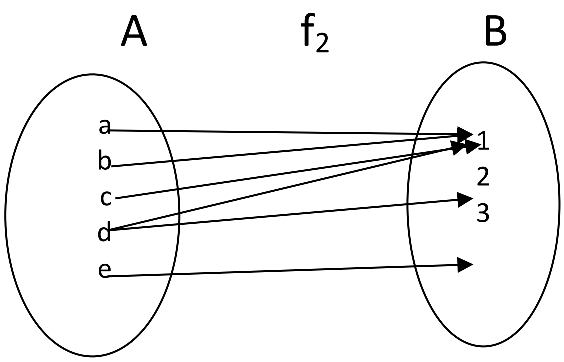
$f_4=\{(a,1),(b,1),(c,2),(d,3),(e,3)\}$

اي من العلاقات اعلاه هي دالة من A الى B ؟

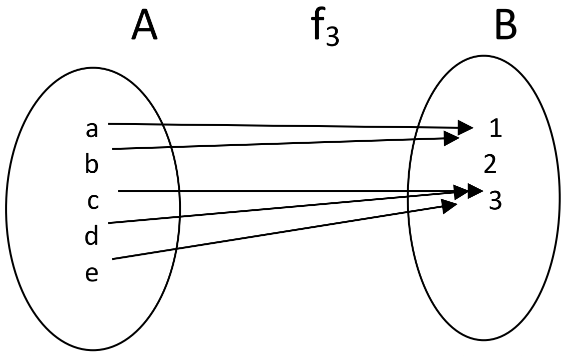
<u>الحل :</u>



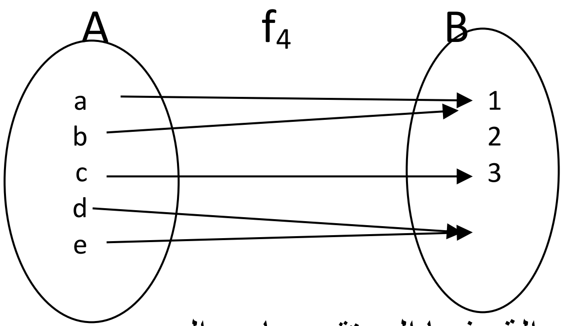
لاحظ ان f_1 ليست دالة لان العنصر $c\in A$ لا يرتبط مع اي عنصر من عناصر المجموعة B .



ايضاً f_2 ليست دالة لان العنصر dЄA له صورتين مختلفتين .

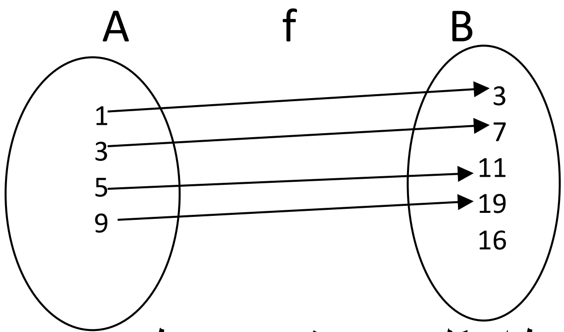


اما العلاقة f_3 هي دالة على الرغم من ان العنصر 3ЄB الذي لا يُقابل اي عنصر من عناصر المجموعة A، اي ان مستقر الدالة لا يساوي مداها.



لاحظ ان f_4 دالة وفيها المستقر يساوي المدى.

مثال : لتكن $A=\{1,3,5,9\}$ و $B=\{3,7,11,19,16\}$ ولتكن f علاقة من A الى B معرفة بالشكل: $f=\{(x,y)|y=2x+1\}$ هل ان f تمثل دالة من A الى B ؟

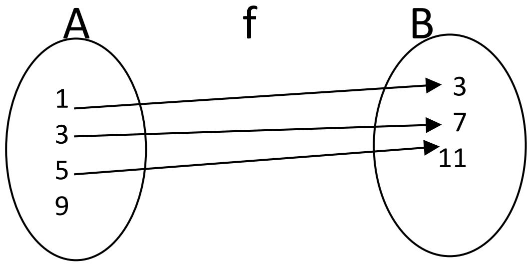


الحل : لاحظ ان كل عنصر في A يرتبط مع عنصر وحيد في B اي ان :

$f =\{(1,3),(3,7),(5,11),(9,19)\}$

اي ان f دالة من A الى B

مثال : لتكن $A=\{1,3,5,9\}$ و $B=\{3,7,11\}$, $f=\{(x,y)|y=2x+1\}$
و f علاقة معرفة من A الى B ، هل ان f تُمثل دالة من A الى B ؟



الحل : f ليست دالة لان العنصر $9 \in A$ ليست له صورة في B اي ان
$f(9) \neq y \; ; \; \forall \; y \in B$

3.6 انواع الدوال :

3.6.1 الدالة الشاملة (Surjective Function او Onto)

تسمى الدالة $f:A \longrightarrow B$ دالة شاملة اذا وفقط اذا كان المستقر = مدى الدالة
$(R_f = B)$ او بشكل اخر : $\forall \; y \in B \; , \; \exists \; x \in A \ni y=f(x)$

مثال : لتكن $f:N \longrightarrow N$ ومعرفة بالشكل $f(x)=2x$ هل ان f دالة شاملة ؟

الحل : f ليست شاملة لان الاعداد الفردية الموجودة في مستقر الدالة ليست صوراً لعناصر المنطلق وفقاً للدالة او(المنطق) $\exists \, 4 \in N$ (المستقر) $f(x) \neq 4 \; ; \; \forall \; x \in N \ni$ (المنطق)

مثال : لتكن $f:R \longrightarrow R$ (R مجموعة الاعداد الحقيقية) و
$f=\{(x,y) \mid y=5x+1\}$ هل ان f شاملة ؟

الحل : f دالة شاملة لان
لنفرض $y \in B$ ولنضع $x=\frac{y-1}{5}$ حيث ان $x \in A$ فأن $f(x)=5x+1$
اذن $f(x)=5\frac{y-1}{5}+1=y$ $\forall \; y \in B \; , \; \exists \; x \in A \ni y=f(x)$ اي f دالة شاملة.

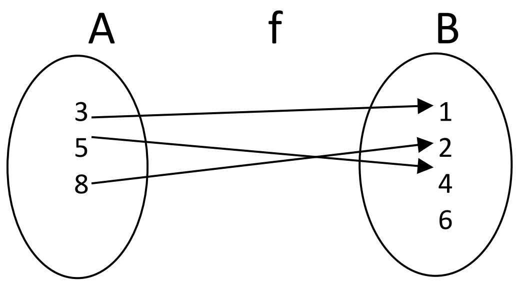
مثال: لتكن $A=\{x \in R|x\geq 0\}$ و $B=R$ وان $f=\{(x,y)|y=x^2+1\}$
هل ان f شاملة ؟
الحل : f ليست شاملة ، وذلك لان $R_f=\{y\in B|y\geq 1\}=[1,\infty)$
او بمعنى اخر $R_f \neq R$ $\exists\ -3\in B \ni f(x) \neq -3\ \forall x\in A$

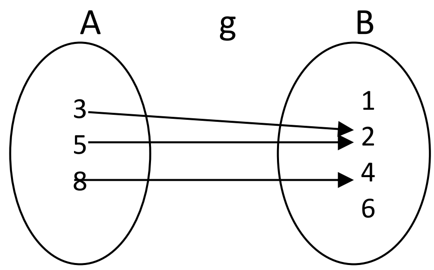
مثال : لتكن $f:R\longrightarrow R$ دالة معرفة بالشكل $f(x)=x$ لكل $x\in R$ ،هل ان f دالة شاملة ؟
الحل : نعم لانه (المنطلق) $y\in R$ $\exists$ (المستقر) $x\in R$ $\forall$
$\ni f(x)=y$

3.6.2 الدالة المتباينة (Injective Function او One-One)

تسمى الدالة $f:A\longrightarrow B$ دالة متباينة اذا تحقق الشرط التالي :
$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$ حيث ان $x_1,x_2 \in A$
اي ان العناصر المختلفة في المنطلق يجب ان يكون لها صور مختلفة في المستقر اي ان $x_1\neq x_2 \longrightarrow F(x_1)\neq f(x_2)$

مثال :اذا كانت $A=\{3,5,8\}$ ، $B=\{1,2,4,6\}$ و $f,g:A\longrightarrow B$ معرفتين كالاتي :
$f=\{(3,1),(5,4),(8,2)\}$ ، $g=\{(3,2),(5,2),(8,4)\}$
اي الدالتين متباينة ؟





الحل : ∵ f دالة متباينة لانه لكل $x_1,x_2\in A$
$x_1\neq x_2 \longrightarrow F(x_1)\neq f(x_2)$ لاحظ ان $f(3)=1,f(5)=4,f(8)=2$
اي ان لكل عنصر في A له صورة مختلفة في B، لكن الدالة g ليست متباينة لانه $g(3)=g(5)=2$
اي انه يوجد عنصرين مختلفين في A لهما نفس الصورة في B

مثال : اذا كانت $A=\{x\in R|-2\leq x\leq 5\}$ ، $B=R$ وf دالة من A الى B معرفة بالشكل $f=\{(x,y)\in AxB|y=x^3\}$ ، هل ان f دالة متباينة ؟

الحل : f متباينة لان اذا فرضنا $f(x_1) = f(x_2)$
$x_1=x_2 \Longrightarrow x_1^3=x_2^3$ فأن $x_1=x_2 \Longrightarrow f(x_1)=f(x_2)$ وعليه فأن f دالة متباينة.

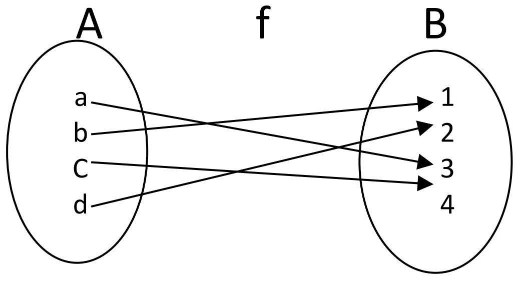
مثال : لتكن $g:[-2,2] \longrightarrow R$ دالة معرفة بالشكل $g(x)=3x^2+1$ اختبر فيما اذا كانت الدالة g شاملة ؟

الحل : g ليست شاملة لان لو اخذنا $x_1=-2$, $x_2=2$ فأن
$g(x_1)=g(-2)=13$
$g(x_2)=g(2)=13$ اي ان $g(x_1)=g(x_2)$ لكن $x_1 \neq x_2$
اي انه يوجد عنصران مختلفان $x_1,x_2 \in A$ بحيث ان $g(x_1)=g(x_2)$ لكن $x_1 \neq x_2$ اذن f ليست متباينة

3.6.3 الدالة المتقابلة One-One Correspondence

تسمى الدالة $f:A \longrightarrow B$ دالة تقابلاً اذا وفقط اذا كانت f دالة متباينة وشاملة.

مثال : لتكن $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ و$f:A \longrightarrow B$ مُعرفة بالشكل :
$f= \{(a,3),(b,1),(c,4),(d,2)\}$ لاحظ ان f دالة متباينة (لكل عنصر في A يوجد صورة واحدة فقط في B) و f دالة شاملة (المستقر = المدى) اذن f دالة متقابلة .



مثال : اذا كانت $A=\{1,3,5,7,...\}$ و $B=\{2,4,6,8,...\}$
و$f:A \longrightarrow B$ دالة مُعرفة بالشكل : $f = \{(x,y) \in AxB \,|y=2x\}$
بين فيما اذا كانت تقابل ؟

الحل : لاحظ ان f لا تكون تقابلاً لانه ليست شاملة ، فأذا أخذنا $y=4$ فلا يوجد عنصر x في A بحيث $f(x)=4$.

مثال : لتكن$g:A\longrightarrow B$ دالة مُعرفة بالشكل :

$g=\{(x,y)\in A\times B \mid y=x+1\}$

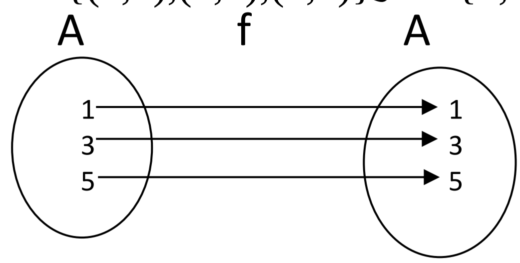
و A وB معرفتين في المثال اعلاه ، هل ان g دالة متقابلة ؟

الحل : g تقابل لانها شاملة ومتباينة ، حيث ان كل عنصر في B يكون صورة لعنصر واحد في A وان المستقر = المدى ، اذن g دالة شاملة .

3.6.4 الدالة الذاتية Identity Function

تسمى الدالة $f:A\longrightarrow A$ دالة ذاتية على A اذا وفقط اذا كان $f(x)=x$ لكل $x\in A$ ويستخدم الرمز I_A للدلالة على الدالة الذاتية على A.

مثال : لتكن $A=\{1,3,5\}$ و$f=\{(1,1),(3,3),(5,5)\}$ اذن $f:A\longrightarrow A$ دالة ذاتية.



3.6.5 الدالة الثابتة Constant Function

تُسمى الدالة $f:A\longrightarrow B$ دالة ثابتة اذا وفقط اذا وجد عنصر b في B بحيث لكل $x\in A$ يكون $f(x)=b$.

مثال : لتكن $f:R\longrightarrow R$ ومعرفة بالشكل $f=\{(x,y)\in R\times R \mid f(x)=2\}$ اي ان $f(x)=2$ لكل $x\in R$ اذن f دالة ثابتة

ملاحظة : اذاكانت $f:A\longrightarrow B$ دالة ثابتة فأن :

1) اذا كانت A محتوية على اكثر من عنصر فأن f غير متباينة.

2) اذا كانت B محتوية على اكثر من عنصر فأن f غير شاملة .

3.6.6 دالة الاحتواء Inclusion Function

اذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من B فتسمى الدالة $f:A\longrightarrow B$ بدالة الاحتواء اذا وفقط اذا كان $f(x)=x$ لكل $x\in A$.

<u>مثال</u> : لتكن $f:N\longrightarrow Z$ دالة معرفة كالاتي : $f=\{(x,y)\in N\text{x}Z|y=x\}$ هل ان f دالة احتواء ؟

<u>الحل</u> : بما ان $N\subseteq Z$ وان $f(x)=x$ لكل $x\in R$ فأن f دالة احتواء .

<u>مثال</u>: اذا كانت $f_1:[-2,2]\longrightarrow R$ دالة معرفة كالاتي :

$f=\{(x,y)\in A\text{x}B|y=x\}$ هل ان f دالة احتواء

<u>الحل</u>: بما ان $R\subseteq[-2,2]$ و $f(x)=x$ فأن f دالة احتواء

<u>ملاحظة</u> : لتكن $f:A\longrightarrow B$ دالة احتواء فأن :

1) اذا كانت $A=B$ فأن $f=I_A$
2) f دالة متباينة
3) اذا كانت $A\subseteq B$ فأن f دالة غير شاملة ؟

3.6.7 دالة القيمة المطلقة Absolute Value Function

لتكن $A=B=R$ و f دالة معرفة على R بالشكل :

$f=\{(x,y)\in R\text{x}R|y=|x|\}$ اي ان :

$$y=f(x)=\begin{cases} x & ;x\geq 0 \\ -x & ;x\prec 0 \end{cases}$$ ، f تُسمى دالة القيمة المطلقة

3.6.8 الدالة العكسية Inverse Function

لتكن $f:A\longrightarrow B$ دالة متقابلة فأن $f^{-1}:B\longrightarrow A$ تسمى دالة عكسية .

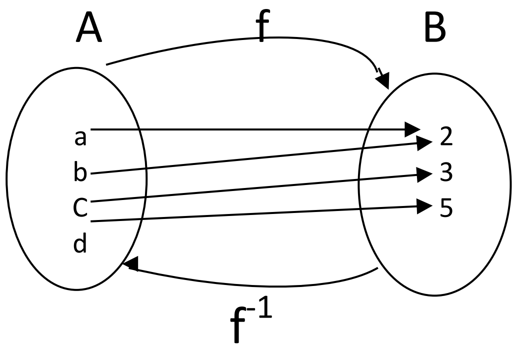
<u>مثال</u> : لتكن $A=\{a,b,c,d\}$ ، $B=\{2,3,5\}$ ، f علاقة من A الى B ومعرفة بالشكل الاتي : $f=\{(a,2),(c,3),(b,2),(d,5)\}$

لاحظ ان f دالة من A الى B ولها العلاقة العكسية

$f^{-1}=\{(2,a),(2,b),(3,c),(5,d)\}$

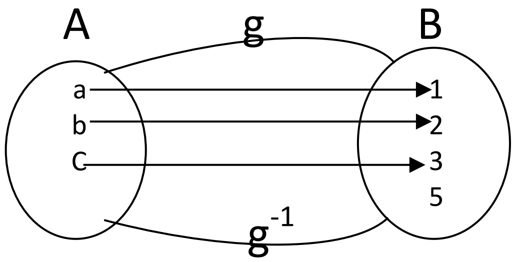
∀∀

لاحظ ان f^{-1} ليست دالة من B الى A لان العنصر 2 له صورتين مختلفتين.
ويعود سبب كون f^{-1} ليست دالة الى الدالة f التي هي ليست متباينة اي انها ليست تقابل .



<u>مثال</u> : لتكن $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{1,2,3,5\}$ و $g=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$
العلاقة العكسية لها $g^{-1}=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

لاحظ ان g^{-1} ليست دالة من B الى A وذلك لان العنصر $5 \in B$ ليس له صورة في A وهذا يعود لكون g ليست شاملة.



مما تقدم اعلاه يمكننا ان نستنتج ان الدالة العكسية تكون موجودة فقط عندما تكون الدالة الاولى متقابلة .

<u>ملاحظة</u> : لتكن $f:A\longrightarrow B$ دالة فأن : $(x,y) \in f$ ، اذا وفقط اذا كان $(x,y) \in f^{-1}$
وبعبارة اخرى $y=f(x)$ اذا وفقط اذا كان $x=f^{-1}(y)$

<u>مثال</u> : لتكن f علاقة على $\mathbb{R}$ معرفة كالاتي :

$$f = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y= x^3 \}$$

اذن :

$$f^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x= y^3 \}$$

بما ان $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:f^{-1} دالة اذن الدالة $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ لها معكوس

<u>مثال</u> : لتكن g علاقة على $\mathbb{R}$ معرفة كالاتي :

$$g = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y= x^2 \}$$

اذن :

$$g^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x= y^2 \}$$

هي علاقة عكسية

بينما $g^{-1}:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ليس دالة وذلك لو فرضنا ان $x=4$, $y_1=2$, $y_2=-2$
فان $(4,2) \in g^{-1} \wedge (4,-2) \in g^{-1}$

ولكن $-2 \neq 2$ وعلية تكون الدالة $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ليس لها معكوس

تتغطي المبرهنة التالية الشرط الكافي والضروري الى الدالة لكي بكون لها معكوس

<u>3.7 مبرهنة (3-1)</u>

تكون الدالة $f : A \longrightarrow B$ عكسية اذا وفقط اذا $f : A \longrightarrow B$ تقابلاً .

<u>البرهان</u>

نفرض ان $f : A \longrightarrow B$ دالة عكسية اذن $f^{-1} : B \longrightarrow A$ يكون دالة ، لكي يكون f $A \longrightarrow B$: تقابلاً فيجب ان نبرهن على انه دالة متباينة وشاملة ، سنبرهن اولاً على انه دالة متباينة لذا نفرض ان x_1 و x عنصران في A حيث ان $f(x)=f(x_1)$
ونفرض ان $f(x)=f(x_1)= y$

اذن $(x,y) \in f \wedge (x_1,y) \in f$
ومن تعريف العلاقة العكسية يكون :

$$(y,x) \in f^{-1} \wedge (y,x_1) \in f^{-1}$$

بما ان f^{-1} علاقة تابعية
فاذن

$$(y,x) \in f^{-1} \wedge (y,x_1) \in f^{-1} \longrightarrow x=x_1$$

اذن يكون $f : A \longrightarrow B$ دالة متباينة ، سنبرهن على ان $f : A \longrightarrow B$ دالة شاملة لذا
نفرض ان y عنصر في B وبما ان $f^{-1} : B \longrightarrow A$ تطبيق
اذن $\exists x \in A \ni (y,x) \in f^{-1}$
اي انه $\exists x \in A \ni y = f(x)$
وعليه تكون الدالة $f : A \longrightarrow B$ تطبيقاً شاملاً

وبصورة معاكسة نفرض ان $f : A \longrightarrow B$ تقابل وسنبرهن على التطبيق
$f : A \longrightarrow B$ معكوس
اي يجب ان نبرهن على ان $f^{-1} : B \longrightarrow A$ يكون دالة

(أ) نفرضان y عنصر في B
بما ان $f : A \longrightarrow B$ دالة شاملة
اذن $\exists x \in A \ni f(x) = y$

اي انه $\exists x \in A \ni (x,y) \in f$
ولكن $(x,y) \in f \rightarrow (y,x) \in f^{-1}$
اذن $\exists x \in A \ni (y,x) \in f^{-1}$
اي ان $dom\ f^{-1} = B$

(ب) لكي نبرهن على ان $f^{-1} : B \longrightarrow A$ علاقة تابعية نفرض ان :
$(y,x_1) \in f^{-1} \wedge (y,x_2) \in f^{-1}$
اذن $(x1,y) \in f \wedge (x_2,y) \in f$
اي ان $f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y$

وعليه يكون $f(x_1) = f(x_2)$
وبما ان $f : A \longrightarrow B$ دالة متباينة
اذن $x_1 = x_2$

اي ان $(y,x_1) \in f^{-1} \wedge (y,x_2) \in f^{-1} \longrightarrow x_1 = x_2$
اذن f^{-1} يكون علاقة دالية
وعليه يكون $f^{-1} : B \longrightarrow A$ دالة

∀∀

3.8 مبرهنة (3-2)

اذا كان $f : A \longrightarrow B$ دالة عكسية فأن $f^{-1} : A \longrightarrow B$ شاملاً .

البرهان : نفرض ان $f : A \longrightarrow B$ دالة معكوسة فمن التعريف $f^{-1} : A \longrightarrow B$ يكون دالة .

وسنبرهن الان على ان $f^{-1} : A \longrightarrow B$ تقابل

(أ) نفرضان كلاً من y_1 و y عنصر في B بحيث :

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_1)$$

ونفرض ان $f^{-1}(y) = f^{-1}(y_1) = x$

اذن $(y,x) \epsilon f \wedge (y_1,x) \epsilon f^{-1}$

ومن تعريف العلاقة النظيرة ينتج ان :

$$(y,x) \epsilon f \wedge (x,y_1) \epsilon f$$

اي ان $y = f(x) \wedge y_1 = f(x)$

اذن $y = y_1$

اذن الدالة $f^{-1} : A \longrightarrow B$ متباين

(ب) نفرض ان x عنصر في A

بما ان $f : A \longrightarrow B$ دالة فيوجد

$$\exists y \epsilon B \ni (x, y) \in f$$

ومن تعريف العلاقة النظيرة نستنتج ان :

$$(y, x) \in f^{-1}$$

اي انه $\exists y \epsilon B \ni (y, x) \in f^{-1}$

وبعبارة اخرى $\exists y \epsilon B \ni f^{-1}(y) = x$

اذن تكون الدالة $f^{-1} : B \longrightarrow A$ شاملاً

3.9 مبرهنة (3-3)

اذا كان $f : A \longrightarrow B$ دالة عكسية فأن :

(أ) $f^{-1} \circ f = I_A$

(ب) $f \circ f^{-1} = I_B$

∀∀

البرهان

(أ) بما ان $f : A \rightarrow B$ دالة معكوسة

اذن $f^{-1} : B \rightarrow A$ يكون دالة

وان $f^{-1} o f : A \rightarrow A$ يكون دالة

نفرض ان x عنصر في A وان $f(x) = y$

$$(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}(f(x))$$
$$(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}(y)$$
$$= x$$

بما ان $I_A : A \rightarrow A$ دالة

اذن $I_A(x) = x$

اي ان $\forall x \in A, (f^{-1} o f)(x) = I_A(x)$

فمن مبرهنة سابقة ينتج ان :

$$f^{-1} o f = I$$

يترك البرهان فرع (ب) للطالب .

3.10 المجموعة النظيرة

ليكن $f : A \rightarrow B$ دالة ولتكن D مجموعة جزئية من B فأن مجموعة جميع العناصر في A التي تنتمي صورة كل عنصر منها الى D تُسمى المجموعة النظيرة الى D بفعل الدالة $f : A \rightarrow B$ ، (The inverse image of D under $f : A \rightarrow B$) ويرمز لها بالرمز $f^{-1}(D)$

وبعبارة اخرى :

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

ملاحظة : اذا كان $f:A \rightarrow B$ دالة وان D مجموعة جزئية من B تحتوي على عنصر وا حد فقط مثلاً $D = \{b\}$ فسوف نستعمل الرمز $f^{-1}(b)$ بدلاً من الرمز $f^{-1}\{(b)\}$ وذلك لغاية الاختصار

مثال : اذا كان $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دالة

بحيث $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 1$

فان $f^{-1}(17) =\{x\epsilon A \mid f(x)=17\}$
$= \{ x\epsilon A \mid x^2 +1 =17\}$
$=\{-4,4\}$

كذلك $f^{-1}(\{5,10\}) = \{ x \epsilon A \mid f(x) \epsilon\{5,10\}\}$
$=\{x\epsilon A \mid x^2+ 1 = 5 \vee x^2 + 1 =10\}$
$=\{-2,2,-3,3\}$

3.11 مبرهنة (3-4)

ليكن $f : X \rightarrow Y$ دالة ولتكن كل من C ,D مجموعة جزئية من المجموعة Y
فاذا كان $C =D$ فان $f^{-1}(C) = f^{-1}(D)$

البرهان :

نفرض ان $C = D$
ونفرض ان $x \epsilon f^{-1} (C)$
فمن تعريف الصورة النظيرة فان $x \epsilon f^{-1}(D)$ اذن
$x \epsilon f^{-1}(C) \longrightarrow x \epsilon f^{-1}(D)$
اي ان
(1) $f^{-1}(C) \subsetneq f^{-1}(D)$

بصورة مماثلة ينكن برهنة
(2) $f^{-1}(D) \subsetneq f^{-1}(C)$
ينتج من (1) و(2) ان :
$f^{-1}(C) = f^{-1}(D)$

ملاحظة : اذا كان $f^{-1}(C) = f^{-1}(D)$ فليس من الضروري ان يكون $C = D$ كما في المثال التالي

مثال :

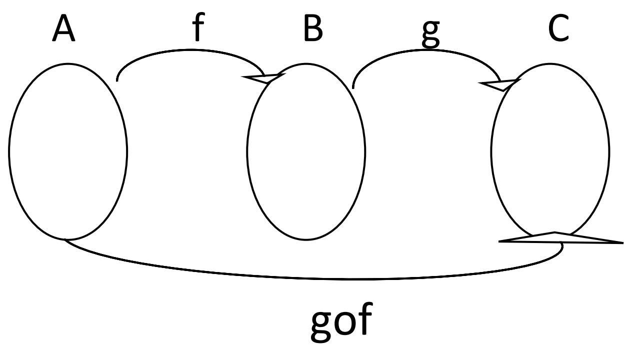
ليكن $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دالة معروفة بحيث $f(x) = | x |$
وليكن $C = (0,1)$ $D =(-2 ,1)$

فأن $f^{-1}(0,1) = (-1,1)$
$f^{-1}(-2,1) = (-1,1)$

لاحظ ان $f^{-1}(0,1) = f^{-1}(2,1)$
ولكن $(0,1) \neq (-2,1)$

3.12 تركيب ال دوال Composite Functions

لتكن $f:A \longrightarrow B$ دالة و $g:B \longrightarrow C$ دالة اخرى فأن
$gof : A \longrightarrow C$ دالة



gof يسمى تركيب الدالتين f و g ويُعرف بالشكل $(gof)(x)=g(f(x))$

وبنفس الطريقة يمكننا تركيب اكثر من دالتين فمثلاُ $ho(gof)$ حيث ان :
$(hog)of=ho(gof)$

<u>مثال</u>: لتكن $f:R \longrightarrow R$ دالة معرفة بالشكل $f(x)=2x^2+1$ و $g:R \longrightarrow R$ دالة اخرى معرفة بالشكل $g(x)=x-3$ فأن

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x^2+1) = 2x^2+1-3 = 2x^2-2$$

و $$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = 2(x-3)^2+1 = 2x^2-12x+19$$
لاحظ ان $gof \neq fog$
اي تركيب الدوال غير ابدالي.

$\forall$

<u>3.13 مبرهنة (3-5)</u>

لتكن h,g,f ثلاثة دوال $f:A \longrightarrow B$ و$g:B \longrightarrow C$ و $h:C \longrightarrow D$ فأن

$$(hog)of=ho(gof)$$

<u>البرهان</u>: لكل $x \in A$ يكون

الطرف الايسر : $[(hog)of](x) = (hog)[f(x)]$

$= h[g(f(x))]$

الطرف الايمن : $[ho(gof)](x) = h[(gof)(x)]$

$= h[g(f(x))]$

لاحظ ان الطرف الايمن = الطرف الايسر

اي ان $(hog)of=ho(gof)$

<u>مثال</u> اذا كانت $f:N \longrightarrow N$ دالة معرفة بالشكل $f(x)=4x^2$ لكل $x \in N$ و $g:N \longrightarrow N$ دالة اخرى معرفة بالشكل $g(x)=3x+1$ لكل $x \in N$ فان

$gof:N \longrightarrow N$ ايضاً دالة وان $(gof)(x) = g(f(x))$

$=g(4x^2)=3(4x^2+1) = 12x^2+3$

<u>3.14 مبرهنة (3-6)</u>

ليكن $f:A \longrightarrow B$ دالة متباينة و$g:B \longrightarrow C$ دالة اخرى متباينة فأن $gof:A \longrightarrow C$ دالة متباينة ايضاً.

<u>البرهان</u> : لنفرض x_1، x_2 عنصران في A بحيث

$$(gof)(x_1)=(gof)(x_2)$$

من تعريف تركيب الدوال $go(f(x_1)) = g(f(x_2))$

وبما ان g دالة متباينة فأن $f(x_1)=f(x_2)$

بما ان fدالة متباينة فأن $x_1=x_2$

اذن التركيب gof دالة متباينة.

<u>3.15 مبرهنة (3-7)</u>
ليكن كل من $f:A \longrightarrow B$ و $g:B \longrightarrow C$ دالة شاملة فأن $gof:A \longrightarrow C$ دالة شاملة ايضاً.

<u>البرهان</u> : لتكن $Z \in C$
(g شاملة) $\therefore \quad \exists y \in B \quad \ni \quad g(y) = Z$
وبما ان f ايضاً شاملة $\therefore \quad \exists x \in A \quad \ni \quad f(x) = y$

$$\therefore \quad \exists x \in A \quad \ni \quad Z = g(f(x)) = (gof)(x)$$
اذن gof دالة شاملة

<u>3.16 مبرهنة (3-8)</u>
اذا كانت كل من $f:A \longrightarrow B$ و $g:B \longrightarrow C$ دالة متقابلة فأن gof دالة متقابلة ايضاً.
<u>البرهان</u> : يُترك للطالب

<u>3.17 مبرهنة (3-9)</u>
اذا كانت كل من $f:A \longrightarrow B$ و $g:B \longrightarrow C$ دالة فأنه اذا كان التركيب gof دالة متباينة فأن f دالة متباينة ايضاً .

<u>البرهان</u> : لنفرض ان x_1، x_2 عنصران في A بحيث ان
$$f(x_1)=f(x_2)$$
$$\therefore \; g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

ومن تعريف التركيب نحصل $(gof)(x_1)=(gof)(x_2)$
$\because$ gof دالة متباينة اذن $x_1=x_2$ اي ان f دالة متباينة

<u>3.18 مبرهنة (3-10)</u>
اذا كان (gof) دالة شاملة فأن g شاملة .
<u>البرهان</u> : لتكن $Z \in C$
(gof شاملة) $\therefore \quad \exists x \in A \quad \ni \quad gof(x) = Z$

∀∀

$$\therefore \quad \exists x \in A \quad \ni \quad g(f(x)) = Z$$

بما ان $f(x) \in B$ دالة شاملة $\Longleftarrow$ اذن g دالة شاملة

3.19 نتيجة

اذا كانت $f:A \longrightarrow B$ دالة و$g:B \longrightarrow C$ دالة اخرى فأنه اذا كان التركيب (gof) دالة متقابلة فأن f متباينة وg دالة شاملة .

البرهان : بما ان gof دالة متقابلة اي انها متباينة وشاملة اذن من المبرهنة السابقة اذا كانت gof دالة متباينة فأن f متباينة وgof دالة شاملة فأن g شاملة

ملاحظة عكس النظرية غير صحيح حسب المثال التالي :

مثال : لتكن $f:R \longrightarrow R$ ومعرفة $f(x)=x$
$g:R \longrightarrow R$ ومعرفة $g(x)=x^2$ فأن $gof:R \longrightarrow R$ دالة بحيث
$(gof)(x)=g(f(x)) = g(x)=x^2$ لاحظ ان f دالة متباينة و g دالة شاملة لكن الدالة gof ليست متباينة لان
$(gof)(-2)=(-2)^2=4$ و $(gof)(2)=(2)^2=4$
لكن $-2 \neq 2$ اذن gof لا يكون دالة متقابلة

$\forall$

أسئلة الفصل الثالث

س1: لتكن $f:R\longrightarrow R$ ومعرفة بالشكل $f(x)=x^2-1$ اثبت ان$f(x)$غير متباينة؟

س2: لتكن $f:[-1,1]\longrightarrow R$ ومعرفة بالشكل :
$f(x)=x^2$ و $g:[-3,-1]\longrightarrow R$ ومعرفة كالاتي $g(x)=x^3$ اي من الدوال اعلاه متباينة ؟

س3: لتكن $A=\{0,1,2,3\}$ و $B=\{0,1,4,9\}$ وf معرفة كالاتي : $f(x)=x^2$
برهن ان f دالة عكسية ثم جد $f^{-1}(x)$ ؟

س4: اذا كانت $f\ ,g:R\longrightarrow R$ دالتين معرفتين بالشكل الاتي
$f(x)=x^2+3x+1$ و$g(x)=2x-3$ جد كلاً من fog ، gof، gog ، fof؟

س5: لتكن $h:R^2\longrightarrow R^2$ ومعرفة كالاتي $h(x,y)=(x^2,2y)$ بين فيما اذا كانت h دالة متباينة ؟ شاملة ؟ متقابلة ؟

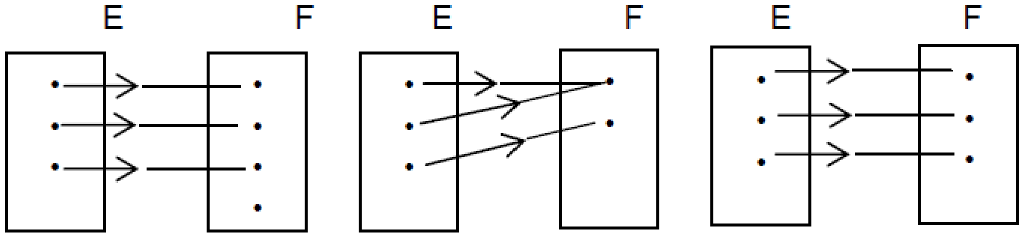
س6: لتكن كل من $f:A\longrightarrow B$ و $g:C\longrightarrow D$ دالة ، يُعرف حاصل ضرب f،g كما يلي : $(f\times g)(x,y)=(f(x),g(y))$ لكل $(x,y)\in A\times c$
برهن على ان $f\times g$ دالة من $A\times c$ الى $B\times D$

س7: اذا كانت $f: R\longrightarrow R^2$ دالة معرفة بالشكل $f(x)=(x,2x-1)$ و$g:R\longrightarrow R^2$ دالة اخرى معرفة كالاتي $g(x)=(x,\sin x)$، جد gof ، fog (ان وجدا) ؟

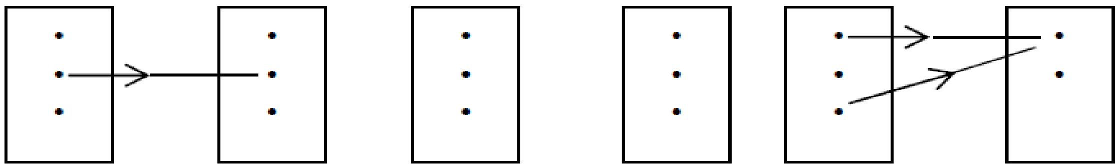
س8: لتكن $f:Z\longrightarrow Z$ دالة معرفة بـ $f(x)=5x-3$هل fدالة متقابلة ؟

س9: اذا $f:R\longrightarrow R$ ومعرفة $f(x)=e^{2x}$،هل ان f دالة متباينة؟ شاملة ؟ متقابلة ؟

س10: عين نوع كل من الدوال التالية من خلال مخططاتها؟



س11: اكمل المخططات التالية بحيث تحصل على نوع التطبيق المطلوب



f تقابل f متباين f

س12: $E=\{0,1,5\}$ و $F=\{-7,5,7,9\}$

1) $E=\{0,1,5\}$ و $F=\{-7,5,7,9\}$

R علاقة من E الى F حيث: $R(x,y) \Longleftrightarrow x^2+y^2=50$

بين صحة العلاقات التالية :

أ-$G=\{(1,-7),(1,7),(5,5)\}$ و R ليست دالة ب-$G=\{(1,7),(5,5)\}$ و R دالة

2) ضع القيمة المناسبة (ص او خ) امام مجموعة التعريف المقترحة ؟

f دالة للمجموعة IR في نفسها	مجموعة التعريف المقترحة	القيمة
$f(x)=(x+5)^2+8$	D=IR-{8}	
$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$	D={0}	
$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$		
$f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x+3}{x-1}$	D=IR-{1} D=IR-{0,1}	

3) f و g تطبيقان للمجموعة IR-$\{\frac{3}{2}\}$ في IR-$\{\frac{1}{3}\}$ بحيث :

$$g(x)=\frac{1}{3}+\frac{13}{6x-9} \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{2x+10}{6x-9}$$

أ- احسب $f(\frac{2}{5})$ ثم حل المعادلة $f(x)=\frac{5}{2}$ ؟

ب- أثبت ان f شاملة ، هل هي متباينة ؟ ت- أثبت ان g=f ؟

س13: f و g تطبيقان بحيث : $f:(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$ | $g:(2,+\infty)\longrightarrow(2,+\infty)$

$$f(x)=\frac{6}{x}+2 \qquad g(x)=\frac{30}{x^2-4}$$

أ- تحقق ان $f(\sqrt{7}+1)=\sqrt{7}+1$

ب-عين الاعداد الطبيعية n التي تحقق f(n)>4

(الجواب: نجد n<3 ومنه n∈{1,2})

ج -احسب (gof)(x)(الجواب:g[f(6)]=g(3)=6)

س14: f تطبيق للمجموعة IR في نفسها حيث :f(x)=||x|-1|+3 :

أ- احسب f(-1) و f(4)

ب-اثبت ان f(-x)=f(x) ∀ x∈IR

ج-عين x بحيث f(x)

الفصل الرابع
الاعداد الحقيقية REAL NUMBERS

4.1 مقدمة

قبل ان نعرف الحقل لا بد ان نعرف الزمرة ، ونؤكد على ان الزمرة من النظم الرياضية التي تحقق شروطاً معينة وان النظام الرياضي يتكون من عملية ثنائية او اكثر ، لذلك سنبدأ بتعريف للعملية الثنائية.

4.2 العملية الثنائية Binary Operation

لتكن A اي مجموعة غير خالية ويقصد بعملية ثنائية * على المجموعة A دالة : $*: A\times A \longrightarrow A$ هذه الدالة تُخصص لاي زوج مرتب من عناصر Aعنصراً واحداً فقط في A.

اي ان $(a*b) \in A$ لكل $(a,b) \in A$ (اي ان الناتج يجب ان يكون في A)

مثال : لتكن N مجموعة الاعداد الطبيعية والعملية * هي عملية الجمع. هل ان * عملية ثنائية على N ؟

الحل : $N=\{0,1,2,\ldots\}$, $*: N\times N \longrightarrow N$

$*(a,b)=a+b$

وبما ان a,b عددين طبيعيين فأن (a+b) ايضاً عدد طبيعي

اذن عملية الجمع عملية ثنائية على N .

مثال: لتكن * هي عملية الطرح المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية ، هل ان * عملية ثنائية على N.

الحل: $-: N\times N \longrightarrow N$ و $N=\{0,1,2,\ldots\ldots.\}$

$-(1,5)=1-5=-4$ و $-4 \notin N$

اذن عملية الطرح غير ثنائية على N.

ملاحظة : اذا كانت A مجموعة منتهية اي لها عدد محدد من العناصر ، فبالإمكان وصف العملية الثنائية بجدول .

مثال : لتكن $A=\{0,1,2,3\}$ العملية * معرفة على A كما يلي :
$a*b=$ اصغر باقي قسمة $(a+b)$ على 4.
هل ان * عملية ثنائية على A ؟
الحل : نعمل الجدول التالي :

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

من الجدول نلاحظ ان $a*b\in A$ لكل $a,b\in A$
∴ * عملية ثنائية على A.

مثال : لتكن $A=\{-1,0,1\}$ والعملية * المعرفة على A هي عملية الجمع . هل ان * عملية ثنائية على A ؟
الحل : تكون جدول العملية *

+	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

لاحظ $(-1)*(-1)=-1+(-1)=-2$
وان $-2 \notin A$ اذن عملية الطرح ليست ثنائية على A.

4.3 النظام الرياضي Mathematical System

هو عبارة عن مجموعة ليست خالية مع عملية واحدة او اكثر من العمليات الثنائية المُعرفة على هذه المجموعة.

النظام الرياضي ذو العملية * والمعرفة على المجموعة $A \neq \Phi$ ويُرمز له بالزوج المرتب $(A,*)$ يُسمى نظاماً رياضياً ذا عملية واحدة.

واذا كانت هناك عمليتين على A مثل * و Θ فأن النظام الرياضي يُكتب بالشكل (A،*، Θ) ويسمى نظاماً رياضياً ذا عمليتين.

مثال : (N,+) و (Z,+) و (Q,+) انظمة رياضية لان عملية الجمع عملية ثنائية اما (N,-) لا تمثل نظاماً رياضياً وذلك لان عملية الطرح ليست ثنائية على N.

4.3.1 انواع العمليات الثنائية

لتكن A مجموعة و * عملية ثنائية على A يُقال ان :

1) * عملية تبادلية (abelian) اذا وفقط اذا كان $a*b=b*a$ لكل $a,b \in A$

2) * عملية تجميعية (Commulative) اذا وفقط اذا كان $(a*b)*c=a*(b*c)$ لكل $a,b,c \in A$

مثال : لتكن $A=\{0,1\}$ و* هي عملية الضرب المعرفة على المجموعة A فأن $a*b=b*a$ لكل $a,b \in A$
اذن عملية الضرب هي عملية ابدالية على A

*	0	1
0	0	0
1	0	1

مثال : لتكن X مجموعة المصفوفات من الدرجة (2×2) و* عملية ضرب المصفوفات ، هل ان * عملية ابدالية على X.

الحل : لاحظ ان * عملية ثنائية لان $(A*B) \in X$ لكل $A,B \in X$ و * ليست ابدالية لانهُ اذا كانت

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \quad , \quad A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

اي ان $AB \neq BA$

اذن * عملية غير ابدالية لكنها تجميعية لان $(A*B)*C=A*(B*C)$ لكل $A,B,C \in X$

4.4 الزمرة The Group

تتصف بعض الانظمة الرياضية بصفات معينة فتأخذ اسماءاً خاصة حسب تلك الصفات ومن أهم هذه الانظمة الزمرة.

وهي عبارة عن المجموعة A مع العملية الثنائية * المعرفة عليها والتي تحقق:

1) * عملية تجميعية (Cumulative) اي اذا كان a,b,c ЄA فأن :

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

2) العنصر المحايد (Identity element)

يوجد eЄA بحيث ان a*e=e*a=a لكل aЄA

او $\exists e \in A \ \ni a*e=e*a=a, \forall\, a \in A$

3) العنصر النظير(Inverse element)

لكل aЄA يوجد bЄA بحيث ان : a*b=b*a=e

او $\forall a \in A \ \exists b \in A \ \ni a*b=b*a=e$

b يسمى العنصر النظير للعنصر a

ملاحظة: الزمرة (A,*) تُسمى تبادلية $\longleftrightarrow$ كانت العملية الثنائية المعرفة عليها تبادلية.

مثال: بين فيما اذا كان النظام الرياضي (Z,+) زمرة ابدالية حيث ان Z هي مجموعة الاعداد الصحيحة ؟

1) عملية الجمع عملية تجميعية

$\forall a,b,c \in Z$; (a+b)+c=a+(b+c)

2) $\exists 0 \in Z \ \ni a+0=0+a=a \quad \forall a \in Z$

اذن (Z,+) تملك عنصر محايد هو الصفر

3) $\forall\, a \in Z, \exists -a \in Z \ \ni \ a+(-a)=-a+a=0=e$ اي ان (Z,+) تملك عنصر نظير وهو الصفر ، اذن (Z,+) تشكل زمرة وبما ان a+b=b+a لكل a,b Є Z اذن عملية الجمع ابدالية على Z

اذن (Z,+) تشكل زمرة ابدالية

✲ ✲

مثال : بين فيما اذا كان النظام (N,*) زمرة حيث * هي عملية الرفع لاس صحيح موجب .

الحل : لتكن $a,b,c \in N$

$$(a*b)*c=(a)^b *c=(a^b)^c=a^{bc}$$

$$a*(b*c)=a*(b^c)=(a)^{b^c}=a^{b^c}$$

لاحظ ان $(a*b)*c \neq a*(b*c)$

اي * ليست تجميعية على N.

اذن (N,*) ليست زمرة.

مثال: لتكن Z مجموعة الاعداد الصحيحة و* عملية ثنائية مُعرفة على Z بالشكل $a*b=a+b+1$ ، هل ان (A,*) تُشكل زمرة ابدالية ؟

الحل :1) * عملية تجميعية لان $(a*b)*c = a*(b*c)$

الطرف الايسر: $(a*b)*c=(a*b)+c+1$

$$=a+b+1+c+1$$
$$=a+b+c+2$$

الطرف الايمن: $a*(b*c)=a+(b*c)+1$

$$=a+(b+c+1)+1$$
$$=a+b+c+2$$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

2) يوجد العنصر المحايد

$$\exists e \in Z \quad \ni a*e=e+a=a \quad \forall a \in Z$$

$$a*e=a+e+1=a$$

$$e+1=0 \longrightarrow e=-1$$

وللتحقق من ان e=-1 هو العنصر المحايد

$$a*e=a*(-1)=a+(-1)+1=a-1+1=a$$

3) ليكن b نظير العنصر a اذن $a*b=e=-1$

$$a*b=a+b+1=-1$$

$$\therefore a+b+1=-1 \longrightarrow \boxed{b=-2-a}$$

وللتحقق من ان b=-2-a هو نظير a

a*b=a*(-2-a)

a+(-2-a)+1=a-2-a+1 =-1

اي ان a*b=-1=e

اذن (Z,*) تشكل زمرة

الان a*b =a+b+1

=b+a+1=b*a

اي ان * عملية ابدالية على Z اذن (Z,*) تشكل زمرة ابدالية

مثال :لتكن{A|مصفوفة من الدرجة(4× 2) ذات عناصر حقيقية}G=

هل ان (G,+) تشكل زمرة ؟

الحل : 1) عملية جمع المصفوفات تجميعية

$$\forall A, B, C \in G$$

$$A*(B*C)=(A*B)*C$$

2) العنصر المحايد هو المصفوفة الصفرية

$$\exists\, e=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ni$$

$$A+e=\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \end{pmatrix}=A, \quad \forall A \in G$$

3) وجود النظير لكل عنصر

$$\forall A=\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \end{pmatrix}; \exists B=-A=\begin{pmatrix} -a11 & -a12 & -a13 & -a14 \\ -a21 & -a22 & -a23 & -a24 \end{pmatrix}$$

بحيث ان

A+B=A+(-A)=

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a11 & -a12 & -a13 & -a14 \\ -a21 & -a22 & -a23 & -a24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

اذن (G,+) تُشكل زمرة

<u>مثال :</u> لتكن A={0,1,2,3} ، * معرفة على المجموعة A بالشكل التالي:

$$a*b = \begin{cases} a+b & if \quad a+b \prec 4 \\ a+b-4 & if \quad a+b \geq 4 \end{cases}$$

1) كون جدول العملية *
2) اوجد العنصر المحايد ان وجد
3) اوجد نظير كل عنصر من عناصر A
4) حل المعادلة $3=a^{-1}*a$ (1)

<u>الحل :</u>(1

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

2) نلاحظ من الجدول ان العنصر المحايد هو الصفر لان

$$a*0 = 0 + a = a \quad \forall a \in A$$

(3

العنصر	0	1	2	3
النظير	0	3	2	1

4) $(1)^{-1}*a=3+a$

$3+a=3 \Longrightarrow a=3-3=0$

مثال : لتكن Z_n هي المجموعة : $Z_n=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\cdots,\overline{n-1}\}$ ، ولتكن $\oplus$ عملية على Z_n معرفة على النحو التالي :

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$ حيث ان $a+b=c+kn$ وان كلاً من a ، b ، c ، k ، n عدد صحيح بحيث $0\leq c<n$ فمثلاً :

$Z_n=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$

$\bar{3}\oplus\bar{5}=\bar{2}$

لان $3+5=8=6+2$

وكذلك $\bar{2}\oplus\bar{4}=\bar{0}$

لان $2+4=6+0$

4.5 بعض مبرهنات الزمرة

4.5.1 مبرهنة (4-1) العنصر المحايد في الزمرة $(A,*)$ يكون وحيداً.

البرهان : ليكن e عنصر محايد للزمرة $(A,*)$ ولنفرض عنصر محايد اخر è

اذن اذا كان e عنصر محايد فأن è *e=è -----(1)

اذا كان è عنصر محايد فأن e*è=e -----(2)

اذن من (1) و(2) e=è

$\therefore$ للزمرة $(A,*)$ عنصر محايد وحيد

4.5.2 مبرهنة (4-2) : اذا كانت $(A,*)$ زمرة وكانت $a,b,c \in A$ فأنه :

1) $a*b=a*c \Longrightarrow b=c$

2) $b*a=c*a \Longrightarrow b=c$

تُسمى هذه المبرهنة مبرهنة الاختزال

<u>البرهان</u> : لنفرض a,b,cЄA من تعريف الزمرة يوجد 'a نظير العنصر a
1) بما ان $a*b=a*c$ (مُعطى)
اذن $a'*(a*b)=a'*(a*c)$
$(a'*a)*c=(a'*a)*b$
$e*c=e*b$ (النظير)
$b=c$ (العنصر المحايد)
2) يمكن برهانها بنفس الطريقة

4.5.3 مبرهنة (4-3) : نظير اي عنصر في الزمرة(*,A) وحيد ؟

<u>البرهان :</u> ليكن ,aЄA اذن يوجد 'ЄAa ('a نظير للعنصر a) واذا لم يكن وحيداً ، اذن يوجد نظير اخر للعنصر a وليكن b
1) $a'*a=e$ -----
2) $b*a=e$ -----
$a'*a=b*a$ باستخدام خاصية الاختزال
$a'=b$
اي ان نظير اي عنصر في الزمرة يكون وحيد

4.5.4 مبرهنة (4-4) : في الزمرة(*,A) اذا كان لكل a,bЄA :
(1) للمعادلة $a*x=b$ حل وحيد هو $a'*b$
(2) للمعادلة $x*a=b$ حل وحيد هو $a'*b$

<u>البرهان :</u> ليكن e عنصر محايد للزمرة (*,A)
$\exists\, a' \in A, \forall\, a \in A$
بما ان $a*x=b$
اذن $a'*(a*x)=a'*b$
$(a'*a)*x=a'*b$
$e*x=a'*b$
اذن $x=a'*b$
وبنفس الطريقة يمكن برهان (2).

4.5.5 مبرهنة (4-5) : في الزمرة$(A,*)$ اذا كان لكل $a,b\in A$ فأن :

$(a')'=a$ (1)

$(a*b)'=b'*a'$ (2)

البرهان : (1) $a'*(a')'=e$ ------ (1)

$a'*a=e$ ------ (2)

وبالمساواة $\cancel{a'}*(a')'=\cancel{a'}*a$ (خاصية الاختزال)

اذن $(a')'=a$

(2) ليكن $(a,b)\in A$ اذن $\exists(a,b)'\in A$

$(a*b)'*(a*b)=e$ ------ (1)

$$\begin{aligned}(b'*a')*(a*b)&=b'*[a'*(a*b)]\\&=b'*[(a'*a)*b]\\&=b'*[e*b]\\&=b'*b\\&=e \quad \text{------ (2)}\end{aligned}$$

من (1) و(2) ينتج : $(a*b)'*(a*b)=(b'*a')*(a*b)$

$(a*b)'=b'*a'$

مثال : لتكن * عملية معرفة Z وكالاتي :

$$a*b=a+b-ab \quad ,\forall a,b\in Z$$

1) بين ان الصفر عنصر محايد للعملية *

2) هل يوجد نظير للعدد 6 ؟

الحل :1) اذا كان $e=0$ عنصر محايد فأنه $a*e=e*a=a \quad ,\forall a\in Z$

$a+0-(a)(0)=0+a-(0)(a)=a$

$a \quad = \quad a \quad = a$

∴ الصفر عنصر محايد للعملية *.

2) لنفرض b هو نظير العنصر 6 اذن $b*6=6*b=e$

$b+6-6b=0 \longrightarrow 6-5b=0 \longrightarrow 6=5b \longrightarrow b=\frac{6}{5}\notin Z$

اذن لا يوجد نظير للعنصر 6.

4.6 حقل الاعداد الحقيقية Field of real numbers

بعد ان تعرفنا على الزمرة كنظام من اهم الانظمة ذات العملية الواحدة . الان سنأخذ نظام رياضي اخر من أهم الانظمة ذات العمليتين (A,*,#) حيث ان العملية الاولى * هي عملية الجمع والتي عنصرها المحايد هو الصفر والنظير الجمعي للعنصر a هو –a.

والعملية الثانية # هي عملية الضرب التي عنصرها المحايد هو (1) والنظير الضربي للعنصر a هو (a^{-1}).

4.6.1 الحقل Field :يُسمى النظام الرياضي (A,+,*) حقلاً اذا وفقط اذا تحقق :

1) (A,+) زمرة ابدالية
2) (A-{0}, ×) زمرة ابدالية
3) العملية × تتوزع على العملية **+**

مثال : بين ان (Z,+,×) لا تشكل حقلاً.

1) عملية الجمع تجميعية لكل a,b,c ЄZ ⟸ (a+b)+c=a+(b+c)

2) وجود العنصر المحايد $\exists e=0, a+e=e+a=a, \forall a \in Z$

3) $\forall a \in Z, \exists(-a) \in Z \ni a+(-a)=-a+a=e=0$

4) عملية الجمع ابدالية على Z لان $a+b=b+a, \forall a,b \in Z$

اذن (Z,+) تُشكل زمرة ابدالية

الان لنأخذ (Z-{0},×)

1) عملية الضرب تجميعية $\forall a,b,c \in Z, \quad a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

2) وجود العنصر المحايد $\exists e=1 \ni a+e=e+a=a, \forall a \in Z$

3) عدم وجود النظير الضربي في Z-{0}

اذن (Z-{0},×) لا تشكل زمرة اي ان (Z,+,×) لا تُشكل حقلاً.

مثال : بين ان النظام (Q,+,×) حقلاً حيث Q هي مجموعة الاعداد النسبية.

الحل : (Q,+)

1) عملية الجمع تجميعية على Q لانه

$$\forall a,b,c\in Q \quad (a+b)+c=a+(b+c)$$

2) وجود العنصر المحايد $\exists e=0, a+e=e+a=a$

3) وجود النظير $\forall a\in Q, \exists -a\in Q \ni a+(-a)=-a+a=0=e$

4) عملية الجمع ابدالية لان $\forall a,b\in Q \quad , \quad a+b=b+a$

اذن (Q,+) تشكل زمرة ابدالية

الان (Q-{0},x)

(1) عمل الضرب تجميعية $\forall a,b\in Q-\{0\}$

a×(b×c)=(a×b)×c

(2) وجود المحايد $\exists e=1 \ni a\times e=e\times a=a$

(3) وجود النظير

$$\forall a\in Q-\{0\}, \exists \frac{1}{a}\in Q-\{0\} \ni a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1=e$$

(4) عملية الضرب ابدالية لان $\forall a,b\in Q-\{0\} \quad , \quad a\times b=b\times a$

اذن (× ,{0}-Q) تشكل زمرة ابدالية

اي ان (Q,+,×) يُشكل حقلاً

4.7 مجموعة الاعداد النسبية Rational Numbers Set

يُرمز لها بالرمز Q وهي خارج قسمة عددين صحيحين اي ان

$$Q=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in Z, b\neq 0\right\}$$

مثال : $4,6, \frac{-5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ حيث ان $Z\subseteq Q$

ملاحظة : بين كل عددين نسبيين يوجد ما لانهاية من الاعداد النسبية.

4.8 مجموعة الاعداد غيرالنسبية lrrational Numbers Set

يُرمز لها بالرمز I وتُعّرف { ×عدد عشري غير منته وغير مدور|×}=I

مثال: $\sqrt{7},\sqrt{5}$ ، الكسور العشرية ، $\frac{22}{7}=3.1428....$

ملاحظة: 1) اذا كان a عدد نسبي وb عدد غير نسبي فأن $\frac{1}{b}$ ، b-a ، a-b اعداد غير نسبية

مثال : a=2 ، b=$\sqrt{3}$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}\in I;b-a=(\sqrt{3-2)}\in I,a-b=\left(2-\sqrt{3}\right)\in I$$

2) حاصل جمع وطرح عددين غير نسبيين ليس بالضرورة ان يكون عدد غير نسبي.

مثال : ليكن $a=\sqrt{3},b=1-\sqrt{3}$ اعداد غير نسبية

فأنه $a+b=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1\in Q$

$$a-b=\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1+\sqrt{3}=(2\sqrt{3}-1)\in Q$$

3) حاصل قسمة وضرب عددين غير نسبيين ليس بالضرورة ان يكون عدد غير نسبي.

مثال : ليكن $a=\sqrt{2},b=\frac{1}{\sqrt{2}},c=\Pi$

فأن $a.b=\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=1\in Q$

$$a.c=\Pi.\sqrt{2}=\sqrt{2}\prod\in I$$

$$c\div c=\pi\div\pi=1\in Q$$

اي ان مجموع الحقيقية تشمل الاعداد النسبية والاعداد غير النسبية

$$\therefore R = Q \cup I$$

وسنذكر فيما يلي بعض البديهيات او الخواص على مجموعة الاعداد الحقيقية منها :

4.8.1 خاصية الترتيب :

اذا كان w,z,y,x اعداد حقيقية فأن :

1) واحدة فقط من هذه العبارات تكون صادقة x=y ,x>y ,x<y
2) العبارة x>y تعني y<x
3) اذا كان x<y فأن x+z<y+z
4) اذا كان x>0 وy>0 فأن xy>0
5) اذا كان x>y و y>z فان x>z
6) اذا كان x<y فأن xz<yz (اذا كان Z>0)
7) اذا كان x<y فأن xz>yz (اذا كان Z<0)
8) اذا كان x>y>0 و z>w>0 فأن xz>yw>0

4.8.2 خاصية ارخميدس

اذا كان x>0 وy اي عدد حقيقي فأنه يوجد عدد صحيح موجب n بحيث ان nx>y

مثال: اذا كان x=0.1 ، y=3.4 فأنه

$$\exists\, n = 100 \ni \quad nx = (100)(0.1) = 10 > 3.4$$

مثال : اذا كان x=2.5 و y=9.6 فانه يوجد n=200 بحيث ان

nx=(200)(2.5)=500>9.6

4.8.3 متراجحة كوشي–شوارتز : Cauchy – Schwartz Inequality

اذا كان $a_1,a_2,\ldots,a_n$ و $b_1,b_2,\ldots,b_n$ اعداد حقيقية فأن

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{n=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

البرهان : بما ان مجموع المربعات لا يمكن ان يكون سالباً اذن

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2 \geq 0$$

$$x^2\sum_{k=1}^{n}a_k^2 + 2x\sum_{k=1}^{n}a_k b_k + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 \geq 0\cdots\cdots(1)$$

ولنفرض $\sum_{k=1}^{n}a_k^2 = A \quad , B=\sum_{k=1}^{n}a_k b_k$

$$\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2 = c$$

نعوض في المعادلة (1) $Ax^2 + 2Bx+C \geq 0$

بما ان $A\geq 0$ (مجموع مربعات)اذن اما $A=0$ او $A>0$

في حالة $A>0$ نعوض عن x بالمقدار $-\frac{B}{A}$ فنحصل

$$A(\frac{-B}{A})^2 + 2B(\frac{-B}{A}) + C \geq 0$$

$$\therefore \frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C \geq 0 \Rightarrow \frac{-B^2}{A} + C \geq 0$$

اي ان

$$B^2 \leq AC \Leftarrow \quad \frac{B^2}{A} \leq C$$

اذن

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

اما اذا كانت $A=0$ فأن $B=0$ والمتراجحة ستكون صحيحة ايضاً

4.9 القيمة المطلقة Absolute Value

اذا كان x عدد حقيقي فأن

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

وهي بعد النقطة x عن نقطة الاصل

4.9.1 مبرهنة (4-6)

اذا كان $a\geq 0$ فأن $|x|\leq a$ اذا وفقط اذا كان $-a\leq x\leq a$

البرهان : نفرض $|x|\leq a$ ونريد اثبات $-a\leq x\leq a$

من تعريف القيمة المطلقة $|x|=x$ او $|x|=-x$ ومن الفرض $|x|\leq a$ اذن

$$|x| = x\leq a \longrightarrow x\leq a$$
$$|x| = -x\leq a \longrightarrow x\geq -a$$

وهذا يعني $-a\leq x\leq a$

الان نفرض $-a\leq x\leq a$ ونريد اثبات $|x| \leq a$

من تعريف القيمة المطلقة $|x|\leq a \longrightarrow |x|=x\leq a$

$|x|=-x$;

من الفرض $-a\leq x \longrightarrow -x\leq a$

$$\therefore |x| = -x \leq a \rightarrow |x| \leq a$$

اذن $|x|\leq a$

4.9.2 مبرهنة (4-7)

اذا كان x و y عددين حقيقيين فأن $|x+y|\leq|x|+|y|$

المتراجحة اعلاه تسمى المتراجحة المثلثية Triangular Inequality

البرهان : من تعريف القيمة المطلقة :

$$-|x|\leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq|y|$$

بجمع العلاقتين نحصل على :

$$-|x|+(-|y|) \leq x+y\leq |x|+|y|$$
$$-[|x|+|y|]\leq x+y \leq [|x|+|y|]$$

اذن من المبرهنة اعلاه نستنتج : $|x+y|\leq|x|+|y|$

✲ ✲

4.9.3 مبرهنة (4-8)

اذا كان x و y عددين حقيقيين فأن $|x-y| \geq |x|-|y|$

البرهان : $|x|=|x-y+y|$

من المبرهنة (4-7)

$$|x|=|x-y+y| \leq |x-y|+|y|$$

$$|x| \leq |x-y|+|y|$$

اذن $|x|-|y| \leq |x-y|$

4.10 الفضاء الاقليدي Eucleadian Space

لتكن n عدد صحيح موجب نعرف $R^n=\{(x_1,x_2,\ldots x_n) | x_i \in R\}$

4.10.1 العمليات الجبرية على R^n

(1) المساواة : ليكن $X,Y \in R^n$

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad ,Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

فأن $X=Y \longleftrightarrow x_1=y_1 \ ,x_2=y_2 \ ,\ldots,x_n=y_n$

(2) الجمع : $X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$

(3) الطرح:

$$X-Y=X+(-1)Y$$
$$=(x_1-y_1,x_2-y_2,\ldots,x_n-y_n)$$

(4) الضرب في عدد ثابت : اذا كان $a \in R$ فأن

$$aX=(ax_1,ax_2,\ldots,ax_n)$$

(5) الضرب الداخلي Inner Product

$$X.Y=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

(6) المعيار The Norm

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

||x-y||يُدعى المسافة بين X و Y

$$\|X - Y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

4.10.2 خصائص المعيار : لتكن $X,Y \in R^n$ فأن

(1) ||X-Y||=||Y-X||

(2) ||X|>0 و ||X||=0 $\longleftrightarrow$ X=0

(3) ||aX||=|a|.||X|| لكل عدد حقيقي a

(4) ||X.Y||≤||X||.||Y|| تسمى متراجحة كوشي-شوارتز

(5) ||X+Y||≤||X||+||Y|| تسمى المتراجحة المثلثية

برهان (1) :

$$\|X - Y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = \| Y - X \|$$

اذن ||X-Y||=||Y-X||

برهان (2) و(3) ينتج من التعريف
برهان (4) تم اثباته في برهان متراجحة كوشي شوارتز

برهان (5):

$$\|X+Y\|^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2+2x_ky_k+y_k^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^2+2\sum x_ky_k+\sum y_k^2=\|x\|+2\|x\|.\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين ينتج $||x+y||\leq||x||+||y||$

مثال: برهن على ان $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي

الحل : لنفرض ان $\sqrt{2}$ عدد نسبي $\Longleftarrow$ $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ حيث ان a، b عددين صحيحين موجبين ولا يوجد بينهما عامل مشترك غير الواحد

(بتربيع الطرفين) $2=\dfrac{a^2}{b^2}$

$2b^2=a^2$

اي ان a تقبل القسمة على (2) اي a عدد زوجي
ولنفرض r عدد صحيح موجب بحيث ان $a=2r$

$a^2=2b^2$

$2^2r^2=2b^2$

(بالقسمة على 2) $b^2=2r^2$

اي ان b^2 تقبل القسمة على (2) اي ان b تقبل القسمة على 2. ومن هنا نستنتج ان a وb لهما عامل مشترك (2) غير الواحد . اي ان a وb عددان زوجيان وهذا تناقض .

اذن نستنتج ان $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي

4.11 الفضاء المتري The Metric Space

بعد ان تعرفنا على نظام الاعداد الحقيقية ولاحظنا ان لهذا النظام نوعان من الخواص : النوع الاول هي الخواص الجبرية والتي تتعلق بالجمع والطرح والضرب والقسمة والنوع الثاني من الخواص هي التي تتعلق بمفهوم البعد او المسافة بين عددين سندرس نوع اخر من الفضاءات هو المتري ، وان الغرض من دراسة الفضاء المتري هو دراسة بعض الفضاءات التي يمكن ان يعرف فيها مفهوم البعد او المسافة .

تعريف الفضاء المتري : يُقال ان الزوج المرتب (M,d) فضاء متري اذا كان M مجموعة غير خالية وd هي الدالة $d:M\times M \longrightarrow R$ والتي يُحقق الشروط التالية:

$$(1)\ d(x,y) \geq 0 \quad ; \forall\ x,y \in M$$
$$(2)\ d(x,y) = 0 \longleftrightarrow x=y$$
$$(3)\ d(x,y) = d(y,x) \quad ; \forall\ x,y \in M$$
$$(4)\ d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y);\ \forall\ x,y,z \in M$$

تُسمى عناصر المجموعة M نقاط الفضاء او (النقاط) ويسمى d(x,y) البعد بين النقطتين x وy كما يُسمى d البعد او المسافة

4.12 انواع الفضاءات المترية :

(1) اذا كان $M=R^n$ ودالة المسافة معرفة بالشكل $d(x,y)=||x-y||$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

(R^n,d) يُسمى الفضاء المتري الاقليدي (Eucleadian Metric Space)

حيث ان $R^n = \{(x1,x2,----,xn) | x_i \in R\}$

واذا كان $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و $Y=(y1,y2,\ldots,yn)$ فأن :

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

✵ ✵

(2) اذا كانت M=C حيث ان C مجموعة الاعداد العقدية (المركبة) ودالة المسافة معرفة بالشكل $d(Z_1,Z_2)=|Z_1-Z_2|=|(x_1-x_2)+(y_1-y_2)|$

$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

حيث ان $Z_1=x_1+iy_1$ و $Z_2=x_2+iy_2$

(3) لتكن $M\neq\varphi$ و $d:M\times M\longrightarrow R$ ومعرفة بالشكل

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & ; \quad x\neq y\\ 0 & ; \quad x=y\end{cases}$$

فأن (M,d) يسمى الفضاء المتري المتقطع (Discrete Metric Space)

(4) اذا كانت $M=R^2$ ودالة المسافة d(x,y) معرفة كالاتي :

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

حيث ان $X=(x_1,x_2)$ و $Y=(y_1,y_2)$

وبالامكان تعريف مسافات اخرى على R^2 كالاتي :

$$d(x,y)=Max\{|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\}$$

<u>مثال</u> : جد المسافة بين X=(1,0,2), Y=(-1,7,0),

$$d(x,y)=Max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,|x_3-y_3|\}$$

$$=Max\{|1-(-1)|,|0-7|,|2-0|\}$$

$$=Max\{|2|,|-7|,|2|\}$$

$$=Max\{2,7,2\}$$

$$=7$$

<u>مثال</u>: اذا كانت $M\neq\varphi$ و R $d:M\times M\longrightarrow R$ ومعرفة

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & ; \quad x\neq y\\ 0 & ; \quad x=y\end{cases}$$

يحقق جميع شروط الفضاء المتري

(1) من التعريف عندما $x=y \Longleftarrow d(x,x)=0$

(2) من التعريف عندما $x\neq y \Longleftarrow d(x,y)=1>0$

(3) $d(x,y)=1=d(y,x)$

(4) خذ $x,y,z \in M$ والمطلوب $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

اذا كان $X=Y=Z$ $\Longleftarrow d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

$0\le 0+0$

$0\le 0$

الا اذا كان $x=y\neq z$ فأن $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

$0\le 1+1 \Longrightarrow 0\le 2$

اما اذا كان $x\neq y$ و $x=z$ و $z\neq y$ فأن

$1\le 0+1 \Longrightarrow 1\le 1$

وفي حالة $x\neq z$ ، $x\neq y$ ، $z=y$ فأن

$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y) \Longrightarrow 1\le 1+0 \Longrightarrow 1\le 1$

اذن الدالة اعلاه $d(x,y)$ تحقق جميع شروط الفضاء المتري

اذن (M,d) تشكل فضاء متري

<u>مثال</u>: لتكن $M=R^n$ لاي n تعرف $d(x,y)$ كالاتي

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

فهل ان (R^n,d) فضاء متري ؟

<u>الحل</u> :

(1) $d(X,X)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_i|=0$

(2) $d(X,Y)>0$ if $x\neq y$

اي انه يوجد k بحيث $x_k\neq y_k \Rightarrow |x_k-y_k|\succ 0$

اذن $d(X,Y)>0$

(3)

$$d(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|=d(Y,X)$$

$$\therefore\quad d(X,Y)=d(Y,X)$$

(4) $\forall X,Y,Z\in R^n$

$$d(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i+z_i-y_i|\le\sum_{i-1}^{n}|x_i-z_i|+\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|$$
$$\le d(X,Z)+d(Z,Y)$$

اذن (R^n,d) فضاء متري

4.13 الزمر الجزئية

لتكن $(G,*)$ زمرة ولتكن H مجموعة جزئية غير خالية من G فيقال بأن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ اذا كانت $(H,*)$ زمرة بحد ذاتها .

لاحظ ان كل زمرة تحوي غلى الاقل زمرتين جزئيتين هما $(\{e\},*)$ والزمرة نفسها ،وغالباً ما يطلق على هاتين الزمرتين بجزئيتين اسم الزمرة الجزئية التافهة.
ان المبرهنة التالية تبين لنا متى تكون مجموعة جزئية من زمرة ما زمرة جزئية .

4.14 مبرهنة (4-9)

لتكن $(G,*)$ زمرة ولتكن H مجموعة جزئية غير خالية من G فأن $(H,*)$ زمرة جزئية اذا تحققت الشروط التالية :

(1) لكل $a,b\in H$ فأن $a*b\in H$

(2) لكل $a\in H$ يكون $a^{-1}\in H$

البرهان : ان العملية * تجميعية على H لانها تجميعية على G. الان يجب ان نثبت ان H تحتوي على العنصر المحايد.

بما ان $H\neq\Phi$ اذن يوجد $a\in H$ ومن الشرط (2) فأن $a^{-1}\in H$ اذن

$e=a*a^{-1}\in H$ اي ان $e\in H \longleftarrow$ H تحتوي على العنصر المحايد

ملاحظة : ان معكوس هذه المبرهنة صحيح ايضاً.

مثال : $(2Z,+)$ زمرة جزئية من $(Z,+)$ بينما $(2Z+1,+)$ لا تشكل زمرة جزئية من $(Z,+)$ لان عملية الجمع (+) ليست ثنائية على $(2Z+1)$.

4.15 مبرهنة (4-10)

لتكن $(G,*)$ زمرة ولتكن $\Phi \neq H \subseteq G$ فأن $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي :
لكل $a,b \in H$ يكون $a*b^{-1} \in H$

<u>البرهان :</u> بما ان $H \neq \Phi$ من الفرض ، يوجد على الاقل عنصر مثل $a \in H$ بحيث ان $e=a*a^{-1} \in H$ وبما ان $a,e \in H$ فأن $a^{-1}=e*a^{-1} \in H$
واخيراً اذا كان $a,b \in H$ فأنه $b^{-1} \in H$
وكذلك $a*b=a*(b^{-1})^{-1} \in H$ وهذا يعني بأن * عملية ثنائية على H . اي ان $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$.

برهان الاتجاه الثاني يترك للطالب

4.16 مبرهنة (4-11)

لتكن كل من $(H_1,*)$ و$(H_2,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ فأن $(H_1 \cap H_2,*)$ تكون زمرة جزئية .

<u>البرهان:</u> بما ان H_1 و H_2 تحتوي على العنصر المحايد e اذن $H_1 \cap H_2 \neq \Phi$ ليكن كل من $a,b \in H_1 \cap H_2$ فأن $a,b \in H_1$ و $a,b \in H_2$
بما ان $(H_1,*)$ و$(H_2,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ فأن:

من المبرهنة اعلاه $\left.\begin{array}{l} a*b^{-1} \in H_1 \text{ و} \\ a*b^{-1} \in H_2 \end{array}\right\}$
اي ان $a*b^{-1} \in H_1 \cap H_2$
اذن $(H_1 \cap H_2 ,*)$ تُشكل زمرة جزئية

4.16.1 نتيجة : اذا كانت $(H_i,*)$ طائفة من الزمر الجزئية فأن $(\cap H_i,*)$ تكون زمرة جزئية ايضاً حيث ان $i=1,2,3,\ldots.$

<u>ملاحظة:</u> في حالة الاتحاد فأن$(H_1 U H_2 ,*)$ لا تُشكل زمرة جزئية بصورة عامة .

4.17 مبرهنة (4-12)

$(H_1UH_2,*)$ تكون زمرة جزئية اذا وفقط اذا كان $H_2 \subseteq H_1$ او $H_1 \subseteq H_2$.

البرهان: ليكن كل من $a,b \in H_1UH_2$ فأن $a,b \in H_1$ أو $a,b \in H_2$
$a*b^{-1} \in H_1$ أو $a*b^{-1} \in H_2$
اذن اما H_1 زمرة جزئية او H_2 زمرة جزئية وهذا يُناقض الفرض.

4.17.1 نتيجة : لا يمكن ان تتكون زمرة ما من اتحاد زمرتين جزئيتين غير غير تافهتين منها.

البرهان : نفرض كلاً من $(H_1,*)$ و $(H_2,*)$ زمرة جزئية غير تافهة من الزمرة $(G,*)$ وان $G=H_1UH_2$

بما ان $(H_1UH_2,*)$ تكون زمرة جزئية اذا وفقط اذا كان $H_2 \subseteq H_1$ او $H_1 \subseteq H_2$ اي انه اما $H_1=G$ او $H_2=G$ وهذا غير ممكن لان كل من $(H_1,*)$ و $(H_2,*)$ زمرة جزئية غير تافهة بالفرض.

مثال: لتكن $H_2 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}, H_1 = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ وكل من $(H_1,\oplus)$ و $(H_2,\oplus)$ زمرة جزئية من الزمرة $(Z_{12},\oplus)$

$$H_1 \cup H_2 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$$

سنبرهن ان كلاً من $(H_1,\oplus)$ و $(H_2,\oplus)$ زمرة لنكون جدول العملية $\oplus$ على المجموعة H_1:

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$

لاحظ (1) ان $\oplus$ تجميعية لكل عنصر من H_1

(2) وجود العنصر المحايد $\bar{0} = e$ ، $\bar{0} + \bar{6} = \bar{6}$ و $\bar{0} \oplus \bar{0} = \bar{0}$

(3) وجود العنصر النظير

العنصر	$\bar{0}$	$\bar{6}$
النظير	$\bar{0}$	$\bar{6}$

اذن $(H_1, \oplus)$ تُشكل زمرة

الان لنكون جدول العملية $\oplus$ على المجموعة H_2

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$

(1) لاحظ ان العملية $\oplus$ تجميعية على H_2

(2) وجود العنصر المحايد $\bar{0} = e$ لكل عنصر من عناصر H_2

(3) وجود العنصر النظير

العنصر	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
النظير	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

اذن $(H_2, \oplus)$ تُشكل زمرة

$$H_1 \cup H_2 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$$

لنكون جدول العملية $\oplus$ على المجموعة $H_1 U H_2$

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$-\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$-\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

نلاحظ من الجدول اعلاه ان العملية $\oplus$ ليست ثنائية على المجموعة $H_1 U H_2$ لان

$\bar{4}+\bar{6} = -\bar{2} \notin H_1 \cup H_2$ وكذلك $\bar{8}+\bar{6} = \bar{2} \notin H_1 \cup H_2$

اذن $(H_1 U H_2 , \oplus)$ ليست زمرة جزئية من $(Z_{12}, \oplus)$.

أسئلة الفصل الرابع

س1: اذا كانت المجموعة $M\neq 0$، d دالة المسافة $(d:M\times M \longrightarrow R)$ معرفة على M بالشكل $d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ اثبت ان (M,d) تشكل فضاء متري؟

س2: لتكن المجموعة G معرفة كالاتي $G=\{(a,b)\in R\times R|a\neq 0\}$ و * عملية ثنائية معرفة على G بالشكل $(a,b)*(c,d)=(ac,bc+d)$ برهن على ان $(G,*)$ تشكل زمرة ؟

س3: لتكن R مجموعة الاعداد الحقيقية) $*:R\times R \longrightarrow R$) ومعرفة كالاتي $x*y=xy+y$ لكل $x,y\in R$ ، هل ان * عملية ثنائية ؟ وما نوعها ؟

س4: اي الازواج التالية تشكل زمرة :

(a) $(R,+)$ (b) $(R-\{0\},.)$ (c) $(\{-1,1\},+)$

(d) $(Q,+)$ (e) $(Q,.)$ (f) $(2Z+1,+)$

س5: اذا كانت $S=\{1,2,3,4\}$ و* عملية ثنائية معرفة على Z كالاتي :

$$a*b=\begin{cases} a\times b & if \quad a\times b \prec 5 \\ a\times b-5 & if \quad a\times b\geq 5 \end{cases}$$

(أ) كون جدولا للعملية *

(ب) اوجد العنصر المحايد ان وجد

(ج) اوجد نظير كل عنصر من عناصر S

(د) حل المعادلة $(2)^{-1}*a=2$

س6: لتكن * عملية ثنائية معرفة على مجموعة الاعداد الصحيحة Z كالاتي :

$a*b=a^2+b^2-a$ اوجد:

(ا) $4*3$

(ب) $5*(-13)$

(ج) حل المعادلة $a*3=11$

س7: نعرف العملية الثنائية على مجموعة الاعداد الحقيقية R بالشكل
اوجد $a*b=3ab$
(ا) $2*4$
(ب) $4*2$
(ج) هل ان العملية * ابدالية

س8: لتكن Q^+ مجموعة الاعداد النسبية الموجبة و* عملية معرفة على Q^+ بالشكل التالي $\forall a,b \in Q^+ \; ; \; a*b=\frac{ab}{3}$ بين ان(Q^+،*) تشكل زمرة ابدالية ؟

س9: بين صحة العبارة التالية ، اذا كان (A-{e},.) حقلاً فانه لكل a,b,cЄA
(a.b)*c=(a*c).(b*c)

س10: بين اي الانظمة التالية تمثل حقلاً ؟
(a) (E,+,×)
(b) (Z^+,+,×)
حيث ان E مجموعة الاعداد الطبيعية الزوجية ؟

س11: لكل من المجموعات التالية H، برهن ان H مع عملية الضرب الاعتيادية تشكل زمرة جزئية من G:
أ) G={1,-1,i,-i} ، H={1,-1}
ب) G=R-{0} ، $H=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in Q, a^2+b^2 \neq 0\}$

س12: اثبت ان تقاطع زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية ؟

س13: اثبت انه اذا كانت (G,.) زمرة وaЄG فأن :
$$\forall m, \forall n \in Z, \quad a^m.a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{m.n}$$
مع العلم ان 1 هو العنصر المحايد في الزمرة وان : $a^0=1$
$$\forall p \in Z^-, a^p = (a^{-1})^{-p} = \underbrace{(a^{-1}).(a^{-1})\cdots(a^{-1})}_{\text{مرة (-p)}}$$

س14: اذا كانت (.,G) زمرة و aЄG عنصر حقق $a^n = 1$ فأن اصغر عدد طبيعي $0<n$ يُسمى رتبة او دورة العنصر a. هنالك من يرمز لهذه الرتبة بـ|a|.
واذا كان $a^n \neq 1$ من أجل كل $n \in N^+$ فأننا نقول ان a غير منتهية الرتبة ونكتب $|a|=\infty$.

(1) نفرض ان $a^n=1$ من اجل عدد طبيعي $0<n$.

أ- اثبت ان |a| يقسم n.

ب- نفرض في هذا السؤال ان |a|=n وان $n = n_1^{p1} \times n_2^{p2} \times \cdots \times n_r^{pr}$ هو تفكيك العدد n الى عوامل اولية . أثبت ان $| a^{n_1^{p_1}} | = n_2^{p_2} \times \cdots n_r^{p_r}$.

(2) ليكن b عنصراً من G. نفرض ان a.b=b.a ، وان |a|=n و |b|=p.
نفرض ان n وp اوليان فيما بينهما . اثبت انه يوجد عنصر c من G (لا يساوي بالضرورة a.b) رتبته تساوي المضاعف المشترك الاصغر للعددين n و P.

س15: لتكن (.,G) زمرة وA ، B زمرتين جزئيتين من G نعرف مجموعة الجداء AB بـ AB={a.bЄG ; aЄA ,bЄB}
برهن ان المجموعة AB تكون زمرة جزئية من G اذا وفقط اذا كان AB=BA.

س16: عرفت * على المجموعة Z حيث a*b=a ، $\forall a,b \in Z$ هل ان *عملية ثنائية؟

س17: هل ان (Q,*) نظام رياضي حيث * معرفة كما يأتي :

$$\forall a,b \in Q, a*b = \frac{a+b}{2}$$

س18: بين هل ان (Z,*) تمثل زمرة اذا كانت * معرفة كما يلي :

$$\forall a,b \in Z, a*b = ab+2$$

س19: بين هل ان (Q,*) تمثل زمرة ابدالية اذا كانت * معرفة كما يلي:

$$\forall a,b \in Q, a*b = \frac{ab}{7}$$

س20: لتكن {A={0,1,2,3، العملية * معرفة كالاتي: $\forall a,b \in A$، a*b= اصغر باقي ناتج قسمة a+b على 4، هل * عملية ثنائية على A؟

س21: لتكن {A={2,4,6، العملية * معرفة كالاتي: $\forall a,b \in A$، a*b= الاكبر منها، هل * عملية ثنائية على A؟ ما المحايد للعملية *؟

س22: لتكن العملية * معرفة على مجموعة الاعداد النسبية Q كما يأتي :

$$\forall a,b \in Q, a*b = a+b-1$$

(أ) اوجد المحايد للعملية *

(ب) هل يوجد نظير للعدد 9

س23: بين هل ان (R,*) زمرة حيث * معرفة كما يأتي : $a*b=\frac{a+b}{2}$ حيث R مجموعة الاعداد الحقيقية ؟

س24: بين هل ان (N,*) زمرة حيث * معرفة كما يأتي : $a*b=a+2b$ حيث N مجموعة الاعداد الطبيعية ؟

س25: اذا كانت (Q,*) زمرة حيث * معرفة كما يأتي : $a*b=\frac{ab}{2}$ حيث Q مجموعة الاعداد النسبية فأوجد المحايد لها والنظير لاي عنصر، هل * ابدالية؟ تحقق من ذلك؟

س26: بين هل ان (R,*) زمرة حيث * معرفة كما يأتي : $a*b=a+b-ab$ حيث R مجموعة الاعداد الحقيقية ؟

س27: بين هل ان (R,*) زمرة حيث * معرفة كما يأتي :
$a*b=a+b-2$ حيث R مجموعة الاعداد الحقيقية ؟ اوجد مجموعة الحل للمعادلة 5*x=2(لا تنسى ان المحايد غير موجود؟)

س28: بين هل ان (*,Z) تمثل زمرة اذا كانت * معرفة كما يلي :

$$\forall a,b \in Z, a*b = ab+2$$

س29: اكتب جدولاً للزمر التالية: (+,Z); ({1,-1,i,-i},.) ؟

س30: لتكن (*,G) زمرة ولنفرض $a^2=e$ لكل $a \in G$ ، برهن ان (*,G) زمرة ابدالية ؟

الفصل الخامس
الغاية والاستمرارية LIMIT&CONTINUITY

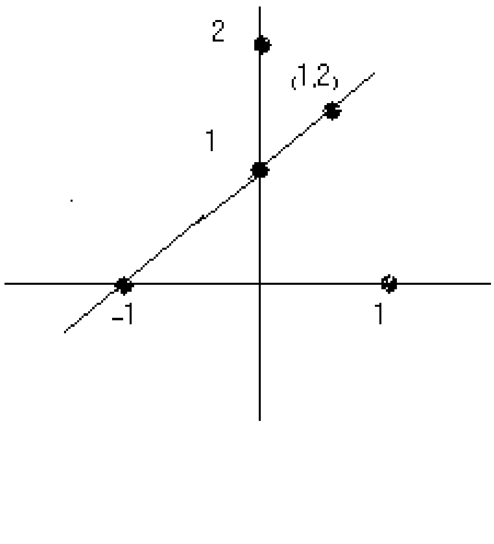
5.1 مقدمة

بعد ان تعرفنا على مفهوم الدالة وبعض انواع الدوال ، سنقوم في هذا الفصل باستعراض مفهوم الغاية ، الذي هو اساس حساب التفاضل والتكامل ونقوم بسرد اهم المبرهنات الخاصة بالغاية ، ومن ثم نتطرق الى شرح مفهوم الاستمرارية مع ذكر براهين بعض المبرهنات الخاصة بالموضوع.

ولاجل ان نقرب مفهوم الغاية ، سنأخذ المثال التالي الذي يساعد على فهم التعريف الرياضي الدقيق للغاية.

مثال : لتكن $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ، $x \neq 1$ لاحظ ماذا يحدث لقيم الدالة f عندما نعطي لـX قيماً قريبة جداً الى العدد 1؟ لاحظ ان الدالة غير معرفة في العدد 1. اي ان f(1) غير موجود. لاجل ان نجيب على هذا السؤال . نكون الجدول رقم (1) الذي يبين ان قيمة f(x) تقترب جداً من العدد 2 كلما اقتربت قيمة x من العدد 1من اليمين او اليسار لذا نقول "ان غاية الدالة f(x) من العدد 1 هي 2" وللتوضيح نرسم مخطط هذه الدالة في الشكل التالي . ان الشكل المكافئ للدالة هو $x \neq 1$ ، $f(x)=x+1$.

X	0.5	0.8	0.9	0.99	0.999	1.5	1.2	1.1	1.01	1.001	1.0001
f(x)	1.5	1.8	1.9	1.99	1.999	2.5	2.2	2.1	2.01	2.001	2.0001



δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

5.2 تعريف الغاية

لتكن f دالة حقيقية منطلقها D $(D \subseteq R)$. وليكن a عدد أ جقيقياً ، يقال ان غاية الدالة f في العدد a هي L اذا وفقط اذا تحقق لكل عدد حقيقي $\in > 0$ ، يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث $0 < |x-a| < \delta$ فأن $|f(x) - L| < \in$ و $x \in D$

اي بمعنى اخر

اذا اعطينا اي عدد حقيقي موجب ∈مهما كان صغيراً فأننا نستطيع ان نجد عدداً حقيقياً $\delta > 0$ بحيث ان $|f(x) - L| < \in$ عندما $0 < |x-a| < \delta$ و $x \in D$

المثال التالي يوضح فكرة تعريف الغاية

مثال : جد $\lim\limits_{x \to 1}(5x-3)$ واثبت ان اجابتك صحيحة ؟

الحل : $f(x)=5x-3$ ، $a=1$ ، $L=2$

لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$

بحيث $|x-1| < \delta$ فأن $|5x-3-2| < \in$

$$-\in < 5x-3-2 < \in$$

$$2-\in < 5x-5 < \in+2$$

$$5-\in < 5x < \in+5$$

$$1-\frac{\in}{5} \prec x \prec 1+\frac{\in}{5}$$

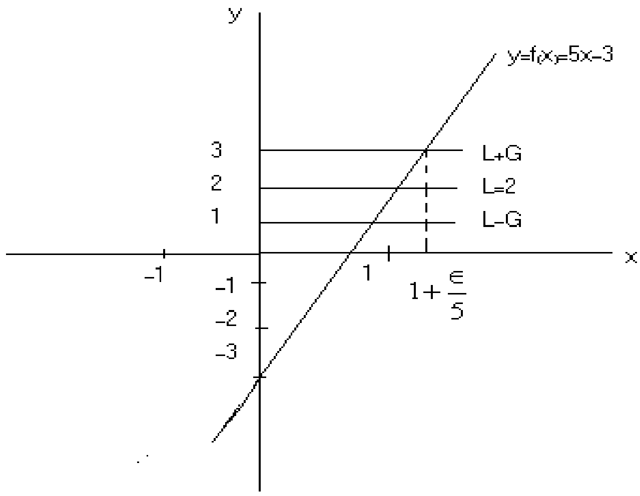
الفترة $(1-\frac{\in}{5}, 1+\frac{\in}{s})$ هي جوار لـ a=1 واذا حذفنا 1من الجوار نحصل على :

$$-\frac{\in}{5} \prec x-1 \prec \frac{\in}{5}$$

$$0 < |x-1| < \frac{\in}{5}$$

والشكل التالي يبين الجوار للنقطة 1 لذا فأن $\lim\limits_{x \to 1}(5x-3) = 2$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ



مثال: لتكن $f:R \longrightarrow R$ ومعرفة بالشكل $f(x)=x^2-3$ لكل $x \in R$ اثبت ان :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -2$$

البرهان: ليكن $\in > 0$ فأن

$$|f(x)-L| < \in \to |x^2-3-(-2)| < \in$$

$$\to |x-1|.|x+1| < \in$$

نريد ان نجد قيمة δ التي تحقق شرط الغاية $(0<\delta<1)$ اذن سيكون

$|x-a|=|x-1|<\delta$ - - -(1)

$|x-1| < 1$

$|x-1+2|<1+2$ $|x+1|<3$ - - -(2)

بضرب العلاقة (1) في العلاقة (2) نحصل $|x-1|.|x+1| < 3\delta$

Let $\delta=\frac{\in}{3}$

$$|x^2-1| < 3.\frac{\in}{3} \to |x^2-1| < \in$$

$$|x^2-3-(-2)| < \in$$

$$\therefore \lim_{x\to -1} x^2-3=-2$$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

5.3 مبرهنة (5-1) (وحدانية الغاية)

لتكن $f:D \longrightarrow R$ في العدد a موجودة فأنها ستكون وحيدة اي اذا كانت

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_2$

فأن $L_1=L_2$

البرهان : اذا كان $L_1\neq L_2$ فأن $|L_1-L_2|>0$ ولذلك نأخذ $0<\frac{1}{2}|L_1-L_2|=\in$

ومن تعريف الغاية لكل $\in>0$ ، يوجد $\delta_1,\delta_2>0$ بحيث ان

$0<|x-a|<\delta_1 \to |f(x)-L_1|<\in$ و $x\in D$ و

$0<|x-a|<\delta_2 \to |f(x)-L_2|<\in$ و $x\in D$

ولتكن $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$$|L1-L2|=|L1-f(x)+f(x)-L2|$$
$$\leq|f(x)-L1|+|f(x)-L2|$$
$$\leq \in+\in=2\in$$

اذن لكل $x\in D$ و $0<|x-a|<\delta$ يكون $|L_1-L_2|\leq 2\in=|L_1-L_2|$

$\longleftarrow |L_1-L_2|<|L_1-L_2|$ وهذا تناقض اذن $L_1=L_2$

5.4 مبرهنة (5-2)

لتكن $f: D \longrightarrow R$ بحيث ان لكل $x\in R$ ، $f(x)=mx+b$ و $m,b\in R$ و $m\neq 0$ وليكن $a\in R$ فأن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=ma+b$

البرهان : لكل $\in>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث انه اذا كان :

$|x-a|<\delta$ فأن $|f(x)-L|<\in$

$$|f(x)-L|=|mx+b-(ma+b)|=|mx+b-ma-b|=|m(x-a)|<|m|.|x-a|$$

لكن $|x-a|<\delta$ اذن $|f(x)-L|<|m|.\delta$

لنأخذ $\delta=\frac{\in}{|m|}$ اذن ستكون

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

$|f(x)-L|<|m|.\frac{\in}{|m|}=\in$

اي ان $|(mx+b)-(ma+b)|<\epsilon$

اذن $\lim\limits_{x\to a} mx+b=ma+b$

5.5 مبرهنة (5-3)

لتكن $f: D_1 \longrightarrow R$ و $g: D_2 \longrightarrow R$ بحيث ان $D_1\cap D_2\neq \varphi$ و

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ فأن :

a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_1+L_2$

b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_1-L_2$

c) $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_1.L_2$

d) $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{L_1}$, $L_1\neq 0$

e) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$; $L_2\neq 0$

f) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=L_1^n$; $n\in Z$, $L_1\neq 0$

برهان فرع (a)

بما ان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ فأنه لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta_1>0$ بحيث ان

$$x\in D_1 \;,\; 0<|x-a|<\delta_1 \longrightarrow |f(x)-L_1|<\frac{\in}{2} \qquad (1)$$

وبما ان $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ فأنه لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta_2>0$ بحيث ان

$$x\in D \;,\; 0<|x-a|<\delta_2 \longrightarrow |g(x)-L_2|<\frac{\in}{2}$$

وليكن $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$$|f(x)+g(x)-(L_1+L_2)|=|f(x)-L_1+g(x)-L_2|$$
$$\leq|f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|$$

من (1) و(2) نحصل على

$$|f(x)+g(x)-(L_1+L_2)| \leq \frac{\in}{2}+\frac{\in}{2}=\in$$

$$\therefore x\cup D_1\cap D_2 \quad ,0<|x-a|<\delta \rightarrow |f(x)+g(x)-(L_1+L_2)|\leq\in$$

اذن حسب التعريف سيكون

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L_1+L_2$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات انه $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L_1-L_2$

<u>برهان فرع (c)</u>

بما ان $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ لكل $\frac{\in}{2(1+|L_2|)}>0$ يوجد $\delta_1>0$ بحيث

$0<|x-a|<\delta_1$ عندما $x\in D_1$

فأنه $|f(x)-L_1|<\frac{\in}{2(1+|L_2|)}$

وبما ان $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ فأنه لكل $\frac{\in}{2(|L_1|)}>0$ يوجد $\delta_2>0$ بحيث

$0<|x-a|<\delta_2$ عندما $x\in D_2$

فأنه $|g(x)-L_2|<\frac{\in}{2(|L_1|)}$

يوجد $\delta_2>0$ عندما $0<|x-a|<\delta_3$ عندما $x\in D_3$

فأنه $|g(x)-L|<1$

$|g(x)|<1+|L_2|$

اذن لكل $\in>0$ يوجد $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$

اي ان $0<|x-a|<\delta$

$$|f(x)g(x)-L_1L_2|=|f(x)g(x)-L_1g(x)+L_1g(x)-L_1L_2|$$
$$=|g(x)(f(x)-L_1)+L_1(g(x-L_2)|$$
$$\leq|g(x)||f(x)-L_1|+|L_1||g(x)-L_2|$$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

$$\leq(1+|L_2|)\frac{\in}{2(1+|L2|)}+|L_1|\frac{\in}{2|L_1|}$$

$$\leq\frac{\in}{2}+\frac{\in}{2}=\in$$

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x).g(x)=L_1.L_2$$

<u>برهان فرع (d)</u>

لكل $\in>0$ يوجد $\delta_1>0$ بحيث ان

$$x\in D \quad , \quad |x-a|<\delta_1 \longrightarrow |f(x)-L|<\frac{L^2\in}{2}$$

وكذلك يوجد $\delta_2>0$ بحيث ان

$$x\in D \quad , \quad x-a|<\delta_2 \longrightarrow |f(x)-L|<\frac{|L|}{2}$$

ولكن $L=L-f(x)+f(x)$

$$|L|=|L-f(x)+f(x)|$$

$$\leq|L-f(x)|+|f(x)|$$

$$|L|\leq\frac{|L|}{2}+|f(x)|$$

اي ان $|L|-\frac{|L|}{2}<|f(x)|$

$$\frac{|L|}{2}<|f(x)|$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right|=\left|\frac{L-f(x)}{f(x).L}\right|=\frac{|f(x)-L|}{|f(x)|.|L|}$$

ليكن $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ عندئذ نحصل

$$x\in D \quad , \quad |x-a|<\delta \rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right|<\frac{\frac{L^2\in}{2}}{\frac{|L|}{2}.|L|}$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right|<\in$$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

اذن $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{L}$

<u>برهان فرع (e)</u>

بموجب برهان فرع (c) و(d) اعلاه فأن :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=[\lim_{x\to a}f(x)].[\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}]$$

$$=L_1\frac{1}{L_2}=\frac{L_1}{L_2}$$

<u>برهان فرع (f)</u>

ليكن $n\in Z^+$ وكما في فرع (c)

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\lim_{x\to a}[f(x)]^{n-1}.\lim_{x\to a}f(x)$$

$$=\lim[f(x)]^{n-2}.[\lim_{x\to a}f(x)]^2$$

وهكذا بتكرار فرع (c) لـn من المرات نحصل على :

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\lim_{x\to a}[f(x)]^n=L^n$$

الان اذا كان $n\in Z^-$ وليكن $(m=-n)(m\in Z^+)$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\lim_{x\to a}\frac{1}{[f(x)]^{-n}}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\lim_{x\to a}[\frac{1}{f(x)}]^{-n}=\lim_{x\to a}[\frac{1}{f(x)}]^m=[\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}]^m$$

$$\therefore\lim_{x\to a}[f(x)]^n=(\frac{1}{L})^m=L^{-m}=L^n$$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

5.6 مبرهنة (5-4)

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

البرهان :

$$\lim_{x\to a} x^n = \lim_{x\to a} \underbrace{x.x....x}_{\text{من المرات } n}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to a} x.\lim_{x\to a} x....\lim_{x\to a} x}_{\text{من المرات } n}$$

وبما ان $\lim_{x\to a} x = a$ اذن $\lim_{x\to a} x^n = \underbrace{a.a....a}_{\text{من المرات } n} = a^n$

5.7 مبرهنة (5-5)

غاية الدالة متعددة الحدود f(x) في النقطة a تساوي f(a)

البرهان : لتكن دالة متعددة الحدود f(x) معرفة بالشكل

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

فانه من المبرهنات اعلاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} a_n x^n + \lim_{x\to a} a_{n-1}x^{n-1} + ... + \lim_{x\to a} a_1 x + \lim_{x\to a} a_0$$

$$= a_n \lim_{x\to a} x^n + a_{n-1} \lim_{x\to a} x^{n-1} + ... + a_1 \lim_{x\to a} x + a_0$$

$$= a_n (a)^n + a_{n-1}(a)^{n-1} + ... + a_1(a) + a_0 = f(a)$$

مثال: لتكن $f:R \longrightarrow R$ بحيث لكل $x \in R$ ، $f(x)=3x-1$ اثبت ان $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$

البرهان : لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث ان $\delta>|x-2|$

$$3|x-2|<3\delta \longrightarrow |3x-6|<3\delta$$

$$|3x-1-5|<3\delta$$

لنأخذ $\delta=\frac{\epsilon}{3}$

$\therefore |3x-1-5|< \frac{\epsilon}{3}=\epsilon$

$\therefore\ |3x-1-5|<\epsilon$

$\therefore \lim_{x\to 2} 3x-1=5$

<u>مثال</u> : جد $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

عند التعويض المباشر عن x=1 في الدالة فان الغاية ستكون $\frac{0}{0}$ غير معرفة اذن نعمل على تحليل البسط والمقام فنحصل على :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 1}(x-4)}{\lim_{x\to 1}(x+1)}=\frac{1-4}{1+1}=\frac{-3}{2}$$

5.8 مبرهنة (5-6)

لتكن f ، g ، h دوالاً حقيقية وليكن $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$ وان $h(x)\le f(x)\le g(x)$ لجميع قيم x بحيث ان $0<|x-a|<\delta$ حيث δ عدد حقيقي موجب فأنه $\lim_{x\to a} f(x)=L$

<u>البرهان</u>: بما ان $\lim_{x\to a} g(x)=L$ فان لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta_1>0$ بحيث عندما تكون $0<|x-a|<\delta_1$ فأنه $|g(x)-L|<\epsilon$

$\epsilon< g(x)-L <-\epsilon$

$L+\epsilon<g(x)<L-\epsilon$

وكذلك بما ان $\lim_{x\to a} h(x)=L$ فأن لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta_2>0$ بحيث عندما تكون $0<|x-a|<\delta_2$ فأنه $|h(x)-L|<\epsilon$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

$$-\epsilon<h(x)-L<+\epsilon$$

$$L-\epsilon<h(x)<L+\epsilon$$

$$L-\epsilon\le h(x)\le f(x)\le g(x)\le L+\epsilon$$

اي ان $L-\epsilon\le f(x)\le L+\epsilon$

$$-\epsilon\le f(x)-L\le\epsilon$$

$$\therefore |f(x)-L|\le\in$$

لتكن $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

اذن لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث ان $0<|x-a|<\delta \longrightarrow |f(x)-L|\le\epsilon$

اذن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

<u>مثال</u> : اذا كانت $-x<x^2\sin\frac{1}{x}<x^2$ لجميع قيم $0<x<\pi$ جد

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}$$

<u>الحل</u> : وبتطبيق المبرهنة اعلاه نجد ان

$$\lim_{x\to 0}(-x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}x^2=0$$

اذن

$$\lim_{x\to 0}x^2\ln\frac{1}{x}=0$$

5.9 الغاية من جهة واحدة One Sided Limit

لقد اشرنا في تعريف الغاية ان غاية الدالة عند النقطة a موجودة من خلال تصرف الدالة على جانبي النقطة a التي قد لا تكون الدالة فيها معرفة ، اذن هنا ينبثق عنها نقاش الغاية من جهة واحدة اي غاية الدالة من يسار النقطة a ويرمز لها بالرمز $\lim\limits_{x\to^{-}a} f(x)$ وغاية الدالة من يمين النقطة a ويرمز لها بالرمز $\lim\limits_{x\to^{+}a} f(x)$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

5.10 الغاية اليمنى

لتكن $f:R\longrightarrow R$ دالة و $a\in R$ يُقال ان L غاية يمنى (right-hand limit) للدالة f(x) في العدد a اذا كان لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث ان $(a,a+\delta)\subseteq D$

$$a<x<a+\delta\longrightarrow |f(x)-L|<\epsilon$$

او بمعنى ان قيمة الدالة تقترب من L كلما اقتربت قيمة x من العدد a من الجهة اليمنى على خط الاعداد الحقيقية. ويُعبر عن ذلك بالرمز $\lim\limits_{x\to^{+}a} f(x)=L$.

مثال: لتكن $f(x)=\sqrt{x}$ حيث $x\geq 0$ اثبت ان $\lim\limits_{x\to^{+}0}\sqrt{x}=0$ ؟

البرهان: لتكن $\epsilon>0$ ولتأخذ $\delta>\epsilon^2$ فتكون $(0,\delta)$ مجموعة جزئية من منطلق الدالة $\sqrt{x}$

$$0<x<\delta\longrightarrow 0<x<\epsilon^2$$

$$\therefore \sqrt{x}<\epsilon \qquad (\epsilon>0)$$

$$\longrightarrow |\sqrt{x}-0|<\epsilon$$

اذن حسب التعريف اعلاه $\lim\limits_{x\to^{+}0}\sqrt{x}=0$

5.11 الغاية اليسرى

لتكن $f:R\longrightarrow R$ دالة و $a\in R$ يُقال ان L غاية يسرى (left-hand limit) للدالة f(x) في العدد a اذا كان لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث ان $(a-\delta,a)\subseteq D$

$$a-\delta<x<a\longrightarrow |f(x)-L|<\epsilon$$

ويرمز لها بالرمز. $\lim\limits_{x\to -a} f(x)=L$

5.12 دالة الصحيح الاعظم

اذا كان x عددا حقيقياً فأن [x] هو اكبر عدد صحيح لا يزيد على x فمثلاً:

[2]=2 ,[0]=0 ,[-1.2]=-2 ,[-3]=-3 ,[1.2]=1

اي ان دالة الصحيح الاعظم هي الدالة $f:X \longrightarrow R$ بحيث ان لكل $x \in X$ ، $f(x)=[x] \leq x$ لكل $x \in R$ لاحظ ان مدى الدالة هو مجموعة الاعداد الصحيحة .

مثال: لتكن $f:R \longrightarrow R$ بحيث لكل $x \in R$ ، $f(x)=[x]$ اثبت ان $\lim\limits_{x \to ^-2}[x]=1$ ؟

البرهان: ليكن $\epsilon > 0$ نأخذ δ عدداً حقيقياً موجباً بحيث $\delta<1$ من تعريف الدالة [x]

$$2-\delta<x<2 \longrightarrow [x]=1$$

$$|[x]-1|=0<\epsilon$$

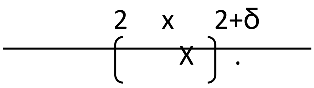
$$\therefore x \in R \quad , \quad 2-\delta < x < 2 \rightarrow |[x]-1| < \in$$

اذن $\lim\limits_{x \to ^-2}[x]=1$

مثال: لتكن $f:R \longrightarrow R$ بحيث لكل $x \in R$ ، $f(x)=[x]$ اثبت ان $\lim\limits_{x \to ^+2}[x]=2$ ؟

البرهان: لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta>0$ بحيث $|f(x)-L|<\epsilon$ عندما $0<|x-a|<\delta$

$$0<x-2<\delta \longrightarrow 2<x<2+\delta$$



من تعريف دالة الصحيح الاعظم لا يزيد على 2

$$[x]=2 \longrightarrow [x]-2=0 \longrightarrow |[x]-2|=0<\epsilon$$

$$|[x]-2|<\epsilon$$

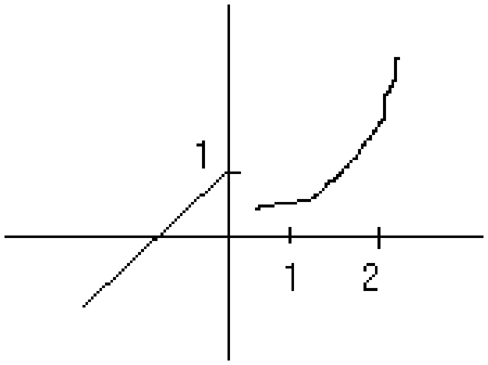
اذن $\lim\limits_{x \to ^+2} f(x) = 2$

مثال: لتكن $f:R \longrightarrow R$ دالة معرفة كالاتي :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x>0 \\ x+1 & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

جد : $\lim\limits_{x\to^{+}0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to^{-}0} f(x)$



الحل: $\lim\limits_{x\to^{+}0} f(x)=0$ ،

$\lim\limits_{x\to^{-}0} f(x)=1$

من الشكل المجاور لاحظ ان المنحني يقترب من جهة اليمين الى الصفر بينما من جهة اليسار يقترب الى الواحد

وبأستخدام التعاريف

ليكن $\epsilon>0$ نأخذ $\sqrt{\epsilon}=\delta>0$ بحيث عندما تكون $0<x-0<\delta$ فيكون

$|x^2-0|=|x^2|=x^2<\delta=\epsilon$ اي ان $\lim\limits_{x\to^{+}0} x^2=0$

لكل $\epsilon>0$ يوجد $\epsilon=\delta>0$ بحيث عندما تكون $0<0-x<\delta$ يكون $0<-x<\delta$

$|x|<\delta$ ،

$|x+1-1|=|x|<\delta=\epsilon$

اذن $\lim\limits_{x\to^{-}0} f(x)=1$

5.13 مبرهنة (5-7)

الغاية $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجودة وتساوي L اذا وفقط اذا كانت الغايتان

$\lim\limits_{x\to^{+}a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to^{-}a} f(x)$ موجودتين وكل منهما تساوي L.

البرهان: ليكن $f:D\longrightarrow R$ ولنفرض

$\lim\limits_{x\to^{+}a} f(x)=\lim\limits_{x\to^{-}a} f(x)=L$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

ولتكن $\epsilon>0$ ، يوجد $\delta_1>0$ ، $\delta_2>0$ بحيث ان

$(a-\delta_2,a) \subseteq D \quad ; \quad (a,a+\delta) \subseteq D$

$x\in D \ , \ a<x<a+\delta_1 \longrightarrow |f(x)-L| < \epsilon$

$x\in D \ , \ a-\delta_2<x<a \longrightarrow |f(x)-L| < \epsilon$

لتكن $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

بما ان $x\neq a \ ; \ a-\delta<x<a+\delta \quad |f(x)-L|<\epsilon$

اذن $\lim_{x\to a} f(x) = L$

الان نفرض ان الغاية موجودة وتساوي L عندما $x \longrightarrow a$ ونبرهن وجود الغايتين اليمنى واليسرى وكلاً منهما تساوي L.

بما ان الغاية موجودة في a ، اذن يوجد $\delta'>0$ بحيث ان

$(a,a+\delta') \subseteq D$ و $(a-\delta',a) \subseteq D$

لكل $\epsilon>0$ ، يوجد $\delta''>0$ بحيث ان

$x\in D \ , \ 0<|x-a|<\delta'' \longrightarrow |f(x)-L| < \epsilon$

لتكن $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ اذن

$x\in D \ , \ 0<|x-a|<\delta \longrightarrow |f(x)-L| < \epsilon$

وبما ان $0<|x-a|<\delta \longrightarrow (x\neq a,-\delta<x-a<\delta)$

$\longrightarrow (x\neq a,a-\delta<x<\delta+a)$

$(a-\delta<x<a)$ و$(a<x<a+\delta)$

اي انه لكل $\epsilon>0$ ، يوجد $\delta>0$ بحيث $(a,a+\delta) \subseteq D$

و $a<x<a+\delta \longrightarrow |f(x)-L| < \epsilon$

اي $\lim_{x\to^+ a} f(x) = L$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

وبنفس الطريقة يكون $(a-\delta,a) \subseteq D$

و $|f(x)-L| < \epsilon \longrightarrow a-\delta<x<a$

اي ان $\lim\limits_{x\to^{-}a} f(x)=L$

من المثال السابق لاحظ ان الغاية غير موجودة لان $\lim\limits_{x\to^{-}0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to^{+}0} f(x)$

<u>مثال:</u> لتكن $f:R \longrightarrow R$ دالة معرفة كالاتي :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x\le 2 \\ 8-2x & ; \quad x>2 \end{cases}$$

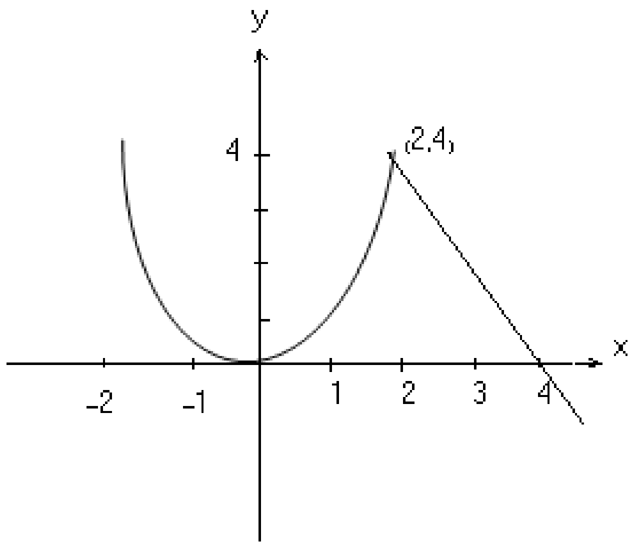
هل ان $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة ؟ ارسم مخطط الدالة

$$\lim_{x\to^{-}2} f(x)=\lim_{x\to^{-}2}(x^2)=(2)^2=4$$

$$\lim_{x\to^{+}2} f(x)=\lim_{x\to^{+}2}(8-2x)=8-4=4$$

$$\lim_{x\to^{-}2} f(x)=\lim_{x\to^{+}2} f(x)=4$$

اذن الغاية لهذه الدالة موجودة عندما $x\to 2$ وان $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$



مثال : لتكن f(x)=|x-4| احسب $\lim_{x\to 4} f(x)$ اذا كانت موجودة ؟

الحل :

$$f(x)=|x-4|=\begin{cases} x-4 & ; \quad x>4 \\ -(x-4) & ; \quad x\le 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to^{+}4} f(x)=\lim_{x\to^{+}4}(x-4)=4-4=0$$

$$\lim_{x\to^{-}4} f(x)=\lim_{x\to^{-}4}[-(x-4)]=\lim_{x\to^{-}4}(4-x)=4-4=0$$

$$\lim_{x\to^{-}4} f(x)=\lim_{x\to^{+}4} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 4} f(x)=0$$

5.14 الاقتراب الى المالانهاية

لتكن f دالة معرفة على (a,∞) يقال ان للدالة f غاية L عندما تقترب x من ∞ اذا وفقط اذا كان لكل عدد حقيقي Є>0 هناك عدد حقيقي r بحيث ان |f(x)-L|<Є عندما تكون x>r وبذلك تمثل غاية f عندما تقترب x من ∞ بالرمز $\lim_{x\to^{+}\infty} f(x)$.

تعريف : لتكن f دالة حقيقية معرفة على (-∞,a) يقال ان للدالة f غاية L عندما تقترب x من -∞ فقط اذا كان لكل عدد حقيقي Є>0 هناك عدد حقيقي r بحيث ان |f(x)-L|<Є عندما تكون x<r وبذلك تمثل غاية f عندما تقترب x من -∞ بالرمز $\lim_{x\to^{-}\infty} f(x)$.

مثال: لتكن $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، x≠0 فأن $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

البرهان : ليكن Є>0 نأخذ $r=\dfrac{1}{\in}$ عندئذ يكون

$$x>r \longrightarrow |f(x)-0|=\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}$$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

$\longrightarrow |f(x)-0|= \frac{1}{r} = \in \quad (x>r \ \frac{1}{x} < \frac{1}{r})$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ اذن حسب التعريف في اعلاه

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ وبنفس الطريقة نبرهن

<u>مثال</u> : لتكن $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ معرفة على $(-\infty,\infty)$ فأن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

<u>الحل</u> : لكل $\in>0$ يوجد $r=\sqrt{\frac{1-\in}{\in}}$ بحيث عندما تكون $x>r$

$$x^2 > \frac{1-\in}{\in} \longleftarrow x > \sqrt{\frac{1-\in}{\in}}$$

$$x^2+1 > \frac{1-\in}{\in}+1 \longrightarrow x^2+1 > \frac{1-\in+\in}{\in} = \frac{1}{\in}$$

$$x^2+1 > \frac{1}{\in} \longrightarrow \frac{1}{x^2+1} < \in$$

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{x^2+1} < \in \longrightarrow \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+1} < \in$$

$$|1-\frac{x^2}{x^2+1}| < \in$$

$$|\frac{x^2}{x^2+1}-1| < \in$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

<u>5.15 مبرهنة (5-8)</u>

اذا كانت n≥1 فان $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

<u>البرهان</u> : ليكن Є>0 عدداً حقيقياً وان $|\frac{1}{x^n} - 0| = |\frac{1}{x^n}|$ ، لنأخذ $r = \frac{1}{\in}$ وبما ان Є عدد حقيقي موجب فأن r عدد حقيقي موجب وان x>r يجعل

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{r} \longrightarrow r = \frac{1}{\in} \longrightarrow \frac{1}{r} = \in \longrightarrow |\frac{1}{x^n}| < \in$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

<u>مثال :</u> لتكن $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$, $x \neq \frac{4}{3}$ برهن ان $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{3}$

<u>البرهان</u>: ليكن Є>0 ولنأخذ $r = \frac{11}{9\in} + \frac{4}{3}$ عندما تكون x>r

$$|\frac{2x+1}{3x-4} - \frac{2}{3}| = |\frac{3(2x+1)-2(3x-4)}{3(3x-4)}| = |\frac{6x+3-6x+8}{3(3x-4)}| = |\frac{11}{3(3x-4)}| = \frac{11}{3}|\frac{1}{3x-4}|$$

$$x > r \to 3x-4 > 3r-4 \to \frac{1}{3x-4} < \frac{1}{3r-4}$$

$$|\frac{2x+1}{3x-4} - \frac{2}{3}| < \frac{11}{3}|\frac{1}{3(\frac{11}{9\in}+\frac{4}{3})-4}| = \frac{11}{3}|\frac{1}{\frac{11}{3\in}+4-4}| = \frac{11}{3}|\frac{1}{\frac{11}{3\in}}| < \frac{11}{3}.\frac{3\in}{11} = \in$$

$$\therefore |f(x) - \frac{2}{3}| < \in$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x-4} = \frac{2}{3}$$

<u>5.16 مبرهنة (5-9)</u>

لتكن f و g دوال حقيقية و $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = L_2$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L_1$ موجودتين فأن :

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) \mp g(x)] = L_1 \mp L_2$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x).g(x)] = L_1.L_2$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$

<u>مثال</u> : احسب $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^3(3+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2})} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

<u>5.17 مبرهنة (5-10)</u>

لتكن $f:D \longrightarrow R$ دالة نسبية بحيث ان D تحتوي على فترة مفتوحة (a,∞)

وان $f(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$ حيث ان $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$

وان n ، m عددان صحيحان موجبان فأن

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & ; \quad n=m\\ \mp\infty & ; \quad n>m\end{cases}$$

البرهان : عندما x≠0 ، يمكن كتابة الدالة كالاتي:

$$f(x)=\frac{x^n}{x^m}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n})=a_0$$

$$\lim_{x\to\infty}(b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_m}{x^m})=b_0$$

.1

(1) اذا كان n=m فأن

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}\cdot\frac{a_0}{b_0}=(1)\frac{a_0}{b_0}=\frac{a_0}{b_0}$$

(1) اذا كان n<m فأن

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{a_0}{b_0}\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}=\frac{a_0}{b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{m-n}}=\frac{a_0}{b_0}(0)=0$$

(2) اذا كان n>m فأن

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{a_0}{b_0}\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}=\frac{a_0}{b_0}=\lim_{x\to\infty} x^{n-m}$$

$$=\begin{cases}\infty & if \quad \frac{a_0}{b_0}>0\\ -\infty & if \quad \frac{a_0}{b_0}<0\end{cases}$$

مثال : باستعمال المبرهنة اعلاه احسب :

$$(1) \quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+2}{7x^5+6x^3-3x+1}=0 \quad ;n<m$$

$$(2) \quad \lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3x-2}{3x^2-4}=\frac{7}{3} \quad ;n=m$$

$$(3) \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-6x-2}{x^2-1}=\infty$$

مثال : احسب الغاية $\lim_{x\to\infty}[\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x}]$

الحل :

$$=\lim_{x\to\infty}[\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x}].\frac{\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1-4x}{\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x}}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x}=0$$

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

ملاحظة :

$(1)(\infty-\infty),(\frac{\infty}{\infty}),(0,\infty)$ كميات غير معروفة

$(2)\quad a+\infty=+\infty\ ,\ a-\infty=-\infty\ ,\ a.(\infty)=\infty\ (a>0)$

$a.(+\infty)=-\infty \quad \text{if} \quad (a<0)$

$(3)\quad (+\infty)+(+\infty)=+\infty\ ,\quad (+\infty).(+\infty)=\infty$

5.18 الاستمرارية The Continuity

ان مفهوم الاستمرارية من المفاهيم الاساسية المرتبطة بمفهوم الغاية وهي صفة للدالة تنعكس على سلوك بيانها من نقطة معينة او في فترة معينة.

وسوف تطرح مفهوم الاستمرارية اخذين بنظر الاعتبار ان المجال والمجال المقابل للدوال المستعملة هو مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية (R).

5.19 الدالة المستمرة

يُقال للدالة f(x) مستمرة عند العدد a الواقع في منطلقها اذا وفقط اذا تحققت الشروط التالية :

1) F(x=a) موجودة

2) $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(x=a)$

ويُقال للدالة f(x) بأنها غير مستمرة اذا وفقط اذا لم يتحقق احد الشروط اعلاه.

مثال : لتكن $f(x)=x^2+1$ ، a=3 ناقش استمرارية الدالة f(x)

الحل :

1) $f(x=3)=(3)^2+1=10$

2) $\lim_{x\to 3} f(x)=(3)^2+1=10$

3) $\lim_{x\to 3} f(x)=f(x=3)=10$

اذن الدالة مستمرة عند x=3 لتحقق الشروط الثلاثة.

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

مثال :اذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x\le 1 \\ 2 & ; \quad x>1 \end{cases}$ ، هل ان f(x) مستمرة في العدد 1 ؟

الحل : لنناقش شروط الاستمرارية :

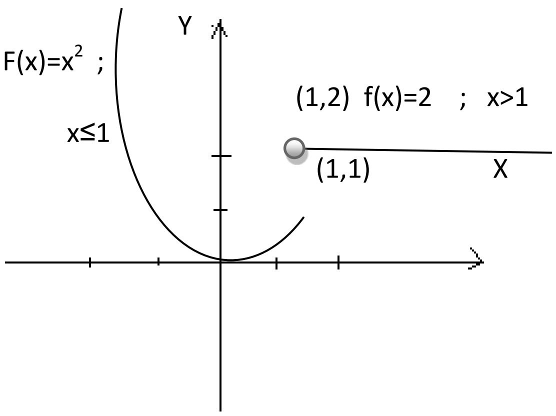
1) $f(x=1)=(1)^2=1$

2) $\lim\limits_{x\to^+1} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to^- 1} f(x)=(1)^2=1$

بما ان $\lim\limits_{x\to^- 1} f(x) \neq \lim\limits_{x\to^+1} f(x)$ اذن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

اذن الدالة غير مستمرة عند a=1 لعدم تحقق الشرط الثاني .



مخطط الدالة في أعلاه يبين ان النقطة (1,1) تقع على بيان الدالة fلكن النقطة (1,2) لا تقع عل بيان الدالة.

5.20 الدالة المستمرة دائماً :

يُقال للدالة f(x) انها مستمرة في الفترة I اذا كانت مستمرة في كل نقطة في I .
ويُقال ان f(x) مستمرة (دائماً) اذا كانت مستمرة في كل عدد حقيقي.

5.21 مبرهنة (5-11)

لتكن f و g دالتين مستمرتين عند العدد a فأن f+g، f-g ، f.g ، $\frac{f}{g}$ عندما g(a)≠0 ، مستمرة عند a.

البرهان : سنبرهن ان f.g دالة مستمرة في العدد a
بما ان f و g دالتين مستمرتين في a فأن

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad , \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

الان بما ان

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = f(a).g(a)$$

اذن من تعريف الاستمرارية تكون الدالة f.g مستمرة في العدد a.

ملاحظة : تعرف الدالة النسبية (rational function) هي دالة كسرية بسطها ومقامها متعددة حدود.

ومن المبرهنة أعلاه نستنتج ان الدالة النسبية تكون مستمرة عند كل الاعداد الحقيقية عدا تلك القيم التي تجعل المقام مساوٍ للصفر.

مثال: لتكن $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-9}$ ؟

الدالة اعلاه دالة نسبية وتكون غير مستمرة عند $x = \mp 3$ (لانها تجعل المقام =صفر)

5.22 مبرهنة (5-12)

لتكن h:D⟶R دالة نسبية بحيث ان $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ لكل xЄR وان $D \subseteq R$

فأن h(x) مستمرة في D .

البرهان : لنفرض aЄD و g(a)≠0 اذن $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ وبما ان كل من f و g متعددة حدود فأن كلاً منها مستمرة في a

اذن $\lim_{x\to a} g(x) = g(a) \quad , \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

اي ان $\lim_{x\to a} h(x) = \frac{f(a)}{g(a)} = h(a)$

اذن حسب تعريف الاستمرارية h(x) مستمرة في a وبالتالي ستكون مستمرة في D حسب تعريف الدالة المستمرة دائماً .

5.23 الاستمرارية في فترة

لتكن $f:D \longrightarrow R$ يقال ان الدالة f

a) مستمرة في [a,b) اذا وفقط اذا كانت $[a,b) \subseteq D$ ، والدالة f مستمرة في (a,b) ومستمرة من اليمين في العدد a .

b) مستمرة في (a,b] اذا وفقط اذا كانت $(a,b) \subseteq D$ ، والدالة f مستمرة في (a,b) ومستمرة من اليسار في العدد b .

c) مستمرة في [a,b] اذا وفقط اذا كانت $[a,b] \subseteq D$ ، الدالة f مستمرة في (a,b) وfمستمرة من اليمين في العدد a ومستمرة من اليسار في العدد b.

<u>مثال</u>: بين ان الدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ مستمرة في الفترة [1,1-].

<u>الحل</u> : 1) عند x=-1

$$f(x=-1) = \sqrt{1-1} = 0$$

$$\lim_{x\to^{+}-1} f(x) = \sqrt{1-1} = 0$$

$$\because f(x=-1) = \lim_{x\to^{+}-1} f(x) = 0$$

اذن الدالة f مستمرة من اليمين عند العدد a=-1

2)عند x=1

$$f(x=-1)=\sqrt{1-1}=0$$
$$\lim_{x\to^{-}1} f(x)=\sqrt{1-1}=0$$
$$\because\ f(x-1)=\lim_{x\to^{-}1} f(x)=0$$

اذن الدالة f مستمرة من اليسار عند العدد a=1
لاحظ ان الدالة مستمرة من اليمين عند a=1 ومستمرة من اليسار عند العدد a=-1.
اذن حسب التعريف أعلاه تكون الدالة مستمرة في الفترة [-1,1].

<u>5.24 مبرهنة (5-13)</u>

اذا كانت $f:R \longrightarrow R$ دالة متعددة الحدود المعرفة بالشكل

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$ فأن f مستمرة في a.

<u>البرهان</u> : يترك للطالب

<u>5.25 الدالة المستمرة في العدد:</u>

يُقال ان الدالة f مستمرة في العدد a (aЄD) من جهة اليمين اذا وفقط اذا كانت $f(x=a)=\lim_{x\to^{+}a} f(x)$ وكذلك تكون مستمرة في a من جهة اليسار اذا وفقط اذا كان $f(x=a)=\lim_{x\to^{-}a} f(x)$.

<u>مثال</u>: لتكن f دالة معرفة كالاتي :

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & ; \quad x\le 2 \\ x+1 & ; \quad 2<x<3 \\ 4 & ; \quad x\ge 3 \end{cases}$$

بين فيما اذا كانت مستمرة وما نوع استمراريتها ؟

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

$$1)\quad f(x=2)=2-2=0$$

$$2)\quad \lim_{x\to^{+}2} f(x)=\lim_{x\to^{+}2}(x+1)=2+1=3$$

$$\lim_{x\to^{-}2} f(x)=\lim_{x\to^{-}2}(x-2)=2-2=0$$

بما ان $f(x=2)=\lim_{x\to^{-}2} f(x)=0$

اذن الدالة مستمرة في العدد 2 من جهة اليسار فقط وغير مستمرة في جهة اليمين
اما بالنسبة الى العدد a=3 فأن

$$1)\quad f(x=3)=4$$

$$2)\quad \lim_{x\to^{+}3} f(x)=\lim_{x\to^{+}2} 4=4$$

$$\lim_{x\to^{-}3} f(x)=3+1=4$$

الان بما ان $f(x=3)=\lim_{x\to^{-}3} f(x)=\lim_{x\to^{+}3} f(x)=4$

اذن الدالة مستمرة في جهة اليمين ومستمرة في جهة اليسار في النقطة x=3 وبذلك تكون الدالة مستمرة في النقطة x=3

<u>5.26 مبرهنة (5-14)</u>

الدالة الثابتة تكون مستمرة في كل نقطة من نقاط مجالها .

<u>البرهان</u> : لتكن $f:A\longrightarrow B$ دالة ثابتة $\forall x\in A$; $f(x)=a$ وان $a\in B$

لكل $\epsilon>0$ يوجد δ بحيث ان $|x-a|<\delta$ فأن $|f(x)-L|<\epsilon$

بما ان الدالة ثابتة فأن $\lim_{x\to a} f(x)=a$ و $f(x)=a$ لكل $x\in A$

اذن $|f(x)-L|=|a-a|=0<\epsilon$

اذن الدالة مستمرة عند a وبالتالي ستكون مستمرة عند A.

<u>5.27 مبرهنة (5-15)</u>

اذا كانت $f:D_1\longrightarrow D_2$ و $g:D_2\longrightarrow R$ وان f مستمرة في a و g مستمرة في f(a) فأن g.f مستمرة في a.

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

البرهان : بما ان g مستمرة في f(a) فأن لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta_1>0$ بحيث عندما يكون $|g-f(a)|<\delta_1$ يكون $|g(g)-g(f(a))|<\epsilon$

وبما ان f مستمرة في a فأنه لكل $\delta_1>0$ يوجد $\delta_2>0$ بحيث عندما يكون $|x-a|<\delta_2$ يكون $|f(x)-f(a)|<\delta_1$

اذن لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta_2>0$ بحيث عندما يكون $|x-a|<\delta$ فأن $|g(f(x))-g(f(a))|<\epsilon$

مثال: اثبت ان الدالة $G(x)=\left|\frac{x^3+3}{x-2}\right|$ مستمرة عند x=1 ؟

الحل : لنفرض $f(u)=|u|$ و $g(x)=x^3+3$ و $h(x)=x-2$ اذن ستكون $G(x)=f(\frac{g}{h}(x))$ بما ان $h(x)\neq 0$ وهي مستمرة في x=1 وكذلك g(x) مستمرة في x=1 فان $\frac{g}{h}(x)$ مستمرة في f(1)

الان بما ان f مستمرة في كل نقطة من نقاط مجالها فأن $f(\frac{g}{h})$ مستمرة في x=1 وبذلك تكون G مستمرة في x=1.

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

أسئلة الفصل الخامس

س1: اذا كانت $f(x)=\dfrac{x-7}{x^2-49}$ ابحث استمرارية الدالة عند x=7، x=-7 ؟

س2: اذا كانت $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ ابحث استمرارية الدالة عند x=3 وx=1 ؟

س3: اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x>2\\ 5-x & x<2\\ 3 & x=2\end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عند x=2 ؟

س4:اذا كانت

$f(x)=\begin{cases}x^2+2 & x>-2\\ 3-2x & x<-2\\ 6 & x=-2\end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عند كل من x=-2 ، x=0 ؟

س5: اذا كانت $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-2}{x-1} & x\neq 1\\ 5 & x=1\end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عند كل من x=1، x=2 ؟

س6: اذا كانت f:R ⟶ R حيث $f(x)=\begin{cases}x^3-3 & x\geq 2\\ x+3 & x<2\end{cases}$ تحقق من استمرارية الدالة على R ؟

س7: اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3-5x & x\neq 1\\ x-9 & x>2\end{cases}$ ابحث الاستمرارية عند x=2 ؟

س8: لتكن f(x)=|x-3| ابحث الاستمرارية عند x=3 ؟

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

س9: لتكن $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3 & x\geq 1 \\ 3-x & x<1 \end{cases}$ ابحث استمرارية على R ؟

س10: اذا كانت الدالة f مستمرة عند x=-2 فأوجد قيمة aЄR ا ذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} ax+3 & x\leq -2 \\ x^2+x & x>-2 \end{cases}$$

س11: اذا كانت الدالة مستمرة عند x=-1 فأوجد قيم a,bЄR حيث

$f(x)=\begin{cases} 3x-b & x\geq -1 \\ x^2+2a & x<-1 \end{cases}$ علماً ان f(2)=0 ؟

س12: F:R⟶R بحيث $f(x)=\begin{cases} 6-x^2 & x\geq 1 \\ 4x+1 & x<1 \end{cases}$ ، ابحث استمرارية الدالة عند x=1 ، x=-1 ؟

س13: F:R ⟶ R بحيث $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عندx=2 ؟

س14: F:R⟶R بحيث $f(x)=\begin{cases} 6-x^2 & x\geq 1 \\ 4x+1 & x<1 \end{cases}$ ، ابحث استمرارية الدالة عند x=1 ،x=-1 ؟

س15: لتكن $f(x)=\begin{cases} 5-x^2 & x<\sqrt{2} \\ x^2+1 & x>\sqrt{2} \\ 4 & x=\sqrt{2} \end{cases}$ فأبحث الاستمرارية عند x=-1 ، x= $\sqrt{2}$ ؟

س16: لتكن $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ ، ابحث الاستمرارية عند x=3 ، x=-3 ،x=1 ؟

δ δ δ δ δ δ δ δ&& δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δ δδ δ δ

س17: اذا كانت الدالة مستمرة عند x=1 ، f(-1)=5 فأوجد قيمة a,bЄR حيث

$$f(x)=\begin{cases} 2a+x^2 & x\ge 1 \\ 2x+b & x<1 \end{cases}$$

س18: اذا كانت fمستمرة عند x=2 حيث $f(x)=\begin{cases} ax^2+2 & x\ge 2 \\ 5x+20 & x<2 \end{cases}$ فما قيمة a؟

س19: لتكن $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+a & x\ge 1 \\ \frac{1}{x}+b & x<1 \end{cases}$ حيث f(-1)=2 ، $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة فما قيمة a,bЄR علماً ان x≠0 ؟

س20: ناقش استمرارية الدوال التالية عند x=1 ؟

$$1)\ f(x)=\sqrt{2-x}$$

$$2)\ g(x)=\begin{cases} 0 \quad ; & x<1 \\ 0.01 \quad ; & x\ge 1 \end{cases}$$

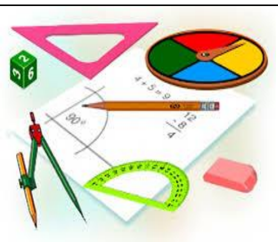
$$3)\ f(x)=\begin{cases} x^2-1 \quad ; & x>1 \\ 1-x \quad ; & x\le 1 \end{cases}$$

س21: اذكر القيم التي تكون فيها الدوال النسبية التالية غير مستمرة ؟

$$1)\ f(x)=\frac{x}{x+5} \qquad 2)\ f(x)=\frac{1}{x^3-27} \qquad 3)\ f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x^2+2x}$$

س22: جد الغاية لما يلي ؟

1) $\lim\limits_{x\to+1}(3x^4-7x^3+6x+1)$	2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+1}{x^2+3x+4}$
3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+6x-5}{x^3+2x+7}$	4) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}}$
5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^6+729}{x+3}$	6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x^2}{3-\sqrt{x^2+9}}$
7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^2}{1-x}\quad ; x\neq1$	8) $\lim\limits_{x\to0}[2x]$
9) $\lim\limits_{x\to3}\lvert 2x-6\rvert$	10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\log\dfrac{1}{x}$	12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x$
13) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x}{x^2+1}$	14) $\lim\limits_{x\to\infty}(x)^{2x}$
15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$	16) $\lim\limits_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x-1}}$
17) $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{n-x}$	



ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

الفصل السادس
المشتقة DERIVATIVE

6.1 مقدمة

ان حساب التفاضل هو فرع من فروع الرياضيات يختص بدراسة معدل تغير دالة ما ولتكن ((y=f(x) بالنسبة للمتغير x ، وان اول المسائل التي يُعنى هذا الفرع بدراستها هي المشتقة .

مشتقة الدالة y=f(x) عند نقطة ما تصف السلوك الرياضي والهندسي للدالة عند هذه النقطة او عند النقاط القريبة جداً منها .

وان عملية ايجاد المشتقة تُسمى التفاضل ، وللتفاضل تطبيقات متعددة في الفيزياء والكيمياء وبحوث العمليات.

وتستخدم المشتقات في ايجاد القيم العظمى والصغرى للدالة . المعادلات التي تتضمن تفاضلات (مشتقات) تسمى المعادلات التفاضلية، وهي من المعادلات الأساسية والهامة في توصيف الظواهر الطبيعية. تظهر المشتقات في العديد من مجالات الرياضيات كالتحليل العقدي، والتحليل الدالي، والهندسة التفاضلية، ونظرية القياس، والجبر المجرد.

6.2 المشتقة The Derivative

لنفرض ان y=f(x) حيث ان f معرفة في الفترة (a,b) وافرض ان $x_1 \in (a,b)$

وليكن $\Delta y=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$ فأن $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

ثم يأخذ الغاية كلما اقتربت Δx من الصفر ، فأذا كان لهذه الغاية قيمة حقيقية فأنها تسمى مشتقة y بالنسبة الى x عندما $x=x_1$ اذن

$$y'=f'(x)=\lim_{Dx\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

لهذه المشتقة رموز عديدة منها :

$$D_x y \quad , \quad \frac{dy}{dx} \quad , \quad f'(x) \quad , \quad y' \quad , D_x f(x)$$

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

يُقرأ الرمز f '(x) مشتقة f بالنسبة الى x ، ويُقال للدالة f(x) انها قابلة للاشتقاق (differentiable) في العدد a اذا كانت f(a) موجودة او الا فهي غير قابلة للاشتقاق.

مثال: جد مشتقة y بالنسبة الى x للدالة $y=x^2-5x$ ثم احسب f '(0) ، f '(2) ؟

الحل :

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-5(x+\Delta x)$$
$$=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-5x-5\Delta x$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-5(x+\Delta x)$$
$$=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-5x-5\Delta x$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2-5\Delta x}{\Delta x}=2x+\Delta x-5$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x-5)=2x-5$$

ولايجاد f ' (0) نعوض عن x=0 في f '(x)

$$f'(x=0)=\boxed{-5}$$

وكذلك عندما x=2

$$f'(x=2)=2(2)-5=\boxed{-1}$$

مثال: احسب مشتقة f(x) المُعرفة بالشكل $f(x)=\frac{1}{x-2}$ عند x=1 وx=3؟

الحل:

$$f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x-2}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x-2}-\frac{1}{x-2}=\frac{x-2-x-\Delta x+2}{(x+\Delta x-2)(x-2)}=\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{-1}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{Dx\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x-2)(x-2)}=\frac{-1}{(x-2)^2}$$

ولايجاد $f'(x=1)$ نعوض عن $x=1$ في المشتقة اعلاه

$$f'(x=1)=\frac{-1}{(1-2)^2}=\boxed{-1}$$

وكذلك $f'(x)=3$

$$f'(x=3)=\frac{-1}{(3-2)^2}=\boxed{-1}$$

6.3 قواعد الاشتقاق

يُقال للدالة $f(x)$ انها قابلة للاشتقاق عند a اذا كانت $f'(a)$ موجودة . كما يُقال للدالة انها قابلة للاشتقاق على مجموعة اذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من تلك المجموعة.

6.4 مبرهنة (6-1)

لنفرض ان u ، v ، w دوال قابلة للاشتقاق عند x و c و n عددان ثابتان فأن:

(1) $\frac{d}{dx}(c)=0$ (مشتقة الثابت تساوي صفر)

(2) $$\frac{d}{dx}(x)=1$$

(3) $$\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}$$

(4) $$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

(5) $$\frac{d}{dx}(u-w)=\frac{du}{dx}-\frac{dw}{dx}$$

(6) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}\quad ;\quad v\neq 0$$

(7) $$\frac{d}{dx}(x^m)=mx^{m-1}$$

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

مثال: اذا كانت $y=x^3+2x-5$ احسب $y'(x)$ ؟

الحل : باستخدام القاعدة (1) و(3) $y'(x)=3x^2+2$

مثال: لتكن $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ اوجد $f'(x)$ ؟

الحل : $f'(x)=\dfrac{(x+2)(0)-3(1)}{(x+2)^2}=\dfrac{-3}{(x+2)^2}$

6.5 الدالة المركبة

تُعرف الدالة المركبة fog للدالتين g وf كما يلي :

$$(fog)_{(x)}=f(g(x))$$

تُطبق الدالة g اولاً ثم الدالة f حيث تُسمى f الدالة الخارجية و g الدالة الداخلية ويسمى fog تركيب g و f .

مثال: اذا كانت $f(x)=x^2+3$ و $g(x)=x^2$ فأن

$$(fog)_{(x)}=f(g(x))=f(x^2)=(x^2)^2+3=x^4+3$$

$$(gof)_{(x)}=g(f(x))=g(x^2+3)=(x^2+3)^2=x^4+3x^2+9$$

لاحظ ان $gof \neq fog$

عندما تكون f و g دالتين قابلتين للاشتقاق ، فيكون تركيبها fog ايضاً دالة قابلة للاشتقاق.

ولايجاد مشتقة fog توجد طريقتان في الطريقة الاولى نحسب $f(g(x))$ ونشتق.

مثال: اذا كانت $f(x)=x^2$ و $g(x)=x+1$ فأن

$$y=(fog)(x)=f(g(x))=f(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$$

$$\frac{dy}{dx}=2x+2$$

وفي الطريقة الثانية ، نحسب مشتقة الدالة المركبة استناداً الى قاعدة السلسلة.

6.6 قاعدة السلسلة The Chain-Rule

اذا كانت f وg دالتين قابلتين للاشتقاق عند x فأن (fog) قابلة للاشتقاق في x

وان $\frac{d}{dx}(fog)_{(x)} = f'(g(x)).g'(x)$

مثال : لتكن $f(x)=x^2+3$ و $g(x)=2x+1$ فأن

$$(fog)_{(x)}=f(g(x))=4x^2+4x+3$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)).g'(x)$$

$$=2g(x).2=4g(x)=4(2x+1)=8x+4$$

6.7 مشتقة الدالة الضمنية Implicit Differentiation

اذا كانت $f(x,y)=0$ معادلة بمتغيرين x و y اذا أمكن ايجاد احد هذين المتغيرين بدلالة الاخر مثل y بدلالة x ، فأن y دالة صريحة (explicit function) للمتغير x، وقد يكون من الصعوبة ايجاد y بدلالة x، او لا يمكننا حل المعادلة $f(x,y)=0$ لاجل y بدلالة x .

او قد يوجد في هذه الحالة اكثر من دالة واحدة $y=f(x)$ تحقق المعادلة (1) فأن الدالة تُسمى دالة ضمنية (Implicit Function).

مثال : جد $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة $x^3+2xy+y^3=5$

الحل : نشتق المعادلة ضمنياً لحدود المعادلة

$$3x^2+2x\frac{dy}{dx}+2y+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$(2x+3y^2)\frac{dy}{dx}=-3x^2-2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2-2y}{2x+3y^2}$$

6.8 المشتقات من الرتب العليا Higher-order Derivatives

اذا كانت y=f(x) دالة قابلة للاشتقاق ، فأن مشتقتها 'y تُسمى المشتقة الاولى للدالة f ، واذا كانت 'y قابلة للاشتقاق ، فأن مشتقتها تُسمى المشتقة الثانية لـf. وهكذا.

بعض رموز المشتقة الثانية : $D_x^2 y \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad , \quad f''(x) \quad , \quad y''$

رموز المشتقة الثالثة : $D_x^3 y \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3} \quad , \quad f'''(x) \quad , \quad y'''$

مثال : جد المشتقات للدالة

$f(x)=x^3+3x^2-8x+2$

$f'(x)=3x^2+6x-8$

$f''(x)=6x+6$

$f'''(x)=6$

$f''''(x)=0$

مثال : اذا كانت $f(x)=\frac{2}{1-x}$ حدد صيغة لـ $f^n(x)$

الحل:

$$f(x)=\frac{2}{1-x}=2(1-x)^{-1}$$

$$f'(x)=2(-1)(1-x)^{-1}(-1)=2(1-x)^{-2}=2(1!)(1-x)^{-2}$$

$$f''(x)=2(1!)(-2)(1-x)^{-3}(-1)=2(2!)(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x)=2(2!)(-3)(1-x)^{-4}(-1)=2(3!)(1-x)^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f^n(x)=2(n!)(1-x)^{-(n+1)}$$

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

مثال : اذا كانت $y=\sqrt{2-x}$ لكل x<2 جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما x=-2 ؟

الحل :

$$y=\sqrt{2-x}=(2-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)=-\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y''=-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(2-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)=-\frac{1}{4}(2-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y''|_{x=-2}=-\frac{1}{4}(2-(-2))^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}(4)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{1}{4}(2^2)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}(2)^{-3}=-\frac{1}{4}.\frac{1}{2^3}=\frac{-1}{32}$$

ملاحظة : مشتقة الدالة هي ايضاً دالة مجالها مجموعة جزئية من مجال الدالة ، وهي مجموعة كل النقاط x_0 التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق.

مثال : اذا كانت f(x)=|x| جد f '(x) ؟

الحل : الدالة مستمرة عند كل قيم x .

كما ان f(x)=-x ; x<0 :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(x+\Delta x)-(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-x-\Delta x+x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-1)=-1$$

وبالمثل ، عندما x>0 فأن f(x)=0 وان

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=1$$

وعندما x=0 فأن f(x)=0

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

عندما $\Delta x\to^{-}0$ فأن f '(0)=-1

عندما $\Delta x\to^{+}0$ فأن f '(0)= 1

وبالتالي لا توجد مشتقة عند x=0

لاحظ ان الدالة مستمرة عند 0 ، لكن غير قابلة الاشتقاق .

6.9 مبرهنة (6-2)

اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x=a فأن f دالة مستمرة عند تلك النقطة.

البرهان : الدالة f قابلة للاشتقاق عند x=a فأن f(a) معرفة و $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة

المطلوب البرهنة على ان $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$f(x)-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.x-a$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\lim_{x\to a}(x-a)$$

=f '(x).(0)

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

∴ الدالة f(x) مستمرة عند x=a

ملاحظة : عكس هذه المبرهنة غير صحيحة في المثال السابق.

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

6.10 قاعدة اللوبيتال: L'hopitals' Rule

ان هذه القاعدة تُستخدم عندما تكون الدالة المراد معرفة غايتها عند X_0 عبارة عن قسمة دالتين غاية كل منهما تساوي صفر او ∞ او ∞- ومشتقة دالة المقام لا تساوي الصفر فان غاية الدالة ستكون مشتقة دالة البسط على مشتقة دالة المقام.

ان هذه الطريقة يمكن ان تطبق اكثر من مرة اذا اقتضى الامر.

1) اذا كانت $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ دالة معرفة على (a,b)

وان $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0$

و $g'(x_o)\neq 0$ لكل $x\in(a,b)$ و $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

فأن $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = L$

2) اذا كانت $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ دالة معرفة على (a,∞)

و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ و $g'(x)\neq 0$ لكل $x\in(a,\infty)$ و

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

فأن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

3) اذا كانت $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ دالة معرفة على $(-\infty,a)$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ و $g'(x)\neq 0$ لكل $x\in(-\infty,a)$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

فأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

ملاحظة : يمكن تطبيق قاعدة اللوبيتال في حالة $\frac{\infty}{\infty}$ ولجميع حالاتها.

مثال :جد $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$ ؟

الحل : $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$

اذن نستخدم القاعدة $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$

مثال :أحسب $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$ ؟

الحل :نكتب الدالة كدالة نسبية $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$

اذن نستخدم قاعدة اللوبيتال $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

ملاحظة : يمكن استخدام قاعدة اللوبيتال اذا كانت الدالة معطاة بالشكل $[f(t)]^{g(t)}$ وغاية الدالة تأخذ احدى القيم 0^0 ، 1^∞،أو ∞^0 عندئذ :

1) نضع $y=[f(t)]^{g(t)}$

2) نأخذ ln الطرفين فنحصل $\ln y=g(t)\ln f(t)$

3) نكتب الدالة بشكل دالة نسبية

4) نستخدم قاعدة اللوبيتال

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

<u>مثال</u>: جد $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

<u>الحل</u> : عند التعويض نحصل على 1^{∞} اذن :

1) نضع $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

2) نأخذ ln الطرفين $\ln y = \frac{1}{x}\ln(1+x)$

3) نحولها الى دالة نسبية $\ln y = \frac{\ln(1+x)}{x}$

4) نأخذ الغاية للطرفين $\lim\limits_{x \to 0} \ln y = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$

اذن تستخدم قاعدة اللوبيتال

$$\ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

$$\ln y = 1 \to y = e^{1} = e$$

$$\therefore \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

<u>مثال</u>: أحسب $\lim\limits_{x \to 0}(\sin x)^{x}$ ؟

<u>الحل</u>: عند التعويض نحصل على 0^0 اذن نضع :

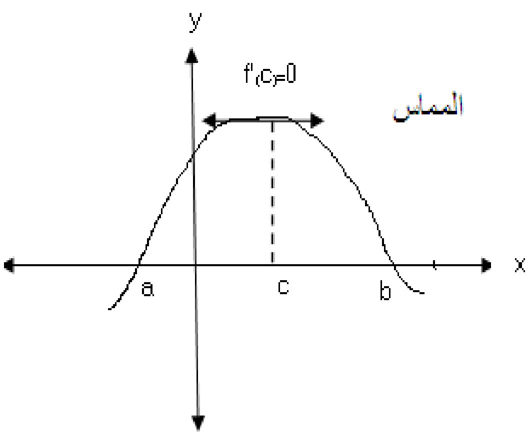
$$y=(\sin x)^x$$
$$\ln y = x\ln\sin x$$
$$\ln y=\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\bullet\cos x}{\frac{-1}{x^2}}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=-\lim_{x\to 0}\frac{-x^2\sin x+2x\cos x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$$
$$\therefore \ln y=0\to y=e^0=1$$

اي ان $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x=1$

6.11 مبرهنة رول Rolle's Theorem

لقد برهن العالم الفرنسي (متشل رول) انه اذا قطع مخطط الدالة f(x) المحور x في نقطتين وكان المخطط مستمراً والدالة قابلة للاشتقاق . فأنه توجد نقطة على جزء المخطط بين النقطتين



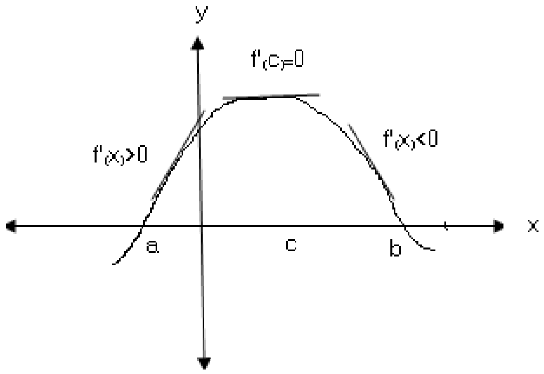
ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

بحيث ان المماس فيها يكون موازياً للمحور x كما في الشكل المجاور:

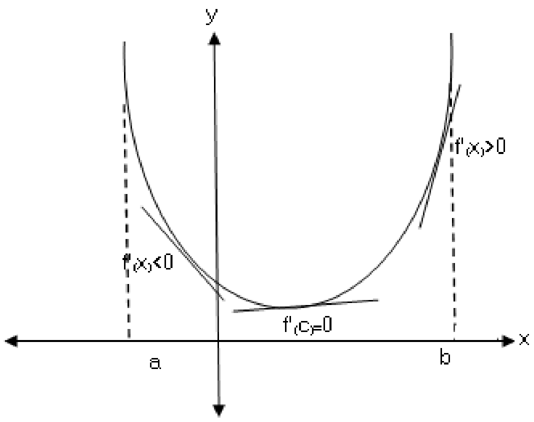
6.12 مبرهنة (6-3)

لتكن f دالة مستمرة في الفترة المفتوحة (a,b) وان c∈(a,b) ولتكن f قابلة للاشتقاق من (a,b) |{c} فأن:

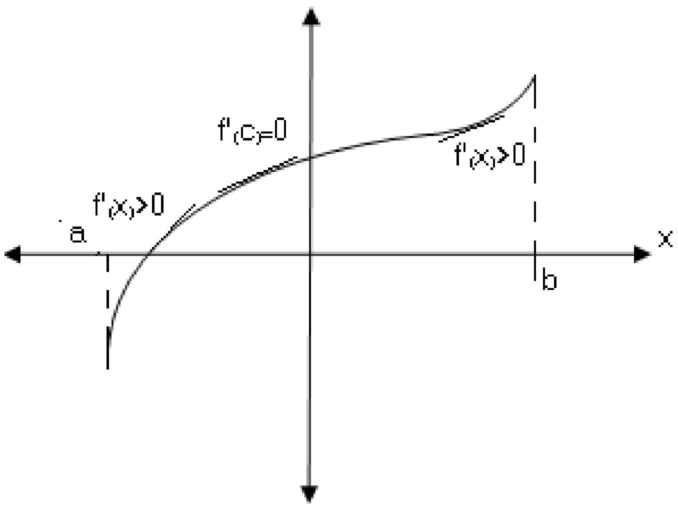
(1) اذا كانت f '(x)>0 لكل x في (a,c) ، وكانت f '(x)<0 لكل x في (c,b) ، فأن لـ f(c) قيمة عظمى نسبية لاحظ الشكل المجاور:



(2) اذا كانت f '(x)<0 لكل x في (a,c) ، وكانت f '(x)>0 لكل x في (c,b) ، فأن f(c) فيه صُغرى نسبية لاحظ الشكل المجاور:



(3) اذا كانت لـ f '(x) نفس الاشارة لكل x في (a,b)|{c} فأن f(c) ليست قيمة قصوى نسبية لاحظ الشكل ادناه:



ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

6.13 القيمة العظمى

يُقال للدالة f قيمة عظمى نسبية عند x=a اذا وجدت فترة مفتوحة I في منطلق f تحتوي على a، بحيث ان لكل x في I $f(x)\le f(a)$.

كما يُقال للدالة f قيمة صغرى نسبية عند x=b اذا وجدت فترة مفتوحة I في منطلق f تحتوي على b، بحيث ان لكل x في I $f(x)\ge f(a)$.

6.14 مبرهنة (6-4)

لتكن f(x) مُعرفة في الفترة (a,b)، اذا كان لـf قيمة قصوى نسبية نسبية عند c حيث $c\in(a,b)$ وكانت f(c) موجودة ،فأن $f'(c)=0$.

ملاحظة : يُقال ان للدالة f(x) قيمة قصوى نسبية عند x=c اذا كان للدالة f اما قيمة عظمى او قيمة صغرى نسبية عند x=c .

6.15 مبرهنة رول (6-5)

لتكن f دالة مستمرة في الفترة المغلقة [a,b] وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فأذا كان $f(a)=f(b)$ ، فأنه يوجد c في الفترة (a,b) بحيث ان $f'(c)=0$.

البرهان :

نقسم البرهان الى ثلاث حالات :

(a) اذا كانت $f(x)=0$ فأن $f'(x)=0$ لكل قيم x في الفترة (a,b)

(b) اذا كانت f دالة ثابتة في الفترة [a,b] فأن $f(x)=f(a)=f(b)$ لكل x في الفترة [a,b] وعند ذلك $f'(x)=0$ لكل x في الفترة (a,b).
واذا اخذنا c اي عدد في الفترة (a,b) فأن $f'(c)=0$.

(c) اذا كانت f دالة غير ثابتة في الفترة [a,b] بما ان f مستمرة على [a,b] ، اذن لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في الفترة [a,b].

لنفرض ان القيمة العظمى المطلقة عند $x=c_1$ ، وان القيمة الصغرى المطلقة تكون عند $x=c_2$.
وبما ان f غير ثابتة وان $f(a)=f(b)$.فيجب ان يكون $f(c_1)\neq f(a)$ أو $f(c_2)\neq f(a)$ بمعنى اخر ، اما ان يكون $c_1\in(a,b)$ او $c_2\in(a,b)$.

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

بما ان f قابلة للاشتقاق في (a,b) ، فأما ان تكون القيمة الصغرى المطلقة هي قيمة صغرى نسبية او تكون القيمة العظمى المطلقة هي قيمة عظمى نسبية (حسب مبرهنة (6-3))

وعلى كل حال ، فأن هنالك c في (a,b) بحيث ان f(c) قيمة قصوى نسبية .

$\therefore f'(c)=0$ حسب مبرهنة (6-4)

<u>مثال</u> : اذا كانت $f(x)=x^3-4x+2$ لكل $x \in R$ باستخدام مبرهنة رول اوجد قيمة c في $[-2,2]$.

<u>الحل</u> : (1) f(x) دالة مستمرة مع كل الاعداد الحقيقية R .

(2) f(x) قابلة للاشتقاق على كل R

(3) $f(-2)=f(2)=2$

اذن يوجد $c \in (-2,2)$ بحيث ان $f'(c)=0$

$$f'(x)=3x^2-4$$

$$f'(c)=3c^2-4=0$$

$$3c^2=4 \rightarrow c^2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore c=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$$

<u>مثال</u>: اذا كانت $f(x)=\sin x+2\sin\frac{x}{2}$ مُعرفة على الفترة $[0,2\pi]$ باستخدام مبرهنة رول ، اوجد قيمة c ؟

<u>الحل</u> : (1) f(x) مستمرة على $[0,2\pi]$

(2)قابلة للاشتقاق على $(0,2\pi)$

(3) $f(0)=F(2\pi)=0$

اذن يوجد $c \in (0,2\pi)$ بحيث ان $f'(c)=0$

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

او

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \cos x + \cos \frac{x}{2}$$

$$f'(c) = \cos c + \cos \frac{c}{2} = 0$$

$$\cos(\frac{c}{2} + \frac{c}{2}) + \cos \frac{c}{2} = 0$$

$$\cos^2 \frac{c}{2} - \sin^2 \frac{c}{2} + \cos \frac{c}{2} = 0$$

$$\cos^2 \frac{c}{2} - (1 - \cos^2 \frac{c}{2}) + \cos \frac{c}{2} = 0$$

$$\cos^2 \frac{c}{2} - 1 + \cos^2 \frac{c}{2} + \cos \frac{c}{2} = 0$$

$$2\cos^2 \frac{c}{2} + \cos \frac{c}{2} - 1 = 0$$

$$(2\cos \frac{c}{2} - 1)(\cos \frac{c}{2} + 1) = 0$$

$$2\cos \frac{c}{2} - 1 = 0 \rightarrow \cos \frac{c}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{2} = \frac{\pi}{3} \rightarrow c = \frac{2\pi}{3}$$

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

$$\frac{2\pi}{3} \in (0,2\pi)$$

$$\cos\frac{c}{2} + 1 = 0$$

او

$$\cos\frac{c}{2} = -1 \rightarrow \frac{c}{2} = \pi$$

تُهمل

$$c = 2\pi, 2\pi \notin (0,2\pi)$$

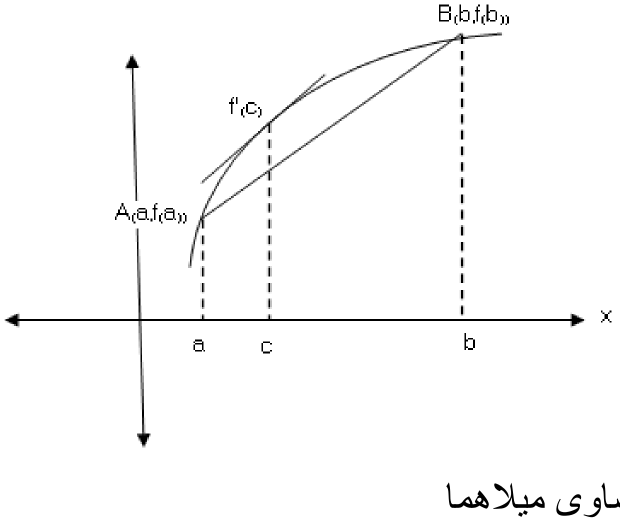
$$\therefore c = \frac{2\pi}{3}$$

6.16 مبرهنة القيمة المتوسطة (6-6) Mean-value Theorem

اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة المغلقة [a,b] وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فأنه يوجد عدد c في الفترة (a,b) بحيث ان

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

البرهان : المخطط المجاور يعطي التفسير الهندسي للمبرهنة :



اذا كان المماس يوازي الوتر $\overline{AB}$

فأن ميل المماس =f '(c)

ميل الوتر المار بالنقطتين A وB يساوي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ميل المماس للمنحني عند c=المشتقة الاولى للدالة f عند (f '(c) ,c)

لكن المماس والوتر متوازيان لذا يتساوى ميلاهما

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

مثال : برهن على ان الدالة $f(x)=x^2-6x+4$ لكل $x\in[-1,7]$ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة واوجد قيم c .

الحل : $f(x)=x^2-6x+4\ ;\ x\in[-1,7]$

(1) الدالة مستمرة في الفترة [-1,7] لانها متعددة حدود

(2) الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة (-1,7)

$$f'(x)=2x-6 \longrightarrow f'(c)=2c-6$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)}=\frac{11-11}{8}=0$$

$$2c-6=0 \longrightarrow 2c=6 \longrightarrow c=3\in(-1,7)$$

مثال : لتكن $f(x)=x^3-4x^2$ لكل $x\in[a,b]$ وكانت f تحقق شروط مبرهنة القيمة ا المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ فجد قيمة b.

الحل :

$$f'(x)=3x^2-8x$$

$$f'(c)=3c^2-8c$$

$$f'(\frac{2}{3})=3(\frac{4}{9})-8(\frac{2}{3})=\frac{4}{3}-\frac{16}{3}=-4$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(0)}{b-a}=\frac{b^3-4b^2}{b}=\frac{b(b^2-4b)}{b}=b^2-4b$$

$$\because\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$b^2-4b=-4 \longrightarrow b^2-4b+4=0$$

$$(b-2)^2=0 \longrightarrow b-2=0 \longrightarrow \boxed{b=2}$$

6.17 التقريب باستخدام نظرية القيمة المتوسطة Approximation Using Mean-Value Theorem

مثال : استخدم مبرهنة القيمة المتوسطة في ايجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{26}$

الحل : $f(x)= \sqrt{26}$; $x \in [25,26]$

(1) f مستمرة في [25,26]

(2) f قابلة للاشتقاق في (25,26)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore\ f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

$\therefore$ يوجد (25,26) $c \in$ بحيث ان

$$\frac{f(26) - f(25)}{26 - 25} = f'(c)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{26} - 5}{1}$$

بما ان $c \in (26,25)$

$$\therefore \sqrt{25} < \sqrt{c} < \sqrt{36}$$

$$5 < \sqrt{c} < 6$$

$$10 < 2\sqrt{c} < 12$$

$$\frac{1}{12} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{10} \rightarrow 0.083 < \frac{1}{2\sqrt{c}} < 0.1$$

$$0.083 < \sqrt{26} - 5 < 0.1$$

بأضافة 5 لجميع الاطراف

$$5+0.083<\sqrt{26}<5+0.1$$
$$5.083<\sqrt{26}<5.1$$

وان افضل قيمة تقريبية هي متوسط العددين 5.1 ، 5.083

$$\therefore\ \sqrt{26}\cong\frac{5.083+5.1}{2}=5.0915\cong 5.09$$
$$\therefore\ \sqrt{26}\cong 5.09$$

6.18 نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

اذا كانت f دالة مستمرة ومعرفة على [a,b] وقابلة للاشتقاق في (a,b) ولو اعتبرنا h=b-a فأن b=a+h حيث ان h∈R ، h≠0 فأنه بموجب مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على:

$$f'(c)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$\longrightarrow\quad f(a+h)=f(a)+hf'(c)$$

وعندما يكون اقتراب b من a قرباً كافياً تكون في هذه الحالة h صغيرة ويصبح الوتر صغيراً ونهايتيه قريبتان من a اي ان المماس عند c سيكون مماساً للمنحني عند نقطة قريبة جداً من النقطة حيث x=a ولذلك يصبح :

$$f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$$

يُسمى المقدار hf '(a) التغير التقريبي للدالة

مثال: اذا كان $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$ فجد بصورة تقريبية f(1.001) ؟

الحل:

$$f(1)=1+3+4+5=13$$
$$f'(x)=3x^2+6x+4$$
$$f'(1)=3+6+4=13$$

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

$$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$$
$$f(1.001) \cong f(1)+hf'(1)$$
$$\cong 13+(0.001)(13)$$
$$\cong 13.013$$

مثال : باستخدام القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية ومقرباً لثلاث مراتب عشرية؟

$$\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$$

الحل :

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3} + x^4 + 3$$
$$= x^{\frac{3}{5}} + x^4 + 3$$
$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}} + 4x^3$$
$$a = 1, b = 0.98. h = b - a = -0.002$$
$$f(1) = 1+1+3 = 5$$
$$f'(1) = \frac{3}{5} + 4 = 4.6$$
$$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$$
$$f(0.98) \cong f(1) + hf'(1)$$
$$\cong 5 + (-0.002)(4.6) = 4.908$$

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

أسئلة الفصل السادس

س1: جد $\frac{dy}{dx}$ للمسائل التالية :

1) $y=x^5+5x^4-10x^2+6$

2) $y=\sqrt{2x}+2\sqrt{x}$

3) $y=(3x-x^3+1)^4$

4) $y=\frac{3x+2}{2x+3}$

5) $y=(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$

6) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

7) $y=(x^2+3)^4(2x^3-5)^3$

8) $y=(\frac{x^3-1}{2x^3+1})^4$

س2: حدد صيغة للمشتقة من المرتبة n للمسائل التالية :

1) $y=\frac{1}{x^2}$

2) $y=\frac{1}{3x+2}$

3) $y=\frac{x}{x+2}$

4) $y=\sqrt{x}$

س3: ناقش استمرارية الدوال التالية :

1) $$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x\geq 0 \\ x^3 & ; \quad x<0 \end{cases}$$

2) $f(x)=x|x|$ لكل $x\in R$

س4: بين فيما اذا كانت الدالة المعطاة تُحقق شروط مبرهنةرول في الفترة المؤشرة ازاءها ، واذا كانت كذلك جد قيم c في الفترة بحيث ان $f'(c)=0$؟

1) $f(x)=x^2+3x-1 \quad ; \quad [-3,-1]$

2) $f(x)=x^3-2x^2-x+2 \quad ; \quad [1,2]$

3) $f(x)=x^3-16x+5 \quad ; \quad [-4,4]$

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

س5: بين فيما اذا كانت مبرهنة القيمة المتوسطة تتحقق للدوال التالية في الفترة المعطاة واذا كانت كذلك جد قيم c المناسبة ؟

1) $f(x)=3x^2-5x+6 \quad ; \quad [-2,3]$

2) $f(x)=\sqrt{x-2} \quad ; \quad [3,6]$

3) $f(x)=|x|+1 \quad ; \quad [-1,2]$

س6: باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد الصورة التقريبية :

1) $\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$ 2) $\sqrt{7.8}$ 3) $\sqrt[3]{0.12}$

4) $\sqrt[3]{-0.126}$ 5) $(1.04)^3+3(1.04)^4$

س7: جد المشتقة للدالة f في كل من الحالات التالية :

$f(x)=(x-4)(x+3)$

$f(x)=(3x+2)(2x+1)$

$f(x)=(x^2-1)^5$

$$f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$$

$$f(x)=\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)^6$$

س8: جد مشتقة الدوال التالية :

$a) y=\sqrt{x^2} \qquad b) y=\sqrt{x^3} \qquad c) y=\sqrt{x^3+2x^2+3x-2}$

$d) y=\sqrt{x^2+\frac{1}{x}} \qquad e) y=\sqrt{-x^2+6x+16} \qquad f) f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

س9: جد $\frac{dy}{dx}$ لما يلي :

$a)\ y=\sqrt{(x+\frac{1}{x^3}+2x^2)^5}$ $\quad b)\ y=\sqrt{\sqrt{(x^2+1)}-4x^2}$ $\quad c)\ y=\frac{5}{\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}}$

$d)\ x^3\sqrt{xy}-2y^3=5y$ $\quad e)\ x^2=\frac{x+2y}{x-2y}$ $\quad f)\ (2x+3)^4=2y^3$

س10: جد الغاية لما يلي :

$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}$ $\quad b)\ \lim_{x\to\infty}(\frac{x-a}{x+a})^x$

$c)\ \lim_{x\to\infty}\ln\frac{x}{x^2+1}$ $\quad d)\ \lim_{x\to\infty}(x)^{2x}$

$e)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ $\quad f)\ \lim_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x-1}}$

Є Є

الفصل السابع
المتتابعات SEQUENCE

7.1 مقدمة

سنتطرق في هذا الفصل الى المتتابعات لما لها من أهمية في دراسة المتسلسلات وان بعض المصطلحات مثل : متتابعة ، متتابعة متقاربة ، متتابعة متباعدة قد تبدو جديدة لكنها ليست كذلك من حيث المفهوم العام لانها تنطوي تحت مبحث الدوال التي لها غاية والدوال التي ليس لها غاية والتي سبق ان تطرقنا اليها في الفصل الثالث.

7.2 المتتابعة The Sequence

هي كل دالة منطلقها مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة ومستقرها S مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية $(S \subseteq R)$ $f:Z^+ \longrightarrow S$

لكل عدد صحيح موجب $n \in Z^+$ يوجد فقط $a_n \in S$ بحيث ان $f(n)=a_n$

سنرمز للمتتابعة بالرمز $\{a_n\}$ ونطلق على العنصر a_n بالحد العام للمتتابعة او الحد ذو الرتبة n (الحد النوني n-th term).

اذا كانت Z^+ مجموعة منتهية فأن المتتابعة تُسمى متتابعة منتهية ، واذا كانت Z^+ مجموعة غير منتهية فأن المتتابعة تُسمى متتابعة غير منتهية ، ويُرمز للمتتابعة المنتهية $\{a_n\}_{n=1}^{k}$ ولغير المنتهية $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

أمثلة :

(1) $\{a_n\}=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},.....\}$ الحد النوني لها هو $a_n=\frac{1}{n}$

(2) $\{a_n\}=\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},.....\}$ الحد النوني لها هو $a_n=\frac{n}{n+1}$

$$\{(-1)^n\} = \{-1,1,-1,1,.....\} \quad (3)$$

$$\{\frac{1}{2n}\} = \{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8}.....\} \quad (4)$$

$$\{(-1)^n + 1\} = \{0,2,0,2,.....\} \quad (5)$$

(6) المتتابعة الثابتة $\{7\}=\{7,7,7,7,.....\}$

<u>مثال</u> : ليكن $a_1=5$ ، $a_2=7$ و $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - a_{n-1})$ لكل $n \in Z^+$ ، $n \geq 2$ ، اوجد حدود المتتابعة ؟

<u>الحل</u> : عندما n=2 $\quad a_3 = \frac{1}{3}(a_2 - a_1) = \frac{1}{3}(7-5) = \frac{2}{3}$

عندما n=3 $\quad a_4 = \frac{1}{3}(a_3 - a_2) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3} - 7) = \frac{-19}{9}$

عندما n=4 $\quad a_5 = \frac{1}{3}(a_4 - a_3) = \frac{1}{3}(\frac{-19}{9} - \frac{2}{3}) = \frac{-25}{27}$

$$\therefore \{a_n\} = \{5,7,\frac{2}{3},\frac{-19}{9},\frac{-25}{27},.....\}$$

مثال : لتكن n : $a_{2n} = (-1)^{2n-1}$, $a_{2n-1} = 2n-1$ جد حدود المتتابعة؟

الحل : عندما n=1 ;

$$a_1 = 2-1 = 1 \quad , \quad a_2 = (-1)^{2-1}.(2) = -2$$

عندما n=2 ;

$$a_3 = 3, \quad a_4 = (-1)^3.(4) = -4$$

عندما n=3 ;

$$a_5 = 5 \quad , \quad a_6 = (-1)^5.6 = -6$$

$$\therefore \{a_n\} = \{1,-2,3,-4,5,-6,.....\}$$

7.3 مدى المتتابعة Range of Sequence

هو مجموعة القيم التي تحتوي على حدود مختلفة وبدون تكرار ودون الاخذ بنظر الاعتبار موقع العنصر.

أمثلة :

(1) $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1,1,-1,1,.....\}$ المدى $\{-1,1\}$

(2) $\{a_n\} = \{3,3,3,3,.....\}$ المدى $\{3\}$

(3) $\{a_n\} = \{\frac{1}{2^n}\} = \{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},.....\}$ المدى $\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},.....\}$

7.4 المتتابعة المقيدة Bounded Sequence

يُقال للمتتابعة انها مقيدة من الاعلى او مقيدة من الاسفل تبعاً الى مدى المتتابعة . اي اذا كان مدى المتتابعة مقيد فأن المتتابعة مقيدة ،او انها مقيدة اذا كان هناك عدد حقيقي M بحيث ان $|a_n|<M$ لجميع قيم n.

أمثلة : في الامثلة السابقة اعلاه :

(1) $\{(-1)^n\} = \{-1,1,-1,1,.....\}$ مقيدة من الاعلى ومن الاسفل لان المدى $= \{-1,1\}$ حيث ان القيد الاسفل =-1 والقيد الاعلى =1

(2) $\{3\} = \{3,3,3,3,.....\}$ المتتابعة غير مقيدة

Є Є

(3) $\{\frac{1}{2^n}\}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},.....\}$ المتتابعة مقيدة حيث ان القيد العلوي= $\frac{1}{2}$ والقيد السفلي =0

(4) $\{(-1)^n+1\}=\{0,2,0,2,.....\}$ المتتابعة مقيدة حيث ان القيد العلوي=2 والقيد السفلي=0

(5) $\{2n\}=\{2,4,6,8,.....\}$ المتتابعة مقيدة من الاسفل فقط حيث القيد السفلي لها=2 والقيد العلوي لها غير معرف.

(6) $\{(-1)^{n-1}.n\}=\{1,-2,3,-4,5,-6,.....\}$ المتتابعة غير مقيدة لعدم وجود القيد العلوي والقيد السفلي لها.

7.5 المتتابعة الرتيبة The Monotonic Sequence

يُقال للمتتابعة $\{a_n\}$ انها رتيبة متزايدة (متزايدة) اذا كان

$a_{n+1} \geq a_n$; لكل $n \in Z^+$

وتُسمى رتيبة متزايدة بأطراد (غير متناقصة) اذا كان

$a_{n+1} > a_n$; لكل $n \in Z^+$

ويُقال للمتتابعة $\{a_n\}$ انها رتيبة متناقصة (متناقصة) اذا كان

$a_{n+1} \leq a_n$; لكل $n \in Z^+$

وتسمى رتيبة متناقصة بأطراد(غير متزايدة) اذا كان

$a_{n+1} < a_n$; لكل $n \in Z^+$

كما يُقال للمتتابعة انها غير رتيبة اذا لم يتحقق اي من الشروط أعلاه.

<u>أمثلة :</u>

(1) $\{a_n\}=\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}=\{1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{2},.....\}$

لاحظ ان $a_{n+1} < a_n$ لكل n

Є Є

اذن المتتابعة متناقصة (رتيبة متناقصة)

$$\{2n\} = \{2,4,6,8,.....\} \quad (2)$$

لاحظ ان $a_{n+1}>a_n$ لكل n

اذن المتتابعة متزايدة (رتيبة متزايدة)

$$\{3\}=\{3,3,3,3,.....\} \quad (3)$$

غير رتيبة لانها غير متزايدة وغير متناقصة

7.6 المتتابعة المتقاربة Converging Sequence

يُقال للمتتابعة $\{a_n\}$ بأنها متقاربة اذا وجد عدد حقيقي a_0 بحيث ان لكل $Є>0$ يوجد عدد صحيح موجب m (m يعتمد على Є) بحيث ان $|a_n-a_0|<Є$ لكل $m<n$.

او المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة اذا وجد a_0 بحيث ان كل فترة مفتوحة $(a_0-Є , a_0+Є)$ مركزهما a_0 تحتوي على معظم حدود المتتابعة ، ويطلق على a_0 نقطة التقارب ويُكتب $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$

واذا لم تكن المتتابعة متقاربة فهي متباعدة (divergent).

<u>مثال</u> : برهن على ان المتتابعة $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة الى الصفر؟

<u>البرهان</u> : لكل $Є>0$ ، يوجد $mЄZ^+$ بحيث ان $n > m > \frac{1}{\in}$ او

$$\forall \in > 0, \exists m \in Z^+, S.t \quad n > m > \frac{1}{\in}$$

€ €

$$n > \frac{1}{\in} \rightarrow \frac{1}{n} < \in \rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \in$$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \in \rightarrow | a_n - a_0 | < \in$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

اي ان المتتابعة متقاربة الى الصفر

<u>مثال</u> : بين فيما اذا كانت المتتابعة $\{(-1)^n + 1\}$ متقاربة ؟

<u>الحل</u> :لنفرض $a_n = (-1)^n + 1$ اي ان المتتابعة هي $\{0,2,0,2,0,2,\ldots..\}$ او

a_n={ 0 عندما n عدد فردي

{ 2 عندما n عدد زوجي

اذا كانت المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة فأن $\lim_{n \to \infty} a_n = a_0$

اذن لكل $\epsilon>0$ ، يوجد $m \epsilon Z^+$ بحيث ان $| a_n - a_0 | < \in$ عندما n>m لنأخذ

$\in = \frac{1}{2}$ كحالة خاصة اي يجب ايجاد m>0 بحيث ان $| a_n - a_0 | < \frac{1}{2}$ عندما n>m

اي ان :

$-\frac{1}{2} < a_n - a_0 | < \frac{1}{2}$ وبما ان $a_n=0$ عندما n عدداً فردياً و $a_n=2$

عندما n عدداً زوجياً وبالتعويض نحصل على :

$$-\frac{1}{2} < 2 - a_0 | < \frac{1}{2} \text{ -----(1)}$$

Є Є

$$-\frac{1}{2} < 0 - a_0 | < \frac{1}{2} \text{ -----(2)}$$

وبأضافة 2 للمتراجحة (2) نحصل على

$$\frac{3}{2} < 2 - a_0 | < \frac{5}{2} \text{ -----(3)}$$

اي ان $2 - a_0 > \frac{3}{2}$

وهذا يناقض احد طرفي المتراجحة (1) $2 - a_0 | < \frac{1}{2}$ اي ان المتتابعة $\{(-1)^n+1\}$غير متقاربة وعليه فأن المتتابعة متباعدة.

مثال : برهن على ان المتتابعة $\left\{\frac{5n-4}{2-3n}\right\}$ متقاربة الى $-\frac{5}{3}$.

البرهان : لكل Є>0 ، يوجد $m Є Z^+$ بحيث ان $|a_n - a_0| < \in$

$$\left|\frac{5n-4}{2-3n} - \frac{-5}{3}\right| = \left|\frac{5n-4}{2-3n} + \frac{5}{3}\right| = \left|\frac{15n-12+10-15n}{3(2-3n)}\right| = \left|\frac{-2}{6-9n}\right| = \in$$

$$\to n = \frac{6\in -2}{9\in}$$

ليكن $n > m > \frac{6\in -2}{9\in}$

Є Є

$$|a_n - a_0| = \left|\frac{-2}{6-9n}\right| < \left|\frac{-2}{6-9\,\dfrac{6\in -2}{9\in}}\right|$$

$$|a_n - a_0| \left|\frac{2}{\frac{2}{\in}}\right| = \in$$

$$|a_n - a_0| < \in$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = a_0$$

اي ان $\left\{\dfrac{5n-4}{2-3n}\right\} \to \dfrac{-5}{3}$

<u>مثال</u>: برهن على ان المتتابعة $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$متقاربة الى الصفر ؟

<u>البرهان</u> : $\forall \in > 0, \exists m \in Z^+ \ni$

$$|a_n - a_0| < \in \quad ; \quad n > m$$

$$|a_n - a_0| = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{2^n}\right| = \in$$

$$2^n = \frac{1}{\in} \to 2\ln 2 = -\ln \in \to n = \frac{-\ln \in}{\ln 2}$$

ليكن $n > m > \dfrac{-\ln \in}{\ln 2}$

€ €

$$\therefore 2^n = 2^{\frac{\ln \in}{\ln 2}}$$

الان اذا كان $K = 2^{-\frac{\ln \in}{\ln 2}} \longrightarrow$ بأخذ Ln للطرفين

$$\ln k = \frac{-\ln \in}{\ln 2} . \ln 2 = -\ln \in$$

$$\ln k = \ln \frac{1}{\in} \to k = \frac{1}{\in}$$

$$| a_n - a_0 | < \frac{1}{\frac{1}{\in}} = \in$$

اي $\longleftarrow | a_n - a_0 | < \in$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ اذن المتتابعة $\{\frac{1}{2^n}\}$ متقاربة الى الصفر

<u>7.7 مبرهنة (7-1)</u>

اذا كانت المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة فأن نقطة تقاربها وحيدة .

البرهان : لتكن $a_n \longrightarrow a_0$ و $a_n \longrightarrow b_0$ و $|a_0 - b_0| = €$

$$\forall \in > 0, \exists m_1 \in Z^+ \ni | a_n - a_0 | < \frac{\in}{2}$$

بما ان $a_n \longrightarrow a_0$ فأن

$$\forall m_1 < n$$

وبما ان $a_n \longrightarrow b_0$ فأن

Є Є

$$\forall \in > 0, \exists m_2 \in Z^+ \ni | a_n - b_0 | < \frac{\in}{2}, \forall m_2 < n$$

$$\in = | a_0 - b_0 | = | a_0 - a_n + a_n - b_0 | = | -(a_n - a_0) + (a_n - b_0) | <$$

$$| a_n - a_0 | + | a_n - b_0 | < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$$

$|a_0-b_0|<Є$

وهذا يناقض الفرض

اي ان نقطة التقارب يجب ان تكون وحيدة.

<u>7.8 مبرهنة (7-2)</u>

اذا كانت $a_n \le b_n \le c_n$ لكل n و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a_0$

فأن $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a_0$

<u>البرهان :</u> بما ان $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a_0$ فأن لكل $Є > 0$ ، يوجد عدد صحيح m بحيث

ان $| a_n - a_0 | < \frac{\in}{4}$ لكل n>m الان بما ان $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a_0$ فأن

لكل $Є > 0$ ، يوجد عدد صحيح m بحيث ان $| c_n - a_0 | < \frac{\in}{4}$ وبما ان $a_n \le b_n \le c_n$

فأن $|b_n-a_n|<|c_n-a_n|$ لكن

$$|c_n-a_n|=|c_n-a_0+a_0-a_n| \le |c_n-a_0|+|a_n-a_0| < \frac{\in}{4} + \frac{\in}{4} = \frac{\in}{2}$$

اذن $|b_n-a_n| < \frac{\in}{2}$ وبالتالي

$$|b_n-a_0|=|b_n-a_n+a_n-a_0|\le|b_n-a_n|+|a_n-a_0|<\frac{\in}{2}+\frac{\in}{4}=\frac{3\in}{4}<\in$$

$$\therefore |b_n-a_0|<\in$$

$$\therefore b_n\to a_0$$

اي ان $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a_0$

<u>مثال</u> : برهن على ان المتتابعة $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ متقاربة الى الصفر ؟

<u>الحل</u> : باستخدام مبرهنة (7-2) لتكن

$$\frac{1}{2^{n^2+1}}<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n^2+1}}=0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$$

اذن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$

اي المتتابعة $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ متقاربة الى الصفر

<u>7.9مبرهنة (7-3)</u>

كل متتابعة $\{a_n\}$ متقاربة تكون مقيدة ؟

<u>البرهان :</u>

بما ان المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة فأن

$$\forall \in>0, \exists m\in Z^+ \ni |a_n-a_0|<\in \quad ;\forall n>m$$

من خواص القيمة المطلقة

$$|a_n-a_0|<\in<1\to|a_n-a_0|<1$$

$$\because |a_n-a_0|\ge|a_n|-|a_0|$$

ϵ ϵ

$\therefore |a_n| - |a_0| < 1 \rightarrow |a_n| < 1 + |a_0|$

لتكن $M=\max\{|a_1|,|a_2|,|a_3|,\ldots,|a_n|,|a_0|+1\}$

$\therefore |a_n| < M$

اي ان $\{a_n\}$ مقيدة .

ملاحظة : عكس النظرية غير صحيح والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال : $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\ldots\}$

الحل : لاحظ ان المتتابعة مقيدة حيث ان القيد العلوي لها =1 والقيد السفلي لها =-1 .

لتكن نقطة التقارب $a_0=1$ و $\in = \frac{1}{4}$

$$(a_0 - \in, a_0 + \in) = (1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}) = (0.75, 1.5)$$

هذه الفترة تحتوي على الحدود الزوجية ولا تحتوي على الحدود الفردية المساوية الى (-1) ، ومجموعة الحدود الفردية غير منتهية ، اي ان الفترة لا تحتوي على معظم حدود المتتابعة وبالتالي فأن المتتابعة غير متقاربة الى 1. وكذلك بالنسبة الى (-1). اذن المتتابعة غير متقاربة.

7.10 المتتابعة الاساسية (المتتابعة الكوشية) Cauchy Sequence

يُقال للمتتابعة الحقيقية $\{a_n\}$ انها اساسية (كوشية) اذا كان لكل $\epsilon>0$ يوجد عدد صحيح موجب k (k يعتمد على ϵ) بحيث ان :

$$|a_n - a_m| < \in \quad ; \forall n, m > k$$

ملاحظة : يُسمى هذا النوع من المتتابعات باسم متتابعة كوشية نسبة الى العالم الرياضي الفرنسي كوشي A.L.Cauchy (1787-1857)

<u>7.11 مبرهنة (7-4)</u>

كل متتابعة متقاربة من الاعداد الحقيقية تكون اساسية.

<u>البرهان :</u>

لتكن المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة اي ان $a_n \longrightarrow a_0$

$$\therefore \forall \in > 0, \exists k > 0 \ni |a_n - a_0| < \frac{\in}{2} \quad ; \forall n > k$$

وعليه لكل $k<n,m$

$$|a_n-a_m|=|a_n-a_0+a_0-a_m| =|(a_n-a_0)-(a_m-a_0)|$$

$$<|a_n-a_0|+|a_m-a_0|=\frac{\in}{2}+\frac{\in}{2}=\in$$

$$\therefore \ |a_n-a_m|<\in$$

اي ان $\{a_n\}$ متتابعة اساسية.

<u>امثلة</u> :

(1) $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

بما ان $a_n \longrightarrow 0$ اذن $\{a_n\}$ متتابعة كوشية لانها متقاربة حسب المبرهنة اعلاه

(2) $\{a_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

بما ان $a_n \longrightarrow 1$ اذن $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ متتابعة كوشية لانها متقاربة حسب المبرهنة اعلاه

<u>مثال</u>: $\{a_n\}=\{(-1)^n\}$ لاحظ ان المتتابعة $\{-1,1,-1,1\}$ ليست اساسية لانها غير متقاربة ($\lim_{n\to\infty}(-1)^n = \infty$) .

<u>7.12 مبرهنة (7-5)</u>

€ €

كل متتابعة اساسية تكون مقيدة .

البرهان : لتكن $\{a_n\}$ متتابعة اساسية

$$\therefore \forall \in > 0, \exists k > 0 \ni |a_n - a_m| < \in \quad ; \forall n, m > k$$

$$\therefore |a_n - a_m| < \in \quad ; \quad (0 < \in < 1)$$

$$|a_n| < 1 + |a_m| \quad ; \quad \forall n > m$$

لتكن $M=\max\{|a_1|,|a_2|,|a_3|,\ldots,|a_n|,|a_n|+1\}$

$$\therefore |a_n| < M \quad ; \quad \forall n \in Z^+$$

$\therefore \{a_n\}$ متابعة مقيدة

7.13 مبرهنة (6-7)

لتكن كل من $\{a_n\}$،$\{b_n\}$ متتابعة متقاربة وان $a_n \longrightarrow a_0$ و $b_n \longrightarrow b_0$ فأن

(1) المتتابعة $\{a_n+b_n\}$ تكون متقاربة وان $a_n+b_n \longrightarrow a_0+b_0$

(2) المتتابعة $\{a_n.b_n\}$ تكون متقاربة وان $a_n.b_n \longrightarrow a_0.b_0$

(3) اذا كان $b_n \neq 0$ لكل $n \in Z^+$ و $b_0 \neq 0$ فأن المتتابعة $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ متقاربة وان

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow \left\{\frac{a_0}{b_0}\right\}$$

(4) بصورة خاصة لكل عدد حقيقي c فأن المتتابعة $\{c.a_n\}$ متقاربة وان : $c.a_n \longrightarrow c.a_0$

(5) اذا كان المتتابعة $\{a_n\}$تقترب الى a_0 فأن المتتابعة $\{|a_n|\}$ تقترب الى $|a_0|$.

برهان (1)

Є Є

بما ان المتتابعة $\{a_n\}$ تقترب الى a_0 فأن

$$\forall \in > 0, \exists m_1 \ni | a_n - a_0 | < \frac{\in}{2} \quad ; \forall n > m_1$$

و $\{b_n\}$ تقترب الى b_0 فأن

$$\forall \in > 0, \exists m_2 \ni | b_n - b_0 | < \frac{\in}{2} \quad ; \forall n > m_2$$

ليكن $m=\max\{m_1,m_2\}$ ولكل $n>m$

$$|a_n+b_n-(a_0+b_0)|<|a_n-a_0|+|b_n-b_0|<\frac{\in}{2}+\frac{\in}{2}=\in$$

اي ان $|a_n+b_n-(a_0+b_0)|<\epsilon$

اذن $a_n+b_n \longrightarrow a_0+b_0$

<u>برهان (2)</u>

بما ان $\{a_n\}$ متقاربة ⟵ هي مقيدة

اي يوجد عدد $0<M_1$ بحيث ان $|a_n|<M_1$ وان $|a_0|<M_1$

وبما ان $\{b_n\}$ متقاربة ⟵ هي مقيدة

اي يوجد عدد $0<M_2$ بحيث ان $|b_n|<M_2$ وان $|b_0|<M_2$

وليكن $M=\max\{M_1,M_2\}$

الان بما ان $a_n \longrightarrow a_0$

$$\therefore \forall \in > 0, \exists k_1 \ni | a_n - a_0 | < \frac{\in}{2M} \quad ; \forall n > k_1$$

وبما ان $b_n \longrightarrow b_0$

$$\therefore \forall \in > 0, \exists k_2 \ni | b_n - b_0 | < \frac{\in}{2M} \quad ; \forall n > k_2$$

وليكن $k=\max\{k_1,k_2\}$ والان لكل $n>k$

Є Є

$|a_nb_n- a_0b_0|=| a_nb_n-a_nb_0+a_nb_0-a_0b_0|$

$|a_nb_n- a_0b_0|<| a_nb_n-a_nb_0|+|a_nb_0-a_0b_0|$
$<|a_n||b_n-b_0|+|b_0||a_n-a_0|$

$$< M.\frac{\in}{2M}+M.\frac{\in}{2M}=\in$$

$$\therefore a_nb_n \to a_0b_0$$

<u>مثال</u> : برهن على ان المتتابعة $\left\{\frac{n^3}{3n^2+2}\sin\frac{\pi}{n}\right\}$ متقاربة ثم جد غايتها (نقطة تقاربها)

<u>الحل</u> : بما ان $\frac{n^3}{3n^2+2}\sin\frac{\pi}{n}=\frac{n^2}{3n^2+2}.n\sin\frac{\pi}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+2}=\frac{1}{3}$$

الان سوف تتحقق من تقارب $\{n\sin\frac{\pi}{n}\}$

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}$$

نضرب في $(\frac{\pi}{\pi})$.

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi\lim_{y\to0}\frac{\cos y}{y}=\pi$$

€ €

حيث ان $y=\frac{\pi}{x}$ ولاحظ ان $y\to 0$ عندما $x\to\infty$

اذن المتتابعة $\{n\sin\frac{\pi}{n}\}$ متقاربة الى π

ومن المبرهنة اعلاه فرع (2) ستكون المتتابعة $\left\{\frac{n^3}{3n^2+2}\sin\frac{\pi}{2}\right\} \to \frac{\pi}{3}$

<u>برهان (3)</u>

اذا كان $b_n\neq 0$ و $b_0\neq 0$ فلا بد من وجود عدد d بحيث ان

$|b_0|>d$ و $|b_n|>d$

المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة $\longrightarrow$ $\{a_n\}$ مقيدة

$$\therefore \exists M>0 \ni |a_n|<M \quad ;\forall n>m$$

$$a_n \longrightarrow a_0$$

$$\therefore \forall \in>0, \exists m_1 \ni |a_n-a_0|<\frac{\in d}{2} \quad ;\forall n>m_1$$

$$b_n \longrightarrow b_0$$

$$\therefore \forall \in>0, \exists m_2 \ni |b_m-b_0|<\frac{\in d^2}{2M} \quad ;\forall n>m_2$$

ليكن $m=\max\{m_1,m_2\}$

والان لكل $n>m$

Є Є

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_0}{b_0}\right|=\left|\frac{b_nb_0-a_na_0}{b_nb_0}\right|=\left|\frac{a_nb_0-a_nb_n+a_nb_n-b_na_0}{b_nb_0}\right|$$

$$\leq\frac{|a_n||b_n-b_0|+|b_n||a_n-a_0|}{|b_n||b_0|}=\frac{|a_n||b_n-b_0|}{|b_n||b_0|}+\frac{|a_n-a_0|}{|b_0|}$$

$$\leq M.\frac{\frac{\in d^2}{2M}}{d^2}+\frac{\frac{\in d}{2}}{d}=\in$$

$$\therefore\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a_0}{b_0}$$

<u>برهان (4)</u>

بما ان المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة اي a_0 $a_n \to$ فأن

$$\forall \in>0,\exists m \ni |a_n-a_0|<\frac{\in}{|c|}\quad ;\forall n>m$$

$\therefore$ $|c.a_0-c.a_n|<Є$

اي ان المتتابعة $\{c.a_n\}$ متقاربة الى $c.a_0$

$c.a_n \longrightarrow c.a_0$

<u>برهان (5)</u> يُترك كتمرين للطالب

<u>7.14 مبرهنة (7-7)</u>

المتتابعة الثابتة $\{a_n\}$ $(a_n=c)$ و c عدد ثابت لكل $nЄZ^+$ متقاربة الى c.

البرهان :

بما ان المتتابعة متقاربة و $(a_n=c)$

$$\therefore|a_n-c|=0\qquad\forall n$$

و $Є>0$

$$\therefore |a_n - c| < \in$$
$$\therefore a_n \mapsto c$$

7.15 المتتابعة الجزئية The Subsequence

لتكن $\{a_n\}$ متتابعة معرفة بالشكل $f(n)=a_n$ و $f:Z^+ \longrightarrow R$ و $\{b_n\}$ متتابعة متزايدة بأطراد و $g:Z^+ \longrightarrow Z^+$ فأن المتتابعة بالشكل $gof:Z^+ \longrightarrow R$ حيث ان $b_n=f(g(n))$ فأن $\{b_n\}$ متتابعة جزئية للمتتابعة $\{a_n\}$.

مثال :اذا كانت $a_n=n^2$ و $g(n)=2n+1$ حيث و $f:Z^+ \longrightarrow R$ و $g:Z^+ \longrightarrow Z^+$ فأن

$$b_n=(fog)_{(n)}= f(g(n))$$
$$=(2n+1)^2$$

اي $\{b_n\}$ متتابعة جزئية من $\{a_n\}$.

7.16 مبرهنة (7-8)

اذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة متزايدة و $\{b_n\}$ متتابعة جزئية لـ$\{a_n\}$ فأن $\{b_n\}$ متزايدة ايضاً.

البرهان : بما ان $b_n=f(g(n))$ فأن $b_{n+1}=f(g(n+1))$

الان بما ان g متزايدة بأطراد $\longrightarrow g(n+1)>g(n)$

و f متزايدة $\longrightarrow f(m)\geq f(n)$

لكل $m\geq n$

$$F(g(n+1))\geq f(g(n))$$
$$\therefore b_{n+1} \geq b_n \quad \forall n \in Z^+$$

أسئلة الفصل السابع

س1: لتكن $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ جد حدود المتتابعة ؟

س2: اذا كان $a_n=\frac{1-(-1)^n}{n^3}$ جد الحدود الخمسة الاولى للمتتابعة ؟

س3: برهن باستعمال التعريف ان :

1	$\left\{\frac{2-7n}{1-5n}\right\}$ متقاربة الى $\frac{7}{5}$
2	$\left\{\frac{n^2+1}{2n^2-5}\right\}$ متقاربة الى $\frac{1}{2}$

س4: تحقق فيما اذا كانت المتتابعات التالية رتيبة ام لا ثم بين اي منها متقاربة ؟

1	$\left\{\frac{2^n}{1+2^n}\right\}$	2	$\sin n\pi$
3	$\left\{\frac{3n-1}{4n^2-5}\right\}$	4	$\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}$

س5: هل المتتابعات التالية متقاربة واذا كانت كذلك فجد نقطة تقاربها ؟

1	$\left\{\frac{n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$	2	$\left\{\frac{\ln n}{n^2}\right\}$
3	$\left\{\frac{\sinh n}{\sin n}\right\}$	4	$\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$

س6: اذا كانت $\{a_n\}=\{2n\}$ و $\{b_n\}=\{2^n\}$ بين ان $\{b_n\}$ متتابعة جزئية من $\{a_n\}$؟

€ €

س7: بين ان كل متتابعة جزئية لمتتابعة مقيدة تكون مقيدة ؟

س8: اذا كانت $\{|a_n|\}$ مقيدة فأن $\{a_n\}$مقيدة ؟

س9: باستخدام تعريف الغاية اثبت ان المتتابعة التالية لها غاية ؟

$$1+\frac{1}{1},1+\frac{1}{4},\ldots\ldots,1+\frac{1}{n^2},\ldots.$$

س10: اذا علمت ان $a_1=7, a_n=a_{n-1}+3$ ، اوجد a_4, a_5 ؟

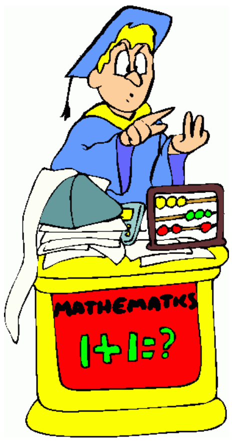
س11: هل العبارات التالية صحيحة ام خاطئة ؟ برهن صحة جوابك ؟

أ- لتكن a_n متتالية من الاعداد القياسية فأذا كانت a_n متقاربة فلابد ان تتقارب الى عدد قياسي ؟

ب-لتكن a_n متتالية من الاعداد غيرالقياسية فأذا كانت a_n متقاربة فلابد ان تتقارب الى عدد غير قياسي ؟

ج-اذا كانت $|a_n|<M$ حيث M عدد حقيقي موجب فأن المتتالية $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متقاربة ؟

د-اذا كان حدود المتتالية مجموعة غير منتهية فأن مدى المتتالية ايضاً يكون مجموعة غير منتهية ؟



الفصل الثامن
المتسلسلات اللانهائية INFINITY SERIES

8.1 مقدمة

عرفنا فيما سبق أن المتتالية هي مجموعة مرتبة من الأعداد الحقيقية وفق قاعدة معينة ويفصل بين حدودها الإشارة (,) ولكن إذا استبدلنا إشارة (,) بإشارة الجمع (+) فإن المتتالية تسمى متسلسلة فمثلا: 2 ، 5 ، 8 ، . . . متتالية أم المجموع : 2 + 5 + 8 + . . . فيسمى متسلسلة وللتعبير عن هذا المجموع نستخدم رمزا خاصا يسمى $\sum$ (ويقرأ سيكما Sigma) .

8.2 المتسلسلة اللانهائية

المتسلسلة اللانهائية من الاعداد الحقيقية

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n + \ldots..$$ هي عبارة عن متتابعة اعداد حقيقية $\{s_n\}$

حيث ان :

$s_1=a_1$
$s_2=a_1+a_2$
$s_3=a_1+a_2+a_3$
:
:
$s_n=a_1+a_2+a_3+\ldots..+a_n$

تُسمى الاعداد a_1،a_2،a_3،.....،a_n حدود المتسلسلة والعدد الحقيقي s_n يُسمى بالمجموع الجزئي النوني للمتسلسلة او المجموع النوني لها احياناً.

سوف نرمز للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بالرمز $\sum a_n$ (للاختصار)

أمثلة :

$$\sum n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \ldots\ldots \quad (3)$$

<u>مثال</u> : جد المتتابعة $\{S_n\}$ للمتسلسلة اللانهائية $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

<u>الحل</u> : لنأخذ $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ فأن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ اي ان

$a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ وبتجزئة الكسور :

$$a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2} = \frac{A(k+2) + B(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(A+B)k + 2A + B}{(k+1)(k+2)}$$

وبمساواة معاملات البسط للطرفين:

A+B=0 -------(1)

2A+B=1 ------(2)

وبحل المعادلتين انياً ، نطرح (1) من (2) : A=1

من المعادلة (1) A=-B $\therefore$ B=-1

$$a_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-2}{2(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$

اذن المتتابعة $\{S_n\} = \left\{\frac{n}{2(n+2)}\right\}$

المتسلسلة اعلاه تُسمى متسلسلة تلسكوبية (Telescoping Series)

8.3 المتسلسلة التلسكوبية Convergent Sequence

هي المتسلسلة التي ليس لها صيغة عامة مثل متسلسلة القوى

(p-series) $\sum \frac{1}{n^p}$او المتسلسلة الهندسية $\sum ar^{n-1}$ والتي يمكن ايجاد مجموعها

بطريقة تجزئة الكسور كما في المثال اعلاه.

8.4 المتسلسلة المتقاربة Convergent Sequence

يُقال للمتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة اذا كانت متتابعة مجاميعها الجزئية متقاربة اي

ان $\lim_{n\to\infty} S_n = S_0$ حيث ان s عدد حقيقي والا فهي متباعدة .

<u>مثال :</u> اثبت ان المتسلسلة $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$متقاربة ؟

<u>الحل:</u> من المثال اعلاه $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+2)} = \frac{1}{2}$

اذن المتسلسلة اللانهائية $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ متقاربة وان مجموعها يساوي $\frac{1}{2}$.

مثال : لتكن $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$ جد المتتابعة $\{S_n\}$ للمتسلسلة اللانهائية $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ ؟

الحل: لنأخذ $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ فأن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ اي ان $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$$

وبمساواة معاملات البسط للطرفين:

A+B=0 -------(1)

A =1 ------(2)

وبحل المعادلتين انياً: A=1 و B=-1

$$a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

∑∑

مثال :

$$\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots\dots + \frac{1}{2^n} + \dots\dots$$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

اي ان متتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\} = \left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

بما ان متتابعة المجاميع الجزئية متقاربة اذن المتسلسلة $\sum \frac{1}{2^n}$ متقاربة.

ملاحظة: يُقال للمتسلسلة $\sum a_n$ بأنها متباعدة اذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ فأنها تتباعد الى $(+\infty)$ وتكتب $\sum S_n = \infty$ وبالمثل ، اذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\infty$ ، يُقال للمتسلسلة بأنها تتباعد الى $(-\infty)$ وتكتب $\sum S_n = -\infty$.

مثال: المتسلسلة $\sum(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+1-1+.....$

وهكذا نجد $S_1=1$, $S_2=1-1=0$, $S_3=1-1+1=1$, $S_4=1-1+1-1=0$,.....

ان $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ غير موجودة والمتسلسلة متباعدة (ولكن ليس الى ∞ او $-\infty$) .

مثال: المتسلسلة $\sum n = 1+2+3+4+.....$

$S_1=1$, $S_2=1+2$, $S_3=1+2+3$, $S_n=1+2+3+4+.....+n$

$$2S_n=2+4+6+8.....+2n$$

$$2S_n=n(n+1)$$

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n^2+n)=\infty$$

$\therefore$ $\sum n$ متباعدة

مثال : المتسلسلة $\sum\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......$ تُسمى متسلسلة توافقية (Harmonic)

لاحظ المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة :

$$S_2 = 1+\frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{2}{2} \to S_4 > 1+\frac{2}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{3}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > S_8 + \frac{8}{16} = S_8 + \frac{1}{2}$$

$$S_{16} > 1 + \frac{4}{2}$$

$$\vdots$$

$$S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2} \quad ; \quad k > 1$$

اذن $\lim S_n = \infty$ $\leftarrow$ المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة لكن $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

8.5 مبرهنة (8-1)

اذا كان $\sum a_n$ متقاربة فأن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

البرهان : لنفرض ان $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S \Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ حيث ان S_n المجموع الجزئي n للمتسلسلة كما ان $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ ولكن $a_n=S_n-S_{n-1}$ اذن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

8.6 مبرهنة (8-2)

اذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ غير موجودة او $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \neq 0$ فأن $\sum a_n$ متباعدة وهي نتيجة منطقية للمبرهنة أعلاه .

مثال : المتسلسلة $\sum \frac{n}{2n+1}$ متباعدة .

لاحظ ان $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ وبما ان $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} \neq 0$
اذن حسب المبرهنة السابقة فأن المتسلسلة متباعدة.

8.7 المتسلسلة الهندسية Geometric Series

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ...$ حيث ان $a\neq0$ تسمى هذه المتسلسلة بالمتسلسلة الهندسية ويطلق على r اساس المتسلسلة وa الحد الاول فيها.

8.8 مبرهنة (8-3)

تكون المتسلسلة الهندسية $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ متقاربة عندما $|r|<1$ ومجموعها هو $\dfrac{a}{1-r}$ ومتباعدة عندما $|r|\geq1$ حيث ان $a\neq0$.

البرهان : بما ان $S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n$$

بالطرح $S_n - rS_n = a - ar^n$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

الان اذا كان $|r|<1 \Rightarrow -1<r<1$

فأن $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

اذن المتسلسلة متقاربة.

اذا كانت $|r|>1 \leftarrow r>1$ او r<-1 فأن $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

واذا كانت r=1 فأن S_n=na و $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

اذن المتسلسلة متباعدة عندما |r|≥1

<u>مثال</u> : هل ان المتسلسلة $\sum \frac{2^{n-1}}{3^n}$ متقاربة ؟

<u>الحل</u> : $\sum \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{8}{3^4} + ...$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + ...$$

المتسلسلة هندسية فيها a=$\frac{1}{3}$ و $r = \frac{2}{3} < 1$

اذن حسب المبرهنة اعلاه المتسلسلة $\sum \frac{2^{n-1}}{3^n}$ متقاربة .

<u>مثال</u> : هل ان المتسلسلة .....0.2222 متقاربة ؟

<u>الحل</u> : يمكن كتابة العدد .....0.2222 بالشكل :

0.2222…..=0.2+0.02+0.002+0.0002+…..

$$= \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + ...$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^4} + ...$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{2}{10}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2}{10}\left(\frac{1}{10^2}\right) + \frac{2}{10}\left(\frac{1}{10^3}\right) + ...$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{2}{10}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + ...$$

بما ان المتسلسلة هندسية فيها $a=\frac{2}{10}$ و $r = \frac{1}{10} < 1$

اذن حسب المبرهنة اعلاه المتسلسلة متقاربة .

8.9 المتسلسلة الموجبة الحدود

يُقال ان المتسلسلة اللانهائية $\sum a_n$ موجبة الحدود اذا كان $a_n>0$ لكل n.

8.10 المتسلسلة المتذبذبة Alternative Sequence

يُقال للمتسلسلة اللانهائية $\sum(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$

بأنها متذبذبة اذا كان $a_n>0$ لكل n .

8.11 مبرهنة (8-4)

المتسلسلة اللانهائية الموجبة الحدود متقاربة اذا وفقط اذا كان هناك قيد اعلى لمتتابعة مجاميعها جزئية .

البرهان : لتكن $\{S_n\}$ متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة الموجبة الحدود $\sum a_n$
.وبما ان $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$ لكل n و $a_{n+1}>0$ فأن $S_n<S_{n+1}$ لكل n اذن المتتابعة $\{S_n\}$ متزايدة واذا كان للمتتابعة $\{S_n\}$ قيد أعلى فأنها متقاربة (اذا كانت المتتابعة $\{a_n\}$ متزايدة ولها قيد علوي A فانها متقاربة

$\lim_{n\to\infty} a_n \le A$) اي ان المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة.

لتكن $\sum a_n$ متقاربة ومجموعها يساوي S من الواضح ان $S_n<S$ لجميع قيم n.
وهذا يعني ان S يُمثل قيد أعلى لمتتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$.

8.12 مبرهنة (8-5)

اذا كانت $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متقاربة و $\sum a_n = a$ و $\sum b_n = b$
فأن المتسلسلة $\sum (c_1 a_n + c_2 b_n)$ متقاربة حيث ان c_1 ، c_2 عددان حقيقيان
وان $\sum (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \sum a_n + c_2 \sum b_n$.

البرهان : بما ان $\sum_{k=1}^{n} (c_1 a_k + c_2 b_k) = c_1 \sum_{k=1}^{n} a_k + c_2 \sum_{k=1}^{n} b_k$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (c_1 a_k + c_2 b_k) = c_1 \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + c_2 \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = c_1 a + c_2 b$$

8.13 مبرهنة (8-6)

لتكن $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتابعتين بحيث ان :
$a_n=b_{n+1}-b_n \quad ; \quad n=1,2,3,\ldots..$
فأن المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة اذا وفقط اذا كان $\lim_{n\to\infty} b_n$ موجود عندئذ تكون
$\sum a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1$.

البرهان : بما ان $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k)$

$=b_2-b_1+b_3-b_2+b_4-b_3+\ldots..+b_n-b_{n-1}+b_{n+1}-b_n$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = b_{n+1} - b_1$$

وبأخذ الغاية للطرفين $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - b_1$

لذلك فأن المتسلسلة $\sum a_k$ متقاربة اذا وفقط اذا $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ موجودة وان مجموعها

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1$$

8.14 مبرهنة (8-7)

لتكن $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتابعتين ويمثل S_n المجموع الجزئي للمتتابعة $\{a_n\}$ فأن :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} S_k (b_{k+1} - b_k)$$

وتكون $\sum a_n b_n$ متقاربة اذا كانت كل من المتسلسلة $\sum S_n (b_{n+1} - b_n)$ والمتتابعة $\{S_n b_{n+1}\}$ متقاربة .

البرهان : اذا فرضنا $S_0=0$ فأن $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=1}^{n} S_k b_{k+1} + S_n b_{n+1}$$

$$= S_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} S_k (b_{k+1} - b_k)$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \lim_{n\to\infty} S_n b_{n+1} - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S_k (b_{k+1} - b_k)$$

واذا كانت المتسلسلة $\sum S_n(b_{n+1}-b_n)$ متقاربة فأن

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum S_k(b_{k+1}-b_k)$ موجود وان تقارب المتسلسلة $\{S_n b_{n+1}\}$ يعني ان

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n b_{n+1}$ موجود لذلك فأن $\sum a_k b_k$ متقاربة عندما تكون $\sum S_n(b_{n+1}-b_n)$ و $\{S_n b_{n+1}\}$ متقاربة .

8.15 اختبارات التقارب Teste Of Convergence

الاختبارات التالية يمكن بواسطتها معرفة فيما اذا كانت بعض المتسلسلات اللانهائية متقاربة او متباعدة دون اللجوء الى التعاريف السابقة.

8.16 اختبار القوى Power Test

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^p}$ تدعى متسلسلة القوى وتكون :

أ) متقاربة (Convergent) اذا كان $p>1$

ب) متباعدة (divergent) اذا كان $p\le 1$

مثال : $\sum \frac{1}{n}$

هنا $p=1$ اذن $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة حسب الاختبار p

مثال : $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

هنا $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$p=\frac{3}{2}>1 \leftarrow \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ متقاربة .

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n^3}$ متقاربة لان p=3>1

8.17 اختبار المقارنة Comparison Test

لتكن المتسلسلة $\sum u_n$ موجبة فأن :

أ) اذا كانت المتسلسلة $\sum v_n$ معلومة متقاربة وكان $\sum u_n \le \sum v_n$

فأن $\sum u_n$ متقاربة .

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

<u>الحل</u>: n(n+1)=n²+n

$n^2+n>n^2$

$$\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2} \rightarrow \sum \frac{1}{n^2+1}<\sum \frac{1}{n^2}$$

بما ان $\sum \frac{1}{n^2}$ متسلسلة متقاربة حسب اختبار p

فأن $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة حسب اختبار المقارنة

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n^2+2}$

<u>الحل</u>: $n^2+2>n^2$

$$\frac{1}{n^2+2}<\frac{1}{n^2} \rightarrow \sum \frac{1}{n^2+1}<\sum \frac{1}{n^2}$$

المتسلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب اختبار p فأن $\sum\frac{1}{n^2+2}$ متقاربة حسب اختبار المقارنة .

ب)اذا كانت المتسلسلة $\sum v_n$ متباعدة وكان $\sum u_n \geq \sum v_n$ فأن $\sum u_n$ متباعدة .

<u>مثال</u> : اختبر تقارب المتسلسلة $\sum\frac{1}{n+10}$

$$n+10\leq 11n \rightarrow \frac{1}{n+10} \geq \frac{1}{11n}$$

$$\sum\frac{1}{n+10} \geq \frac{1}{11}\sum\frac{1}{n}$$

المتسلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة حسب اختبار p اذن $\sum\frac{1}{n+10}$ متباعدة حسب اختبار المقارنة .

<u>مثال</u> : $\sum\frac{1}{3n-2}$

$$\sum\frac{1}{3n-2}=\frac{1}{3}\sum\frac{1}{n-\frac{2}{3}}$$

$$n-\frac{2}{3}\leq n \rightarrow \frac{1}{n-\frac{2}{3}} \geq \frac{1}{n}$$

$$\sum\frac{1}{n-\frac{2}{3}} \geq \sum\frac{1}{n}$$

المتسلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة حسب اختبار p اذن المتسلسلة $\sum\frac{1}{3n-2}$ متباعدة حسب اختبار المقارنة .

<u>مثال</u>: $\sum\frac{\ln n}{2n^3-1}$

$$\ln n<n \quad \_\_\_\_\_\_ \quad (1)$$

$$2n^3-1>n^3 \quad ; \quad n\geq 1$$

$$\frac{1}{2n^3-1}<\frac{1}{n^3} \_\_\_\_\_\_(2)$$

نضرب العلاقة (1) في العلاقة (2)

$$\frac{\ln n}{2n^3-1}<\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

$$\sum\frac{\ln n}{2n^3-1}<\sum\frac{1}{n^2}$$

المتسلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب اختبار p اذن $\sum\frac{\ln n}{2n^3-1}$ متقاربة حسب اختبار المقارنة .

<u>مثال</u> : $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

Ln n< n

$$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}\rightarrow\sum\frac{1}{\ln n}>\sum\frac{1}{n}$$

المتسلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة حسب اختبار p فأن $\sum\frac{1}{\ln n}$ متباعدة حسب اختبار المقارنة .

<u>مثال</u> : برهن على ان المتسلسلة $\sum\frac{1}{n^n}$ متقاربة ؟

<u>الحل</u> : $\sum\frac{1}{n^n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+.....$ لتكن $U_n=\frac{1}{n^n}$ و

$$V_n=\frac{1}{2^n}$$

$$n^n > 2^n \quad ; \quad \forall n > 2$$

$$\frac{1}{n^n} > \frac{1}{2^n} \to \sum \frac{1}{n^n} < \sum \frac{1}{2^n}$$

وبما ان المتسلسلة $\sum \frac{1}{2^n}$ هندسية فيها $a=\frac{1}{2}$ و $r = \frac{1}{2} < 1$ اي ان $\sum \frac{1}{2^n}$ متقاربة

اذن $\sum \frac{1}{n^n}$ متقاربة.

<u>مثال</u> : هل ان المتسلسلة $\sum \frac{1}{n!}$ متقاربة ؟

<u>الحل</u> : $\sum \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots..$

$$U_n = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1.2.3......n}$$

$$n! > 2^{n-1} \to \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

وبما ان $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ هندسية فيها $r = \frac{1}{2} < 1$ فهي متقاربة

اذن $\sum \frac{1}{n!}$ متقاربة حسب اختبار المقارنة .

<u>8.18 مبرهنة (8-8)</u> (غاية اختيار المقارنة)

لتكن $\sum v_n \quad , \quad \sum u_n$ متسلسلتين موجبتي الحدود :

(1) اذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c > 0$ فأن $\sum a_n$ متقاربة اذا وفقط اذا كانت $\sum v_n$ متقاربة

(2) اذا كان $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$ و $\sum v_n$ متقاربة فأن $\sum u_n$ متقاربة ايضاً

(3) اذا كان $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$ غير موجودة و $\sum v_n$ متباعدة فأن $\sum u_n$ متباعدة ايضاً.

<u>البرهان</u> : (1) بما ان $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c$ لنفرض $\in=\frac{c}{2}>0$ لذلك يوجد عدد حقيقي m بحيث ان $|\frac{u_n}{v_n}-c|<\frac{c}{2}$ لكل n>m

$$-\frac{c}{2}<\frac{u_n}{v_n}-c<\frac{c}{2}$$

$$c-\frac{c}{2}<\frac{u_n}{v_n}<c+\frac{c}{2}$$

$$\frac{c}{2}<\frac{u_n}{v_n}<\frac{3c}{2}\cdots\cdots(*)$$ لكل n>m

$$\frac{u_n}{v_n}<\frac{3c}{2}\to u_n<\frac{3c}{2}v_n \quad , \quad \forall n>m$$

فاذا كانت $\sum v_n$ متقاربة فأن $\sum u_n$ متقاربة حسب اختبار المقارنة

الان من المتراجحة (*)

$$\frac{v_n}{u_n}<\frac{2}{c}\leftarrow\frac{u_n}{v_n}>\frac{c}{2}$$

$$\therefore v_n<\frac{2}{c}a_n \quad ; \quad \forall n>m$$

فاذا كانت $\sum v_n$ متقاربة فان $\sum u_n$ متقاربة حسب اختبار المقارنة.

(2) ليكن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$ ولنختار $\in=1$ لذلك يوجد عدد حقيقي m>0 بحيث

ان $|\frac{u_n}{v_n}-0|<1 \quad ; \quad \forall n>m$

$$|\frac{u_n}{v_n}|<1 \rightarrow -1<\frac{u_n}{v_n}<1 \rightarrow \frac{u_n}{v_n}<1 \rightarrow u_n<v_n$$

واذا كان $\sum v_n$ متقاربة فأن $\sum u_n$ متقاربة حسب اختبار المقارنة .

(3)البرهان يُترك للطالب كتمرين

ملاحظة: اذا كان $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$ و $\sum v_n$ متباعدة هذا لا يعني ان $\sum u_n$ متقاربة او متباعدة .

مثال: لتكن $u_n=\frac{1}{n^2}$ و $v_n=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

ولكن $\sum v_n=\sum\frac{1}{n}$ متباعدة

حسب اختبار P و $\sum u_n=\sum\frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب اختبار P.

مثال: لتكن $u_n=\frac{1}{n}$ و $v_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ فأن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

لكن $\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$ متباعدة حسب اختبار P

و $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة حسب اختبار P.

8.19 اختبار التكامل Integral Test

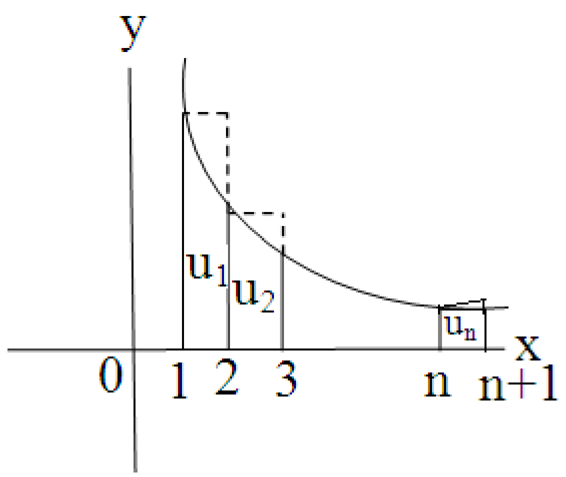
لنفرض $u_n=f(x)$ وان :

1) $f(x)$ مستمرة لجميع قيم $x\geq 1$

2)

3) $f(x)\geq 0$ (موجبة)

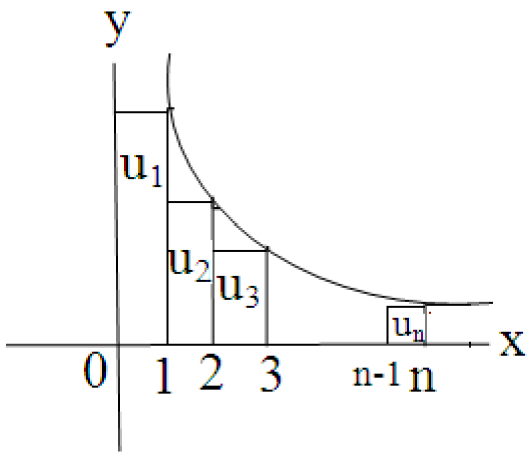
فأذا كان $\int_1^{\infty} f(x)dx$ كمية محدودة فأن $\sum u_n$ متقاربة والان فأن $\sum u_n$ متباعدة .



البرهان : من ملاحظة الشكل المجاور مثلثات المساحات u_1 ، u_2 ، u_3 تحتوي على مساحات التي تحت المنحني من $x=1$ الى اي $x=n+1$

$$u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n > \int_1^{n+1} f(x)dx$$

وفي هذا الشكل لاحظ ان



$$u_2+u_3+......+u_n<\int_1^n f(x)dx$$

وبأضافة u_1 للطرفين

$$u_1+u_2+......+u_n<u_1+\int_1^n f(x)dx$$

اي ان

$$\int_1^{n+1} f(x)dx<u_1+u_2+......+u_n<\int_1^{n1} f(x)dx$$

اذا كان التكامل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ محدداً فأن الطرف الايمن للمتراجحة اعلاه يبين

ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ محددة ايضاً .

لكن اذا كان $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ غير محددا فأن الطرف الايسر للمتراجحة يبين ان المتسلسلة غير محددة.

اذن نستنتج ان التكامل والمتسلسلة كلاهما محدد او غير محدد .

مثال : $\sum \frac{1}{n^2}$ لتكن $f(x)=\frac{1}{x^2}$

(1) f(x) مستمرة لكل $x \geq 1$

(2) $f(x) \geq 0$ موجبة

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\int_{1}^{\infty}x^{-2}dx=\frac{-1}{x}\Big]_1^{\infty}=0+1=1$$

$\therefore \sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة .

مثال : $\sum \frac{1}{n+10}$ لتكن $f(x)=\frac{1}{x+10}$

(1) f(x) مستمرة لكل $x \geq 1$

(2) f(x) موجبة

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x+10}=\ln|(x+10)|\Big]_1^{\infty}=\ln\infty-\ln 11=\infty$$

اذن المتسلسلة $\sum \frac{1}{n+10}$ متباعدة .

مثال : $\sum \frac{\ln n}{n}$ لتكن $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

(1) f(x) مستمرة لكل $x \geq 1$

(2) f(x) موجبة

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2}\Big]_1^\infty = \infty$$

اذن $\sum \frac{\ln n}{n}$ متباعدة حسب اختبار التكامل

<u>مثال</u> : اختبر متسلسلة القوى $\sum \frac{1}{n^p}$

نعرف الدالة $f(x) = \frac{1}{x^p}$

(1) f(x) مستمرة لكل x≥1

(2) f(x) موجبة

الان نحسب التكامل

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x^p} = \lim_{u\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big]_1^u = \lim_{u\to\infty}\left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right)$$

أ) عندما $p>1 \leftarrow p-1>0 \quad , \quad \lim_{u\to\infty} u^{1-p} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{u^{p-1}} = 0$

اذن $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{u\to\infty}\left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \frac{1}{p-1}$

اذن $\sum \frac{1}{n^p}$ متقاربة حسب اختبار التكامل

ب) عندما $p<1 \leftarrow 1-p>0 \quad , \quad \lim_{u\to\infty} u^{1-p} = \infty$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{u\to\infty}\left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \infty$$

اذن $\sum \frac{1}{n^p}$ متباعدة حسب اختبار التكامل

ج) عندما $p=1 \leftarrow \sum \frac{1}{n^p} = \sum \frac{1}{n}$ وهي متسلسلة توافقية متباعدة.

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n\ln n}$ لتكن $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

الدالة اعلاه مستمرة لكل x≥2

$$\therefore \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|\Big]_2^\infty = \infty$$

اذن المتسلسلة $\sum \frac{1}{n\ln n}$ متباعدة حسب اختبار التكامل

<u>مثال</u> : بين فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum ne^{-n}$ متقاربة ؟

الحل : لتكن $f(x)=xe^{-x}$ لكل x≥1

(1) f(x) مستمرة لكل x≥1

(2) F(x)>0 موجبة

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b xe^{-x}dx$$

باستتخدام التكامل بالتجزئة (by part)

$$u=x \quad \to du=dx$$

$$e^{-x}dx=dv \quad \to -e^{-x}=v$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

$$\therefore \int_{1}^{\infty} xe^{-x} = \lim_{b\to\infty}\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_{1}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}(x+1)\right]_{1}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-(b+1)}{e^{+b}} + \frac{2}{e}\right] = \frac{2}{e}$$

اذن المتسلسلة $\sum ne^{-n}$ متقاربة .

8.20 اختبار المتسلسلة المتذبذبة Alternating Series Test

المتسلسلة المتذبذبة

$$\sum(-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ...$$

$a_n>0$ تكون متقاربة اذا كان :

$$a_{n+1} \le a_n \ , \forall n \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (2)$$

8.21 مبرهنة (8-9)

اذا كان $a_n>0$ لكل n وكانت المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة للصفر و $a_{n+1}<a_n$ لكل n فأن المتسلسلة المتذبذبة $\sum(-1)^{n+1}a_n$ متقاربة واذا كان S يمثل مجموعها فأن

$0<(-1)^n(S-S_n)<a_{n+1}$

البرهان : بما ان $\sum(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$

فأن $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n})$

حيث ان $a_{n+1}<a_n$ لكل n

اذن $a_k-a_{k+1}>0$ لكل $k=1,3,.....2n-1$

اي ان المتتابعة $\{S_n\}$ رتيبة $0<S_2<S_4<S_6<.....<S_{2n}$ ------(1)

لنكتب S_{2n} بشكل اخر هو :

$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots\ldots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}$

وبما ان $a_{n+1} \le a_n \ , \forall n$ اذن $a_k-a_{k+1}>0$ لكل $k=2,4,6,\ldots\ldots,2n-2$

لذلك فأن $S_{2n}<a_1$------(2)

من العلاقتين (1) و(2) تكون $0<S_{2n}<a_1$------(3)

اذن المتتابعة S_{2n} مقيدة ورتيبة ولذلك تكون $\{S_{2n}\}$متقاربة.

لنفرض $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$ -----(4)

وبما ان $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$ فأن

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S \quad \text{-----(5)}$$

ليكن $\epsilon > 0$ ومن العلاقة (4) يوجد عدد حقيقي $m_1>0$ بحيث ان :

$|S_{2n}-S|<\epsilon$ لكل $2n>m_1$

ومن العلاقة (5) يوجد عدد حقيقي $m_2>0$ بحيث ان :

$|S_{2n+1}-S|<\epsilon$ لكل $2_{n+1}>m_2$

لنأخذ $m=\max(m_1 m_2)$

لكل $\epsilon > 0$ يكون $|S_n-S|<\epsilon$ لكل $n>m$

اذن $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

اي ان المتسلسلة $\sum(-1)^{n+1}a_n$ متقاربة واذا كان S يمثل مجموع المتسلسلة المتذبذبة المتقاربة فأن $S = \sum(-1)^{n+1}a_n$

الان بما ان $(-1)^n(S-S_n) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty}(a_{n+2+2k-1} - a_{n+2k}) > 0$

$$(-1)^n(S-S_n) = a_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty}(a_{n+2k} - a_{n+2k+1}) < a_{n+1}$$

فأن $0 < (-1)^n (S - S_n) < a_{n+1} \quad \forall n = 1,2,.....$

<u>مثال</u> : اثبت ان المتسلسلة $\sum (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ متقاربة ؟

<u>الحل</u> : نفرض $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ فأن $a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

لاحظ ان $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ اذن $a_{n+1}<a_n$ لكل n

وان $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

اذن حسب المبرهنة اعلاه المتسلسلة متقاربة

<u>مثال</u> : المتسلسلة التوافقية $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة ؟

<u>الحل</u> : نفرض $a_n = \frac{1}{n}$ فأن $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

بما ان $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n+1}$ اي ان $a_{n+1}<a_n$

وان $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

اذن المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة .

<u>8.22 التقارب المطلق والتقارب الشرطي Absolut Convergence and Conditional Convergence</u>

يقال للمتسلسلة $\sum a_n$ بأنها متقاربة مطلقة عندما تكون المتسلسلة $\sum |a_n|$ متقاربة.ويقال ان المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة شرطية عندما تكون $\sum |a_n|$ متباعدة .

<u>مثال</u> : المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة حسب المثال السابق

وبما ان $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum |a_n|$

$\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة حسب اختبار P لان ($p = \frac{1}{2} < 1$)

اذن المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة تقارباً شرطياً

<u>مثال</u> : اختبر تقارب المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ ؟

<u>الحل</u> : ليكن $a_n = \frac{1}{n^2}$ فأن $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n+1)^2} \leftarrow a_{n+1} < a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

اي ان المتسلسلة المتذبذبة متقاربة ولاختبار نوع التقارب

$$\sum \frac{1}{n^2} = \sum |a_n|$$

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب اختبار p ($p=2>1$).

اذن المتسلسلة المتذبذبة متقاربة تقارب مطلق .

<u>8.23 مبرهنة (8-10)</u>

اذا كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة تقارباً مطلقاً فأنها متقاربة .

<u>البرهان</u> : بما ان المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة مطلقة .

اي ان المتسلسلة $\sum |a_n|$ متقاربة

اذن يكون لكل $\in > 0$ يوجد عدد حقيقي $m > 0$ بحيث ان :

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}| < \in \quad ; \forall n$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}|$$

اذن لكل $\in > 0$ يوجد عدد حقيقي $m > 0$ بحيث ان :

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \in \quad ; \forall n > m$$

اي ان المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة

8.24 اختبار النسبة Ratio Test

في المتسلسلة $\sum a_n$ اذا كان $a_n \neq 0$ لكل قيم و $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ فأن

(1) اذا كان $\rho < 1$ فأن $\sum a_n$ متقاربة مطلقة.

(2) اذا كان $\rho > 1$ فأن $\sum a_n$ متباعدة .

(3) اذا كان $\rho = 1$ فأن الاختبار يفشل .

<u>مثال</u> : اختبر تقارب المتسلسلة $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{4.2^4} + ...$

<u>الحل</u> : يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n.2^n}$

نستخدم اختبار النسبة

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad , \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)2^{n+1}} \; ; a_n = \frac{(1-)^{n+1}}{n.2^n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)2^{n+1}} - \frac{n.2^n}{(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-n}{2(n+1)} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

اذن المتسلسلة متقاربة مطلقة .

مثال : $\sum \frac{(-1)^{n+1} n^3}{(n+1)!}$

الحل : نطبق اختبار النسبة

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(n+1)^3}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1} . n^3} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-(n+1)^3}{(n+2)(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^3} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \right| \left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} \right| = 0 < 1$$

اذن المتسلسلة متقاربة مطلقة .

مثال : اختبر تقارب متسلسلة $\sum \frac{2^n}{n^2}$

الحل : باستخدام اختبار النسبة

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} \right|$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \right| = 2 > 1$$

اذن المتسلسلة متباعدة .

مثال : $\sum \frac{1}{n^2}$

الحل : باستخدام اختبار النسبة

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)^2} . n^2 \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 1$$

يفشل الاختبار .
اذن نستخدم اخر وليكن اختبار P.

$\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة لان (p=2>1)

مثال : هل ان المتسلسلة $\sum (-1)^{n+1} \frac{n^2}{3^n}$ متقاربة ؟

الحل : $|a_n| = \frac{n^2}{3^n} \, , |a_{n+1}| = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \right| = \frac{1}{3} < 1$$

اذن المتسلسلة متقاربة مطلقة .

8.25 اختبار الجذر Root Test

لتكن $\sum a_n$ اي متسلسلة وان $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ فأن $\sum a_n$ تكون :

(1) متقاربة مطلقة اذا كان L<1
(2) متباعدة اذا كان L>1 او L=∞
(3) يفشل الاختبار اذا كان L=1

مثال : المتسلسلة $\sum \frac{2^{2n}}{n^n}$

الحل : $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0 < 1$

اذن المتسلسلة $\sum \frac{2^{2n}}{n^n}$ متقاربة مطلقة

<u>مثال</u> : $\sum (n+1)^n$

<u>الحل</u> :باستخدام اختبار الجذر

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty > 1$$

اذن المتسلسلة متباعدة

<u>مثال</u> : اختبر تقارب المتسلسلة $\sum \frac{n!(-1)^{n-1}}{1.3.5.....(2n-1)}$

<u>الحل</u> : باستخدام اختبار النسبة

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(-1)^n}{3.5.7.....(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1.3.5.....(2n-1)}{n!(-1)^{n-1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2n+1}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

اذن المتسلسلة متقاربة مطلقة .

<u>مثال</u> : المتسلسلة $\frac{1}{3} - \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} - \frac{4!}{3^4} + ...$

<u>الحل</u> : يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل $\sum \frac{n!}{3^n}$

وباستخدام اختبار النسبة

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!}\right| = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty > 1$$

اذن المتسلسلة متباعدة .

8.26 متسلسلة القوى Power Series

متسلسلة القوى حول النقطة a هي متسلسلة دوال تكون صيغتها عند كل عدد حقيقي x بالشكل الاتي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$ حيث ان a عدد ثابت يسمى مركز مفكوك المتسلسلة

وان الاعداد a_n هي معاملات متسلسلة القوى ، واضح ان المتسلسلة اعلاه تكون متقاربة دائماً الى القيمة a_0 عندما x=a .

قد تكون المتسلسلة اعلاه متقاربة فقط عند هذه النقطة او قد تكون متقاربة عند جميع قيم x .

فاذا لم تتحقق احدى هاتين الحالتين ، تكون هنالك وجود لعدد موجب I بحيث تكون المتسلسلة متقاربة .

عندما $|x-a|<I$ ومتباعدة عندما $|x-a|>I$.

العدد الثابت I يدعى نصف قطر دائرة التقارب للمتسلسلة .

وتُدعى الفترة (a-I,a+I) بفترة تقارب المتسلسلة .

عندما $|x-a|=I$ فأن المتسلسلة قد تكون متقاربة او متباعدة ويمكن ايجاد نصف قطر تقارب متسلسلة القوى باستخدام اختبار النسبة بوضع $I=\rho$

<u>مثال</u> : جد فترة تقارب المتسلسلة $\sum x^n$

<u>الحل</u> : $a_n = x^n$ ، $a_{n+1} = x^{n+1}$

$$I = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| < 1$$

اي ان $-1<x<1$

الان للتحقق عندما x=1 , x=-1

عندما x=1 ← $\sum x^n = \sum (1)^n$ المتسلسلة متباعدة

عندما x=-1 ← $\sum x^n = \sum (-1)^n$ المتسلسلة متباعدة

اذن فترة التقارب هي (-1,1)

<u>مثال</u> : جد قيم x التي تجعل المتسلسلة $\sum (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ متقاربة ؟

<u>الحل</u> :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n)} = 0$$

اذن المتسلسلة متقاربة لكل قيم x .

<u>مثال</u> : جد فترة تقارب المتسلسلة $\sum \frac{3^n x^n}{n^2}$ ؟

<u>الحل</u> : باستخدام اختبار النسبة

$$I = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{3^n.x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3xn^2}{(n+1)^2}\right| = 3|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 3|x|<1$$

$$3|x|<1 \rightarrow |x|<\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$$

عندما $x=\frac{1}{3}$ فأن $\sum \frac{3^n.\frac{1}{3^n}}{n^2} = \sum \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب اختبار p(p=2>1)

وعندما $x=-\frac{1}{3}$ فأن $\sum \frac{3^n.\frac{(-1)^n}{3^n}}{n^2} = \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ متسلسلة متذبذبة وهي متقاربة لان $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|$ متقاربة

اذن فترة التقارب هي $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$

<u>مثال</u> : جد فترة تقارب المتسلسلة

$$2(x-3)+2^2.2^2(x-3)^2+2^3.3^2(x-3)^2+2^4.4^2(x-3)^4+.....$$

<u>الحل</u> : يمكن كتابة الشكل العام للمتسلسلة أعلاه كالاتي : $\sum 2^n n^2(x-3)^n$

$$I=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)^2(x-3)^{n+1}}{2^n.n^2(x-3)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(x-3)(n+1)^2}{n^2}\right|$$

$$=2|x-3|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=2|x-3|<1$$

$$3-\frac{1}{2}<x<3+\frac{1}{2}$$

نصف قطر التقارب I=1/2 $\quad \frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$

عندما $x=\frac{5}{2}$ المتسلسلة

$$\sum 2^n(n^2)(x-3)^n=\sum(-1)^n n^2=-1+2^2-3^2+.....+(-1)^n n^2+.....$$

وهي متباعدة

وعندما $x=\frac{7}{2}$ فأن المتسلسلة

$$\sum 2^n(n^2)(x-3)^n=\sum 2^n n^2(\frac{1}{2})^n=\sum n^2=1+2^2+3^2+.....+n^2+.....$$

وهي متباعدة ايضاُ

اذن فترة التقارب هي $\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$

8.27 متسلسلة تايلور وماكلورين Taylor &Maclourin Series

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق لانهائياً عند x=c ، اي انه توجد مشتقات $f^{(n)}(c)$ لكل قيم n الصحيحة الموجبة ، ان متسلسلة تايلور لـf حول c هي متسلسلة القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots\ldots \qquad (1)$$

حيث ان $a_n = \dfrac{f^n(c)}{n!}$ لكل قيم n .

لاحظ ان $f^{(0)}$ هي القيمة الوسطى للدالة f نفسها ، بحيث ان $a_0=f(c)$

ان متسلسلة ماكلورين لـf هي متسلسلة تايلور لـf حول الصفر اي متسلسلة القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots \qquad (2)$$

حيث ان $a_n = \dfrac{f^n(0)}{n!}$ لكل قيم n .

<u>مثال</u> : جد متسلسلة ماكلورين لـe^x وفترة التقارب ؟

<u>الحل</u> : لتكن $f(x)=e^x$ الان نحسب قيم المشتقات عند x=0

$$f(x)=e^x \quad ; \quad f(0)=1$$
$$f'(x)=e^x \quad ; \quad f'(0)=1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f^n(x)=e^x \quad ; \quad f^n(0)=1$$

نعوض في المتسلسلة (2) اعلاه :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ولايجاد فترة التقارب نستخدم اختبار النسبة

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

اذن المتسلسلة متقاربة لكل قيم x.

<u>مثال</u> : جد متسلسلة ماكلورين لـ f(x)=sinx ثم جد فترة التقارب للمتسلسلة؟

<u>الحل</u> :
$f(x)=\sin(x) \quad ; \quad f(0)=0$
$f'(x)=\cos x \quad ; \quad f'(0)=1$
$f''(x)=-\sin x \quad ; \quad f''(0)=0$
$f'''(x)=-\cos x \quad ; \quad f'''(0)=-1$
$f^{(4)}(x)=\sin x \quad ; \quad f^{(4)}(0)=0$
$f^{(5)}(x)=\cos x \quad ; \quad f^{(5)}(0)=1$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.. = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

وهي متقاربة لجميع قيم x (بتطبيق اختبار النسبة)

<u>مثال</u> : جد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ؟

<u>الحل</u> : $f(x)=\dfrac{1}{1-x} \quad ; \quad f(0)=1$

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \quad ; \quad f'(0)=1$$

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3} \quad ; \quad f''(0)=2$$

$$f'''(x)=\frac{3.2}{(1-x)^4}=\frac{3!}{(1-x)^4} \quad ; \quad f'''(0)=3.2=3!$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{4.3.2}{(1-x)^5}=\frac{4!}{(1-x)^5} \quad ; \quad f^{(4)}(0)=4.3.2=4!$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{5.4.3.2}{(1-x)^6}=\frac{5!}{(1-x)^6} \quad ; \quad f^{(5)}(0)=5.4.3.2=5!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad ; \quad f^{(n)}(0)=n!$$

$$f(x)=1+x+2!x^2+3!x^3+4!x^4+5!x^5+\ldots..+n!x^n+\ldots..$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n (n!)$$

مثال : جد متسلسلة تايلور للدالة $f(x)=\ln x$ حول النقطة a=1 ؟

الحل : $f(x)=\ln x \quad ; \quad f(1)=0$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \quad ; \quad f'(1)=1$$

$$f''(x)=\frac{-1}{x^2} \quad ; \quad f''(1)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2}{x^3} \quad ; \quad f'''(1)=2$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \quad ; \quad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

نعوض في العلاقة (1)

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + ...$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n (-1)^{n-1}}{n}$$

ولايجاد فترة التقارب

$$\lim_{n\to\infty} = \left| -\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x-1| = |x-1| < 1$$

-1<x-1<1

0<x<2

عندما x=0 :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n-1}}{n} = \sum \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum \frac{1}{n}$$

وهي متباعدة

عندما x=2 :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n (-1)^{n-1}}{n} = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

وهي متقاربة حسب اختبار المتسلسلة المتذبذبة

اذن فترة التقارب [0,2)

<u>مثال</u> : جد متسلسلة تايلور للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ حول x=1 ؟

<u>الحل</u> : $f(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f(1) = 1$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad ; \quad f'(1) = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad ; \quad f''(1) = 2 = 2!$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \quad ; \quad f'''(1) = -6 = -3!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5} \quad ; \quad f^{(4)}(1) = 24 = 4!$$

$$\therefore f(x) = f(a) + (x-a)f'(x) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(x) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(x) + ...$$

$$= 1 - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!}(2!) - \frac{(x-1)^3}{3!}(3!) + \frac{(x-1)^4}{4!}(4!) + ...$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + ... + (-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}$$

∑∑

أسئلة الفصل الثامن

س1: بين اي المتسلسلات التالية متقاربة وايها متباعدة ، ثم جد الغاية لكل منها :

(a) $a_n = \dfrac{2n+1}{1-3n}$	(b) $a_n = 1+(-1)^n$
(c) $a_n = \dfrac{n^2-n}{2n^2+n}$	(d) $a_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{n}$

س2: جد المجموع الجزئي لكل من المتسلسلات التالية ، ثم تحقق من تقارب او تباعد كل منها ؟ وجد مجموعها عندما تكون متقاربة ؟

(a) $\sum \ln \dfrac{n}{n+1}$

(b) $\sum \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(c) (c) $\sum \dfrac{2n}{n^2(1+n)^2}$

س3: اختبر تقارب المتسلسلات التالية :

(a) 0.383838…..

(b) 2.0474747…..

س4: اختبر تقارب المتسلسلات التالية :

(a) $\sum \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$	(b) $\sum \dfrac{1}{n^3-1}$	(c) $\sum \dfrac{n}{n^2+1}$
(d) $\sum \dfrac{n}{e^n}$	(e) $\sum \dfrac{2n^2}{3n^3+1}$	(f) $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$

$\sum \frac{\frac{1}{e^n}}{n^2}$ (i)	$\sum n^2 e^{-n}$ (h)	$\sum \frac{\ln n}{n^2+1}$ (g)
$\sum (-1)^n \frac{e^n}{n}$ (l)	$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ (k)	$\sum (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n}$ (j)
		$\sum (-1)^n \frac{n}{2^n}$ (m)

س5: هل ان المتسلسلات التالية متقاربة ام لا؟واذا كانت متقاربة بين نوع تقاربها؟

$\sum (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$ (c)	$\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ (b)	$\sum (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$ (a)
$\sum n^2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$ (f)	$\sum \frac{(2n)!}{n^{100}}$ (e)	$\sum \frac{n^2}{n!}$ (d)
	$\sum \frac{\sin^2 n}{2^n}$ (h)	$\sum \frac{(-1)^{n-1} n!}{10^n}$ (g)

س6: جد فترة تقارب المتسلسلات التالية :

$\sum \frac{(x-1)^n}{n+1}$ -2	$\frac{x}{1(2)} - \frac{x^2}{2(2^2)} + \frac{x^3}{3(2^3)} - \frac{x^4}{4(2^4)} + ...$ -1
$\sum \frac{x^n}{n!}$ -4	$\frac{x-5}{1(3)} - \frac{(x-5)^2}{2(3^2)} + \frac{(x-5)^3}{3(3^3)} - \frac{(x-5)^4}{4(3^4)} + ...$ -3
$\sum (-1)^n n^2 x^n$ -6	$\sum (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n}$ -5
	$\sum \frac{1.3.5.....(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6.....2n(2n+1)}$ -7

س7: جد متسلسلة ماكلورين للدوال التالية ؟

$f(x)=\ln(1+x)$ -2	$f(x)=\cos x$ -1
$f(x)=\tan^{-1}x$ -4	$f(x)=\sin^{1-}x$ -3

س8: جد متسلسلة تايلر للدوال التالية ثم جد فترة التقارب المتسلسلة ؟

(1) $f(x)=e^x$ ، $a=c$

(2) $f(x)=\ln x$ ، $a=2$

(3) $f(x)=\cos x$ ، $a=-\pi/4$

(4) $f(x)=\sqrt{x}$ ، $a=4$

(5) $f(x)=\cos x$ ، $a=\pi/3$

س9: اختبر تقارب المتسلسلة التالية : $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\frac{9}{25}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}$

س10: اختبر تقارب المتسلسلة التالية : $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$

س11: اوجد متسلسلة تايلور للدالة $f(x)=\ln(x)$ حول x_0 حيث $x_0=e$ ؟

س12: اكتب الكسور العشرية المعطاة كمتسلسلة لانهائية ؟ ثم اوجد مجموعها ؟ ثم استخدم المجموع للتعبير عن الكسر العشري بعدد قياسي ؟

1) 0.013013013….. 2) 0.212121…. 3) 0.49999…..

4) 0.36717171….. 5) 0.125125125….. 6) 0.22222…..

س13:برهن انه لا يمكن لمتوالية معينة $\{a_n\}$ان تتقارب الى نهايتين مختلفتين ؟

س14: برهن انه اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متسلسلة موجبة وكان c ثابتاً موجباً فأن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ تكون كلاهما متقاربة او كلاهما متباعدة ؟

س15: برهن انه اذا كانت المتتالية اللانهائية المحدودة متزايدة او متناقصة فأنها تكون متقاربة ؟

س16: برهن ان اختبار الجذر يفشل في تحديد تقارب او تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ عندما يكون $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ ؟

س17: استخدم اختبار النسبة لبحث تقارب المتسلسلة :

$$\frac{2}{5} + \frac{2.5}{5.8} + \frac{2.4.6}{5.8.11} + \ldots + \frac{2.4.....(2n)}{5.8....(3n+2)} + ...$$

س18: برهن ان المتتالية المتقاربة يجب ان تكون مقيدة ؟ وهل العكس صحيح ، برهن صحة جوابك ؟

س19: اذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ فأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة ؟

س20: اي متتالية هندسية تكون متقاربة ؟

س21: اذا كانت a_n متتالية مقيدة ، فأن كل متتالية جزئية من a_n تكون مقيدة؟

س22: هل العبارات التالية صحيحة ام خاطئة ؟ برهن صحة جوابك ؟

أ- اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ تكون متقاربة ايضاً ؟

ب- اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ متقاربة فأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة ايضاً ؟

ج- اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة فأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ تكون متباعدة ايضاً ؟

س23: اثبت ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$ متقاربة شرطاً ؟

س24: احسب قيمة $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-\frac{1}{n^2})$

س25: ناقش تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\ \ +4}$

فيما يلي جدول بالرموز المستخدمة في الكتاب :

الرمز	اللفظ او المعنى	الرمز	اللفظ او المعنى
{ }	اقواس المجموعات	∀	لكل
ϵ ، ∈	ينتمي	⇒	يؤدي
∉	لا ينتمي	⇔ ، ⟷	اذا وفقط اذا
ϕ	فاي، للمجموعة الخالية	≠	لا يساوي
Φ	مجموعة خالية	|	حيث ان
>	اكبر من	⊂	مجموعة جزئية فعلية
<	اصغر من	⊄	ليست مجموعة جزئية
| |	قيمة مطلقة	⊆	مجموعة جزئية
=	يساوي	A^c	مجموعة متممة
Π	باي ، النسبة الثابتة	∃	يوجد
N	الاعداد الطبيعية	ℜ او R	الاعداد الحقيقية
U	المجموعة الشاملة	R^{-1}	العلاقة العكسية
⋃	اتحاد المجموعات	Z	الاعداد الصحيحة
⋂	تقاطع المجموعات	∴	اذن
≥	اكبر او يساوي	∋	حيث ان
≤	اصغر او يساوي	∞	مالانهاية
Θ	عملية حسابية	δ	دلتا
*	عملية ثنائية	Lim	غاية
⊕	عملية الجمع	ln	لوغريتم طبيعي
e^-	عنصر محايد	Sinx	جيب x
e'	عنصر محايد	Cosx	جيب تمام x
Q	الاعداد النسبية	Max	اكبرقيمة
I	الاعداد غير النسبية	min	اصغر قيمة
∑	المجموع	$\sqrt{\ }$	جذر تربيعي
$\|X\|$	المعيار	o	تركيب العلاقات

المصادر

المصادر العربية :

(1) الدكتور موراي ر شبيجل ، "ملخصات شوم :نظريات ومسائل في التفاضل والتكامل المتقدم "، لندن ، دار ماكجروهيل للنشر ، 1977.

(2) الرياضيات للصف الرابع العلمي ، المديرية العامة للمناهج ،الطبعة الرابعة،2011.

(3) الرياضيات للصف السادس العلمي ، المديرية العامة للمناهج ، الطبعة الثانية،2011.

(4) العاني ،صبري رديف والكتبي ، سليم حسن ،"التحليل الرياضي للادارة والاقتصاد"، مطبعة جامعة البصرة ،1982.

(5) الغرابي ،سليم اسماعيل والبياتي ، عادل زنيل ،الدوال المركبة ، بغداد:وزارة التعليم العالي والبحث العلمي ،1983.

(6) د.عبد المجيد ،باسل عطا ود.نعوم ، عادل غسان ود. بابام ، محمد صالح " مقدمة في نظرية الزمر"، مطابع التعليم العالي ،1982.

(7) د. علي ، علي عزيز والحسوان ، عبد الرزاق علي وجواد ، نبيهة محمد،"الرياضيات المنتهية لطلبة الصف الاول احصاء في كلية الادارة والاقتصاد، جامعة الموصل ، 1979.

(8) د.مصطفى ،هادي جابر ونعوم ،رياض شاكر ومنصور ، نادر جورج،"اسس الرياضيات "، جامعة البصرة ،1983.

(9) سعد الله ،د.أ ابو بكر خالد ،التحليل الرياضي ، الجمهورية الجزائرية، وزارة التربية ، الموقع على الانترنت http//www.infpe.edu.dz ،2008/2007.

(10) فرانك ايرزمونيور و اليوت مندلسون ،"حساب التفاضل والتكامل"، اكاديميا انترناشيونال ،2001.

(11) قدسي ، ايلي ابراهيم ،الرياضيات العامة لطلبة الاقتصاد والعلوم الادارية،عمان :دار حنين ،1997

(12) لوقا ، باسل يعقوب ، "طرق في الرياضيات التطبيقية " ، مطابع التعليم العالي ،1989.

(13) نعوم ، عادل غسان ،"مقدمة في التحليل الرياضي"، مطابع التعليم العالي،1981.

<u>المصادر الاجنبية :</u>

(1) Apostol, T. ; Mathematical Analysis,Addision Wesley publishing Co.Mass.,1957.

(2) Durfee; William H. ;Calculus And Analytic Geometry , M C Graw –Hill Book Co.,1971

(3) Evans M. Harrell II and James V. Herod , Linear Methods of Applied Mathematics ,Orthogonal series, boundary-value problems, and integral operators,1996.

(4) Macolm R.Adoms. An Introduction to Mathematical Analysis.

(5) Rotman. Jo seph J.The Theory of Groups .Allyn and Bacon, Inc. ,Boston, U.S.A.1965.

(6) Tex, DVIPS, xdvi, PDFTeX, xpdf, nedit, XFig, epstopdf, pstoe , The Calculus of Functions of Several Variables ,2007.

(7) Thomas ; Calculus And Analytic Geometry , Fourth Edition.,1968.

(8) WWL Chen and XT Duong, lementary Mathematics , 1999.

رقم الايداع في دار الكتب والوثائق الوطنية في بغداد
393 لسنة 2019 ISBN
طبع في مطبعة البصرة التحسينية
07802167230

ADVANCED MATHEMATICS FOR STUDENTS OF THE COLLEGE OF MANAGEMENT AND ECONOMICS

رقم الايداع في دار الكتب والوثائق الوطنية في بغداد
393 لسنة 2019 ISBN
طبع في مطبعة البصرة التحسينية
07802167230