أساسيات المصفوفات والمعادلات التفاضلية والهندسة في المجال النيتروسوفيكى Fundamentals of matrices, differential equations, and geometry in the neutrosophic field

A. A. Salama
Port Said University

Malath F. Al-Aswad
Albaath university

Dr.Huda E. Khalid
University of Telafer

Rafif Elhbebib
Science

Neutrosophic Science
International Association (NSIA)

أساسيات المصفوفات والمعادلات التفاضلية والهندسة في المجال النيتروسوفيكى

FUNDAMENTALS OF MATRICES, DIFFERENTIAL EQUATIONS, AND GEOMETRY IN THE NEUTROSOPHIC FIELD

أعضاء الفريق البحثى العربى لتطبيقات وعلوم النيتروسوفيك
مصر – سوريا – العراق - تركيا

تأليف

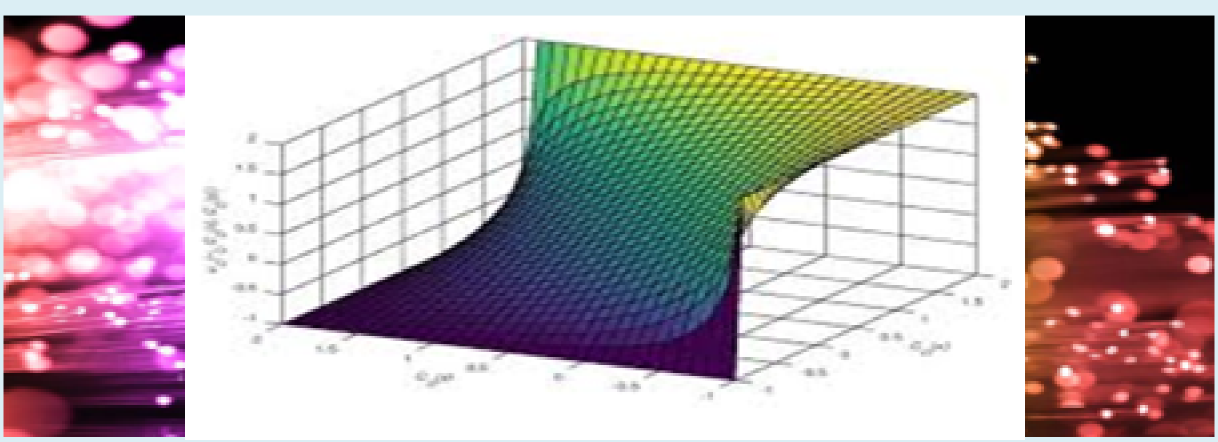
د. أحمد سلامة   د. ملاذ الأسود

د. أحمد خطيب

المراجعة العلمية

د. هدي إسماعيل   د. ميسم جديد

د. رفيف الحبيب   د. إبراهيم ياسر



ISBN 978-1-59973 -726 - 3

أساسيات المصفوفات والمعادلات التفاضلية والهندسة فى المجال النيوتروسوفيكي

تأليف

د. أحمد سلامة   د. أحمد خطيب

د. ملاذ الأسود

ISBN 978-1-59973-726-3

9 781599 737263 >

Educational Publisher
1091 West 1st Ave
Grandview Heights, Ohio 43212
United States
E-mail: info@edupublisher.com
Website: www.EduPublisher.com

تقديم الكتاب

يهتم منطق النيتروسوفيكك بدراسة الحالات التي لايمكن الحكم عليه بصح مطلق أو خطأ مطلق أي حالات اللاتحديد ، بمعنى أخر يأخذ الصح بدرجات والخطأ بدرجات وكذلك اللاتحديد، وإن كل حقل من حقول المعرفة تملك جزئها النيوتروسوفيكي ذلك الجزء الذي يحوي اللاتحديد.

تمت ولادة منطق النتروسوفيكي على يد البروفيسور الأمريكي فلورنتين سمارانداكه الذي قدمه كتعمميم للمنطق الضبابي ، وامتدادا لنظرية الفئات الضبابية .

إن التعبير عن عبقرية الإنسانية الممثلة بالبروفيسور سمارانداكه ومنطقه الجديد، وفكرة هذا الكتاب لأحد تطبيقات المنطق الجديد ، في الجبر وهو الجبر النتروسوفيكي ، إن الاسس التي وضعها البروفيسور فلورنتين للمنطق الجديد أثار العديد من التساؤلات في جميع المجالات، ووضع بصمة في عقول العلماء والباحثين من خلال دراستهم لهذا الفكر الجديد، ومن خلال الأبحاث والكتب، التي تم نشرها في جميع مجالات العلم باستخدام هذا المنطق كما فعل فريق العمل من جامعتي (غازي عينتاب_ تركيا وتشرين_ سوريا) بمشاركة سمارانداكه وأحمد سلامة حيث قاموا بوضع اسس جديدة للعديد من العلوم في الرياضيات وعلوم الحاسب ونخص بالذكر الجبر الخطي، ويعتبر هذا الكتاب المرجع الأول ومن الأعمال المهمة التي تعرض بعض مواضيع الجبر الخطي وفق منطق النيتروسوفيك باللغة العربية ، ويعود السبب في ذلك الى تعدد استخدامات مواضيع علم الجبر في جميع مجالات العلم .

وقبل الختام نود أن نتقدم بخالص الشكر والاحترام والتقدير إلى كل من ساهم في مشروع تأليف هذا الكتاب. كما نتقدم بخالص الشكر والتقدير لكل من ساعد في المراجعة اللغوية وإخراج هذا الكتاب إلى النور. كما نتمنى من الله سبحانه وتعالى أن ينفع به طالبي العلم في وطننا العربي على جميع مستوياتهم الأكاديمية والعلمية والثقافية.

والله من وراء القصد

المؤلفون

2022

الفهـــــرس

الفصل الأول

بعض المفاهيم الأساسية في منطق النيتروسوفيك

مقدمة:

تتسم أحداث العالم الذي يحيط بنا ووقائعه بالتناقض والغموض واللاتحديد ،لأن كل قضية يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة أو مبهمة لايمكن أن نحدد إن كانت صادقة أو كاذبة أي غير محددة (لاتحديد) ، لذلك برزت حاجتنا لمنطق جديد يعكس حقيقة رؤيتنا النسبية لهذا الواقع. فكان المنطق منطق النتروسوفيك، المنطق الذي أسسه العالم الأمريكي Smarandache عام 1995 والذي يدرس ويهتم بحالات اللاتحديد إن هذا المنطق يأخذ كل فكرة مع نقيضها ومع طيف من اللاتحديد ، حيث يأخذ هذا المنطق كل بيان بثلاث أبعاد هي الصح (T) بدرجات والخطأ (F) بدرجات والحياد (I) بدرجات، ويمكننا أن نعبر عن ذلك بالشكل (T, I, F) وهذا يعطي وصفاً أدق من المنطق الضبابي والمنطق الكلاسيكي و انبثق عن هذا المنطق المجموعات النتروسوفيكية الهشة كتطوير لنظرية المجموعات الكلاسيكية على يد البروفيسور المصري أحمد سلامة A.A.Salama ، حيث قدم أحمد سلامة عام 2013 دراسة حول مفهوم النقط النتروسوفيكية الهشة وعرف مفهوم انتماء عنصر ما لمجموعة نتروسوفيكية هشة, وقدم سلامة ورفيف وميسم مع أخرون العديد من المفاهيم النيتروسوفيكية فى مجالات علوم الحاسب والإحصاء ونظم المعلومات وإتخاذ القرار والنمذجة وبحوث العمليات كما فى المراجع [48−39]

$1-1$. تعاريف ومفاهيم أساسية في النيوتروسوفيك:

إذا كانت a و b طرفي فترة ما، وكنا لا نعلم أيا منهما هي الأكبر عندها يكون $[a, b] = [b, a]$ وكذلك بالنسبة للحالة التي تملك فيها الفترة نهايات متفاوتة من اليمين ومن اليسار أي تكتب بالصيغة $[f(x), g(x)]$ حيث نجد أنه لبعض القيم الأكيدة من (x) تكون $f(x) < g(x)$

ولقيم أخرى من (x) تكون $f(x) > g(x)$.

تعريف $(1.1.1)$: تحليل الفترات:

في تحليل الفترات تكون العناصر عبارة عن فترات بدلاً من الأرقام التقليدية المتعارف عليها، والمقصود من دراسة تحليل الفترات هو التقريب بالزيادة أو النقصان للأخطاء الناتجة عن العمليات الحسابية وعلى ذلك فإن الخطأ يتم تحديده بفترة مغلقة.

تعريف $(2.1.1)$: تحليل المجموعات:

في التعريف السابق لتحليل الفترات إذا قمنا باستبدال الفترات المغلقة التي كانت بشكل فترات بمجموعات سنحصل على تعريف تحليل المجموعة.

تعريف $(3.1.1)$: التحليل النيوتروسوفيكي:

يمكن اعتبار التحليل النيوتروسوفيكي تعميماً لكلا التحليلين السابقين (تحليل الفترات وتحليل المجموعات)، حيث أن التحليل النيوتروسوفيكي يتعامل مع كل أنواع المجموعات (ليس فقط الفترات)، فضلاً عن تلك الحالة عندما يكون هناك بعض اللاتحديد (علماً أن اللاتحديد قد يكون في المجموعات أو الدوال أو مفاهيم أخرى معرفة على هذه المجموعات).

عندما نتعامل مع العناصر كمجاميع بدون وجود اللاتحديد، عندها سيكون التحليل النيوتروسوفكي مطابقاً لتحليل المجموعة، ولو تم التعامل مع العناصر بشكل فترات فقط بدلاً من المجموعات ولم يكن هناك لاتحديد عندها سيكون التحليل النيوتروسوفكي مطابق لتحليل الفترات، هذا واذا كان هناك بعض اللاتحديد عند استخدام المجموعات سيتحول التحليل عندئذٍ إلى تحليل نيوتروسوفكي.

$1-2$. أمثلة حول التحليل النيوتروسوفكي:

مبدأ حساب التفاضل والتكامل النيوتروسوفكي وحساب التفاضل والتكامل النيوتروسوفكي يختلفان عن تحليل المجموعات، لأنهما لا يستخدمان اللاتحديد، كمثال دعونا ننظر الدوال الآتية:

مثال $(1.2.1)$:

$$f(0\ or\ 1) = 7$$

هنالك لاتحديد خاص بمنطلق الدالة أي أننا غير متأكدين فيما إذا كانت:

$$f(0) = 7\ or\ f(1) = 7$$

مثال $(2.2.1)$:

$$f(2) = 5 \ or \ 6$$

هنالك لاتحديد خاص بمستقر الدالة أي أننا غير متأكدين هل

$$f(2) = 5 \ or \ f(2) = 6$$

وبصورة أكثر تعقيدا:

$$f(-2 \ or -1) = -5 \ or \ 9$$

هنالك لاتحديد خاص بكل من المنطلق والمستقر للدالة أي أن:

$$f(-2) = -5 \ or \ f(-2) = 9 \ or \ f(-1) = -5 \ or \ f(-1) = 9$$

وبصورة عامة فإن:

$$f(a_1 \ or \ a_2 \ or \ \dots or \ a_m) = b_1 \ or \ b_2 \ or \dots or \ b_n$$

$\mathbf{1-3}$. أمثلة في تحليل المجموعة:

مثال $(\mathbf{1.3.1})$:

الدالة $f: R \to R$ تختلف في منطلقها عن الدالة g الآتية:

$$g: R^2 \to R \quad ; \quad g(\{0,1\}) = 7$$

كما نجد الدالة $g: R \to R$ تختلف في مستقرها:

$$g: R \to R^2; \ g(2) = \{5,6\}$$

أيضاً نرى الدالة $f: R \to R$ تختلف في منطلقها ومستقرها حيث:

$$g: R^2 \to R^2; \ g(\{-2,-1\}) = \{-5,9\}$$

وكحالة عامة فإن الدالة $f: R \to R$ تختلف في منطلقها ومستقرها عن الدالة $g: R^m \to R^n$ حيث:

$$g: R^m \to R^n;\ g(\{(a_1, a_2, \dots, a_m)\}) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

ومن الحقائق المعروفة أن أي مجموعة يمكن أن تكون محتواه في فترة مغلقة، ومع ذلك فإن التعامل مع الفترات الأوسع يكون أصعب من التعامل مع المجموعات المحدودة، حيث يعطى نتائج عامة، بل الأكثر من ذلك فإنها تكون غير دقيقة.

والطريقة النيوتروسوفيكية التي تستخدم مجموعات أصغر محتواه داخل فترات، هي طريقة أكثر دقة من تحليل الفترات.

$1-4$. أمثلة في تحليل الفترات:

نستطيع القول إن التحليل النيوتروسوفيكي يتعامل مع المجاميع التي تحوي لا تحديد، مثال ذلك نجد العنصر $x(t,i,f)$ ينتمي بشكل جزئي لمجموعة S وأيضاً العنصر نفسه لا ينتمي بشكل جزئي للمجموعة S ومن جهة أخرى فإن هذا العنصر يحمل بعض اللاتحديد حيث تكون درجة انتماء العنصر x إلى المجموعة S غير محدد، نقصد بذلك أننا لا نملك أدنى فكرة عما إذا كان عنصر معين مثل $y(0,1,0)$ ينتمي أو لا ينتمي إلى المجموعة (تمام اللا تحديد)؟، أو قد نعني أنه يوجد عنصر ينتمي إلى المجموعة S ولكننا لا نستطيع تحديد طبيعتها. إن كلاً من تحليل الفترات وتحليل المجموعات عاجزين عن التعامل مع هذا النوع من الانتماء.

لنفرض أنه لدينا الفترة الآتية $L = \left[0, 5_{(0.6,0.1,0.3)}\right[$ حيث إن العدد $5_{(0.6,0.1,0.3)}$ هو اللاتحديد ويعطى بالشكل $5_{(0.6,0.1,0.3)}$ بمعنى ان العدد 5 ينتمي جزئياً بدرجة (0.6) للفترة L، وفي الوقت نفسه لا ينتمي بشكل جزئي للفترة L بدرجة (0.3)، كما يكون للعدد 5 درجة لا تحديد في الانتماء إلى الفترة L بدرجة (0.1).

$L \neq [0,5]$ و $L \neq [0,5)$. ولكنها تقع بين الفترتين. $[0,5]$ و $[0,5)$.

أي أن:

$$[0,5) \subset L \subset [0,5]$$

وذلـــك لأن العنصـــر 5 لا ينتمـــي إلـــى الفتـــرة (0,5]، كمـــا أن انتمـــاؤه يكـــون جزئيـــاً للفتـــرة $\left]0,5_{(0.6,0.1,0.3)}\right]$ وبالتأكيد ينتمي للفترة [0,5]. وعلى ذلك تكون الفترة L هي جزءاً من التحليل النيوتروسوفيكي وليست تحليل فترات.

لاحظ الدوال الآتية:

$$k_1([0,5]) = [-4,6]\ , and\ \ k_2([-2,-4]) = [0,5]$$

الدوال k_1 و k_2 تنتمي لتحليل الفترة، أما الدوال:

$$k_3\left(\left[0,5_{(0.6,0.1,0.3)}\right[\right) = [-4,6]\ , and\ k_2([-2,-4]) = \left[0,5_{(0.6,0.1,0.3)}\right[$$

فهي بدون شك تنتمي للتحليل النيوتروسوفيكي.

الدالة $f: A \rightarrow B$ هي دالة نيوتروسوفيكية تملك بعض اللاتحديد مع الأخذ بعين الاعتبار العلاقة التي تربط عناصر المنطلق بعناصر المستقر .

في تحليل الفترات يتم فقط دراسة الدوال المعرفة على فترات، والتي قيمها فترات أيضاً في حين أنها خالية من اللاتحديد. لذلك، نجد أن التحليل النيوتروسوفيكي أكثر عمومية من تحليل الفترات.

لنأخذ مثلاً الدوال النيوتروسوفيكية الآتية:

$$e: R \cup \{I\} \rightarrow R \cup \{I\}\ \ ;\ \ e(2+3I) = 7-6I$$

حيث أن المركبة I تمثل اللاتحديد.

$$f: R \rightarrow R\quad ;\ \ f(4\ or\ 5) = 7$$

$$g: R \rightarrow R; g(0) = -2\ or\ 3\ or\ 7$$

$$h: R \rightarrow R; h(-1\ or\ 1) = 4\ or\ 6\ or\ 8$$

$$k: R \rightarrow R; k(x) = x\ and - x$$

في الدالة k يفشل اختبار المستقيم العمودي التقليدي للمنحنيات التي تمثل دوال تقليدية.

$$l: R \rightarrow R; l(-3) = maybe\ 9$$

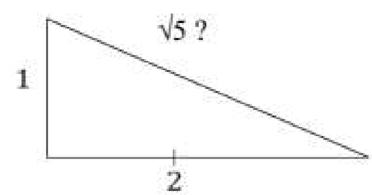
إذن تحليل الفترات $\subset$ تحليل المجموعات $\subset$ التحليل النيوتروسوفكي.

$1-5$ المقاييس الهندسية الأولية غير المعينة:

عند أخذ حالات اللاتحديد في الرياضيات نحصل على مايسمى الحساب النيتروسوفيكي، المعنى الحقيقي للاتحديد هو عدم الدقة. بينما الحساب التقليدي يصف ديناميكية عالمنا، نجد أن الحساب النيوتروسوفيكي يصف اللاتحديد (النتروسوفيك) في هذه الديناميكية. الحساب التقليدي يتعامل مع مفاهيم مثل (الميل، خط المماس، طول القوس، (المركز) نقطة التمركز، درجة الانحناء والتقوس، المساحة، الحجم) كمقاييس مضبوطة.

علماً أنه في حياتنا اليومية هنالك حالات عديدة نتعامل فيها كمقاييس تقريبية. الحساب التمهيدي النيوتروسوفيكي أكثر ثباتاً وهو يتحدث عن الغموض الساكن أو الأمور المبهمة، في الحساب النيوتروسوفيكي يتم التعامل مع الأفكار التي تملك لا تحديد وأكثر من ذلك، اللاتحديد كملخص لما ذكر أعلاه في المجتمع المثالي توجد دوافع وأفكار مثالية التي يتم فيها استخدام حساب التفاضل والتكامل التقليدي. مثلاً، نجد أن التقوس في الدائرة المثالية ذات نصف القطر $r > 0$ هو عدد ثابت يساوي $\frac{1}{r}$ بينما بالنسبة للدائرة غير المثالية فإن انحنائها يمكن تمثيله بفترة محتواه في $\left(\frac{1}{r}-\varepsilon\,,\ \frac{1}{r}+\varepsilon\right)$ والذي يمثل جوار العدد $\frac{1}{r}$ حيث $\varepsilon > 0$ وهو رقم دقيق (صغير).

في المثلث القائم ذو الأضلاع $1\ cm$، $2\ cm$ يكون طول الوتر مساوياً $\sqrt{5}\ cm$ على أي حال نجد أنه في عالمنا غير المثالي لا نستطيع رسم قطعة المستقيم طولها يساوي بالضبط $\sqrt{5}$ لأن العدد $\sqrt{5}$ هو عدد غير نسبي يملك عدد لا نهائي من الأرقام العشرية لذا نحن بحاجة إلى تقريبها إلى بعض الأرقام العشرية ... ... $\sqrt{5} = 2.23606797$.

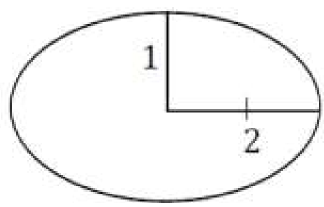


الشكل (1)

إن مساحة القطع الناقص المثالي هي $A = \pi ab$، إن $2a$ و $2b$ (علماً أن $a > b$) هما المحورين المحرقي واللامحرقي للقطع الناقص على التوالي، نلاحظ أننا لا نستطيع تمثيل هذا القطع بدقة لأن π عدد عدد غير نسبي.

لنفرض أن $a = 2\ \text{cm}$ و $b = 1\ \text{cm}$ عندئذٍ ستكون مساحة القطع هي:

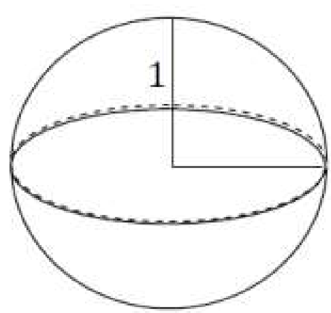
$$A = 2\pi = 6.2831 \ldots cm^2$$



الشكل (2)

لكننا لا نستطيع أن نضمن بالضبط المساحة داخل هذا القطع لأن 6.2831 لا يعتبر رقماً مضبوطاً. بذلك، فنحن نعمل بشكل تقريبي (غير معين).

وبشكل مشابه بالنسبة لحجم الكرة المثالي $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ إذ إن نصف القطر هو r عندما $r = 1cm$ عندئذٍ فإن $V = \frac{4}{3}\pi = 4.1887 \ldots cm^3$ وهو عدد غير نسبي له عدد لا نهائي من المراتب العشرية. وهكذا فنحن غير قادرين على الحصول على حجم الكرة بشكل دقيق.



الشكل (3)

الفصل الثاني

أساسيات المصفوفات النيوتروسوفكية

مقدمة:

تعتبر المجموعة الضبابية من المجموعات الهامة التي تمت دراستها سابقاً، كالمجموعات اللينة، المجموعات الضبابية ذات قيمة ثنائية، والمجموعات اللينة الثنائية، كل هذه المجموعات تم تعميمها في المنطق النتروسوفيكي.

وقد تمت دراسة الجبر النتروسوفيكي من قبل F.Smarandache و KANDASAMY، وتم التوصل إلى العديد من النتائج الجبرية النتروسوفيكية كالفضاءات، المودولات ، الحلقات ، نظرية الأعداد ، والأنظمة الأخرى ذات الارتباط كالرسوم البيانية وطرق اتخاذ القرار، وفيما يتعلق بالمصفوفات النتروسوفيكية فقد قام البروفيسور F.Smarandache بتعريف نمط من المصفوفات النتروسوفيكية ، وسنقدم تعريف جديد للمصفوفات النتروسوفيكية بشكل مختلف عن التعريف الذي قدمه البروفيسور F.Smarandache وسنركز دراستنا على المصفوفات النتروسوفيكية المربعة.

$2-1$ المصفوفة النيوتروسوفيكية:

نبدأ بتعريف العدد الحقيقي النيتروسوفيكي

تعريف $(1.1.2)$: العدد الحقيقي النتروسوفيكي:

يعرف العدد الحقيقي النتروسوفيكي بأبسط صيغه بالعلاقة $w=a+bI$ حيث أن a و b أعداد حقيقة أو مركبة و I عنصر اللاتحديد. مع الأخذ بعين الاعتبار أن $0.I=0$ و $I^n=I$ لجميع قيم n الموجبة مثلا الأعداد:

$$w_1=1-2I \quad ,w_2=-3=-3+0I$$

تعريف $(2.1.2)$: قسمة عددين حقيقين نتروسوفيكيين:

ليكن $w_1=a_1+b_1I$ و $w_2=a_2+b_2I$ عندئذ يكون:

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{a_1+b_1I}{a_2+b_2I}=\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2(a_2+b_2)}I \quad (1.1.2)$$

تعريف $(3.1.2)$: الحقل النتروسوفيكي:

ليكن K حقل ما، يعرف الحقل النتروسوفيكي بالشكل $\langle K \cup I \rangle$ ويعطى بالعلاقة $K(I) = \langle K \cup I \rangle$.

تعريف $(4.1.2)$: المصفوفة النتروسوفيكية:

لتكن $M_{m\times n} = \{(a_{ij})\ ;\ a_{ij} \in K(I)\}$ حيث $K(I)$ حقل نتروسوفيكي، عندئذ نسمي $M_{m\times n}$ مصفوفة نتروسوفيكية.

تعريف $(5.1.2)$: المصفوفة النتروسوفيكية المربعة:

نقول عن المصفوفة النتروسوفيكية $M_{m\times n}$ أنها مصفوفة نتروسوفيكية مربعة إذا كانت $m = n$ وتكتب بالشكل $M_{n\times n}$.

وتعرف المصفوفة النتروسوفيكية المربعة من المرتبة n بالعلاقة $M = A + BI$ حيث أنه كلاً من A و B مصفوفتين حقيقيتين مربعتين من المرتبة n.

من الآن فصاعداً سيتم تعاملنا مع المصفوفات النتروسوفيكية المربعة.

تعريف $(6.1.2)$:

لتكن المصفوفتان:

$$M = A + BI\ , N = C + DI$$

عندئذ يعرف الجداء MN بالصيغة:

$$MN = AC + [(A + B)(C + D) - AC]I$$

تعريف $(7.1.2)$: محدد المصفوفة النيوتروسوفكية المربعة:

لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة n، عندئذ يعرف محدد هذه المصفوفة بالشكل:

$$\det M = \det A + I[\det(A + B) - \det A] \quad (2.1.2)$$

مثال ($\mathbf{2.1.1}$). لتكن المصفوفة النتروسوفيكية:

$$M = A + BI = \begin{pmatrix} 1 & 3I \\ 1+I & 2+2I \end{pmatrix}$$

حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. ولنوجد محددها.

لدينا:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$detA = 2, A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \det(A + B) = -2$$

إذن حسب العلاقة (2.1.2) نجد:

$$\det M = \det A + I[\det(A + B) - \det A] = 2 + I[-2 - 2] = 2 - 4I$$

تعريف ($\mathbf{2.1.8}$): مقلوب المصفوفة النيتروسوفكية المربعة:

لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة n، عندئذ يعرف مقلوب هذه المصفوفة بالشكل:

$$M^{-1} = A^{-1} + I[(A + B)^{-1} - A^{-1}] \quad (3.1.2)$$

مبرهنة ($\mathbf{2.1.1}$): تكون المصفوفة $M = A + BI$ قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان:

$\det M \neq 0$.

مثال ($\mathbf{2.1.2}$). لتكن المصفوفة النتروسوفيكية:

$$M = A + BI = \begin{pmatrix} 1 & 3I \\ 1+I & 2+2I \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

عندئذ:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد:

$$\det A = 2\,, \det(A+B) = -2\,, \det M = 2 - 4I \neq 0$$

إذن المصفوفة M قابلة للقلب.

ومنه :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, (A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$M^{-1} = A^{-1} + I[(A+B)^{-1} - A^{-1}]$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + I\begin{pmatrix} -3 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{6} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3I & \frac{-3}{2}I \\ \frac{-1}{2} - \frac{1}{6}I & \frac{1}{2} - I \end{pmatrix}$$

يمكن التحقق من أن:

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تعريف $(3.1.2)$. منقول المصفوفة النتروسوفيكية:

لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة n، عندئذ نعرف منقول هذه المصفوفة بالشكل:

$$M^T = A^T + I[(A+B)^T - A^T] \quad (4.1.2)$$

تعريف $(9.1.2)$. قوة مصفوفة نتروسوفيكية:

لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة n، عندئذ نعرف قوة هذه المصفوفة بالشكل:

$$M^r = A^r + I[(A+B)^r - A^r]$$

ملاحظة $(\mathbf{1.1.2})$:

$\det(M.N) = \det M \det N$ و $\det(M)^{-1} = \det M$ و $\det M = \det M^T$.

$2-2$ كثير الحدود المميز للمصفوفة النتروسوفيكية المربعة:

لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة n، وليكن $Z = X + YI$ عندئذ يعرف كثير الحدود المميز لهذه المصفوفة بالشكل:

$$\begin{aligned}\varphi(Z) &= det[ZU_{n\times n} - M] = det[ZU_{n\times n} - (A + BI)] \\ &= det[(ZU_{n\times n} - A) + (-B)I]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(Z) = {} & det(ZU_{n\times n} - A) \\ & + I\big[det\big(ZU_{n\times n} - (A + B)\big) - det(ZU_{n\times n} - A)\big]\end{aligned}$$

$$\varphi(Z) = \alpha(Z) + I[\beta(Z) - \alpha(Z)]$$

حيث:

$$\alpha(Z) = det(ZU_{n\times n} - A)\ , \beta(Z) = det\big(ZU_{n\times n} - (A + B)\big) \quad (1.2.2)$$

مثال $(\mathbf{1.2.2})$. لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة الثانية حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

عندئذ:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد:

$$\varphi(Z) = \alpha(Z) + I[\beta(Z) - \alpha(Z)]$$

$$\alpha(Z) = det(ZU_{2\times 2} - A) = \begin{vmatrix} X + YI - 1 & -1 \\ 0 & X + YI + 1 \end{vmatrix}$$

$$\alpha(Z) = (X + YI)^2 - 1 = Z^2 - 1$$

$$\beta(Z) = det\big(ZU_{2\times 2} - (A + B)\big) = \begin{vmatrix} X + YI - 1 & -2 \\ -1 & X + YI \end{vmatrix}$$

$$\beta(Z) = (X + YI)^2 - (X + YI) - 2 = Z^2 - Z - 2$$

ومنه:

$$\varphi(Z) = \alpha(Z) + I[\beta(Z) - \alpha(Z)] = Z^2 - 1 + I[-Z - 1]$$

حيث $U_{2\times 2}$ هي مصفوفة الواحدية.

مثال $(\mathbf{2.2.2})$. لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة الثانية حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, U_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

عندئذ:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد:

$$\varphi(Z) = \alpha(Z) + I[\beta(Z) - \alpha(Z)]$$

$$\alpha(Z) = det(ZU_{2\times 2} - A) = \begin{vmatrix} X + YI - 1 & 1 \\ 0 & X + YI - 2 \end{vmatrix}$$

$$\alpha(Z) = (X + YI - 1)(X + YI - 2) = (X + YI)^2 - 3(X + YI) + 2$$
$$= Z^2 - 3Z + 2$$

$$\beta(Z) = det\big(ZU_{2\times 2} - (A + B)\big) = \begin{vmatrix} X + YI - 1 & 0 \\ -1 & X + YI - 3 \end{vmatrix}$$

$$\beta(Z) = (X + YI)^2 - 4(X + YI) + 3 = Z^2 - 4Z + 3$$

ومنه:

$$\varphi(Z) = \alpha(Z) + I[\beta(Z) - \alpha(Z)] = (Z^2 - 3Z + 2) + I[-Z + 1]$$

مبرهنـة $(\mathbf{1.2.2})$: كثيـر الحـدود المميـز لمصـفوفة نتروسـوفيكية مربعـة يسـاوي كثيـر الحـدود المميز لمنقولها.

البرهان:

لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة وليكن $\varphi(Z)$ كثير الحدود المميز لها، ولتكن M^T منقول المصفوفة M وليكن $\psi(Z)$ كثير الحدود المميز للمنقول M^T. ولنبرهن أن $\varphi(Z) = \psi(Z)$.

$$\varphi(Z) = det[ZU_{n\times n} - M]$$

$$\varphi(Z) = det(ZU_{n\times n} - A) + I\left[det\left(ZU_{n\times n} - (A+B)\right) - det(ZU_{n\times n} - A)\right]$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\psi(Z) = det[ZU_{n\times n} - M]^T = det[(ZU_{n\times n} - A) + (-B)I]^T$$

$$\psi(Z) = \det\left[(ZU_{n\times n} - A)^T + I\left[\left(ZU_{n\times n} - (A+B)\right)^T - (ZU_{n\times n} - A)^T\right]\right]$$

$$\psi(Z) = \det(ZU_{n\times n} - A)^T + I\left[det\left(ZU_{n\times n} - (A+B)\right)^T - det(ZU_{n\times n} - A)^T\right]$$

وحسب الملاحظة $(1.1.2)$ لدينا $\det M = \det M^T$ إذن:

$$det[(ZU_{n\times n} - A)^T] = det(ZU_{n\times n} - A)$$

$$det\left(ZU_{n\times n} - (A+B)\right)^T = det\left(ZU_{n\times n} - (A+B)\right)$$

ومنه يكون:

$$\psi(Z) = det(ZU_{n\times n} - A) + I\left[det\left(ZU_{n\times n} - (A+B)\right) - det(ZU_{n\times n} - A)\right]$$

إذن: $\psi(Z) = \varphi(Z)$

مثال $(3.2.2)$. لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة الثانية حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

وجدنا من خلال المثال (1.2.2) أن:

$$\varphi(Z) = Z^2 - 1 + I[-Z - 1]$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\psi(Z) = \alpha^*(Z) + I[\beta^*(Z) - \alpha^*(Z)]$$

$$\alpha^*(Z) = det(ZU_{2\times 2} - A^T) = \begin{vmatrix} X + YI - 1 & 0 \\ -1 & X + YI + 1 \end{vmatrix}$$

$$\alpha^*(Z) = (X + YI)^2 - 1 = Z^2 - 1$$

$$\beta^*(Z) = det(ZU_{2\times 2} - (A + B)^T) = \begin{vmatrix} X + YI - 1 & -2 \\ -1 & X + YI \end{vmatrix}$$

$$\beta^*(Z) = (X + YI)^2 - (X + YI) - 2 = Z^2 - Z - 2$$

ومنه:

$$\psi(Z) = \alpha^*(Z) + I[\beta^*(Z) - \alpha^*(Z)] = Z^2 - 1 + I[-Z - 1]$$

إذن:

$$\psi(Z) = \varphi(Z)$$

مثال ($\mathbf{4.2.2}$). لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة الثانية حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

وجدنا من خلال المثال (2.2.2) أن:

$$\varphi(Z) = (Z^2 - 3Z + 2) + I[-Z + 1]$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\psi(Z) = \alpha^*(Z) + I[\beta^*(Z) - \alpha^*(Z)]$$

$$\alpha^*(Z) = det(ZU_{2\times2} - A^T) = \begin{vmatrix} X+YI-1 & 0 \\ 1 & X+YI-2 \end{vmatrix}$$

$$\alpha^*(Z) = (X+YI)^2 - 3(X+YI) + 2 = Z^2 - 3Z + 2$$

$$\beta^*(Z) = det(ZU_{2\times2} - (A+B)^T) = \begin{vmatrix} X+YI-1 & -1 \\ 0 & X+YI-3 \end{vmatrix}$$

$$\beta^*(Z) = (X+YI)^2 - 4(X+YI) + 3 = Z^2 - 4Z + 3$$

ومنه:

$$\psi(Z) = \alpha^*(Z) + I[\beta^*(Z) - \alpha^*(Z)] = (Z^2 - 3Z + 2) + I[-Z + 1]$$

إذن:

$$\psi(Z) = \varphi(Z)$$

$2 - 3$ مبرهنة كيلي - هاميلتون النيتروسوفكية:

مبرهنة $(1.3.2)$. أية مصفوفة نتروسوفيكية مربعة تكون صفراً لكثير حدودها المميز.

مثال $(1.3.2)$. لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة الثانية حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

وجدنا سابقاً أن:

$$\varphi(Z) = (Z^2 - 3Z + 2) + I[-Z + 1]$$

ولنثبت أن:

$\varphi(M) = 0$ أي $(M^2 - 3M + 2) + I[-M + 1] = 0$

لدينا:

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1+I\\ I & 2+I\end{pmatrix}\Rightarrow M^2=\begin{pmatrix}1 & -1+I\\ I & 2+I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1+I\\ I & 2+I\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & -3+3I\\ 4I & 4+5I\end{pmatrix}$$

ومنه:

$$L_1=(M^2-3M+2)+I[-M+1]=M^2-3M-IM+(2+I)U_{2\times2}$$

$$L_1=\begin{pmatrix}1 & -3+3I\\ 4I & 4+5I\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -3+3I\\ 3I & 6+3I\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}I & 0\\ I & 3I\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2+I & 0\\ 0 & 2+I\end{pmatrix}$$

$$L_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=L_2$$

$2-4$ مقلوب مصفوفة نتروسوفيكية باستخدام مبرهنة كيلي هاميلتون نتروسوفيكياً:

في هذه الفقرة سنوجد مقلوب مصفوفة نتروسوفيكية باستخدام مبرهنة كيلي هاميلتون النتروسوفيكية. وذلك من خلال تطبيق مباشر يوضحه المثال الآتي:

مثال $(\mathbf{1.4.2})$.

لتكن $M=A+BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة الثانية حيث:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

المطلوب:

(1): أوجد M^{-1} باستخدام التعريف (8.1.2).

(2): أوجد M^{-1} بالاعتماد على المبرهنة (1.3.2).

الحل:

(1): باستخدام التعريف (8.1.2) سنجد أن:

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\\ \frac{-1}{3}I & \frac{1}{2}-\frac{1}{6}I\end{pmatrix}$$

(2): وجدنا من خلال المثال (2.2.2) أن:

$$\varphi(Z) = (Z^2 - 3Z + 2) + I[-Z + 1]$$

وحسب المبرهنة (1.3.2) لدينا: $\varphi(M) = 0$ أي:

$$M^2 - 3M - IM + (2 + I) = 0 \Longrightarrow M^2 - 3M - IM = -(2 + I)$$

$$\Longrightarrow M^2 - (3 + I)M = -(2 + I) \Longrightarrow \frac{-1}{(2 + I)}[M^2 - (3 + I)M] = U_{2\times2}$$

$$\Longrightarrow \frac{-1}{(2 + I)}[M^2 - (3 + I)M] = MM^{-1}$$

وبما أن $detM = 2 + I$ يكون:

$$\frac{-1}{(2 + I)}[M - (3 + I)U_{2\times2}] = M^{-1} \Longrightarrow M^{-1} = \frac{-1}{(2 + I)}[M - (3 + I)U_{2\times2}]$$

$$\Longrightarrow M^{-1} = \frac{-1}{(2 + I)}\begin{pmatrix} -2 - I & -1 + I \\ I & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2 + I}{2 + I} & \frac{1 - I}{2 + I} \\ \frac{-I}{2 + I} & \frac{1}{2 + I} \end{pmatrix}$$

وحسب تعريف قسمة عددين نتروسوفكيين التعريف (2.1.2) يمكن التحقق من أن:

$$\frac{2 + I}{2 + I} = 1\,, \frac{1 - I}{2 + I} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\,, \frac{-I}{2 + I} = \frac{-1}{3}I\,, \frac{1}{2 + I} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}I$$

إذن:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I \\ \frac{-1}{3}I & \frac{1}{2} - \frac{1}{6}I \end{pmatrix}$$

وهو المقلوب نفسه في الطلب (1).

مبرهنة$(\mathbf{1.4.2})$**:** كثير الحدود المميز لأي مصفوفة نتروسوفيكية مربعة يساوي كثير الحدود المميز لأي مصفوفة نتروسوفيكية مشابهة لها.

البرهان:

لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة مشابهة للمصفوفة $N = C + DI$.

وهذا يعني وجود المصفوفة النتروسوفيكية المربعة النظامية $P = K + LI$ والتي يكون من أجلها:

$$N = P^{-1}MP$$

بفرض $\varphi(Z)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة M، أي:

$$\varphi(Z) = det[ZU_{n\times n} - M]$$

وبفرض $\psi(Z)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة N، عندئذ يكون:

$$\begin{aligned}\psi(Z) &= det[ZU_{n\times n} - N] = det[ZU_{n\times n} - P^{-1}MP] \\ &= det[ZP^{-1}P - P^{-1}MP]\end{aligned}$$

$$\psi(Z) = det[P^{-1}(ZU_{n\times n} - M)P]$$

وحسب الملاحظة (1.1.2) لدينا $\det(M.N) = \det M \det N$ إذن:

$$\begin{aligned}\psi(Z) &= det(P^{-1})\, det(ZU_{n\times n} - M) det(P) \\ &= det(P^{-1})\, det(P)\, det(ZU_{n\times n} - M)\end{aligned}$$

$$\psi(Z) = det(U_{n\times n})\, det(ZU_{n\times n} - M) = (1)\, det(ZU_{n\times n} - M) = \varphi(Z)$$

$2 - 5$ كثير الحدود الأصغري للمصفوفة النتروسوفيكية المربعة:

تعريف $(\mathbf{1.5.2})$. لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة n، وليكن $Z = X + YI$، نسمي كثير الحدود $m(Z)$ والذي ينعدم بالمصفوفة M بكثير الحدود الأصغري للمصفوفة M.

مثال $(\mathbf{1.5.2})$. لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة الثانية حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

أوجد كثير الحدود الأصغري للمصفوفة M.

الحل:

وجدنا من خلال المثال (2.2.2) أن:

$$\varphi(Z) = (Z^2 - 3Z + 2) + I[-Z + 1] = (Z - 2)(Z + 1) + I[-Z + 1]$$

عندئذ يكون $m(Z)$ هو أحد كثيرات الحدود الآتية:

$$m_1(Z) = (Z - 2)(Z + 1) = Z^2 - 3Z + 2$$

$$m_2(Z) = (Z - 2) + I[-Z + 1]$$

$$m_3(Z) = (Z + 1) + I[-Z + 1]$$

$$m_4(Z) = I[-Z + 1]$$

$$m_5(Z) = \varphi(Z)$$

ومنه:

$$m_1(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 2I \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_2(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 2I \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_3(M) = \begin{pmatrix} -1 & -1 + I \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_4(M) = \begin{pmatrix} 1 - I & -2 + 2I \\ 0 & 1 - I \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_5(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن

$$m(Z) = \varphi(Z)$$

مثال $(\mathbf{2.5.2})$. لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة الثانية حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

أوجد كثير الحدود الأصغري للمصفوفة M.

الحل:

وجدنا من خلال المثال (1.2.2) أن:

$$\varphi(Z) = (Z^2 - 1) - I[Z + 1] = (Z - 1)(Z + 1) - I[Z + 1]$$

عندئذ يكون $m(Z)$ هو أحد كثيرات الحدود الآتية:

$$m_1(Z) = (Z - 1)(Z + 1) = Z^2 - 1$$

$$m_2(Z) = (Z - 1) - I[Z + 1]$$

$$m_3(Z) = (Z + 1) - I[Z + 1]$$

$$m_4(Z) = -I[Z + 1]$$

$$m_5(Z) = \varphi(Z)$$

ومنه:

$$m_1(M) = \begin{pmatrix} -2I & 1 - I \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_2(M) = \begin{pmatrix} -2 & 1 - I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_3(M) = \begin{pmatrix} -2I & -2I \\ -I & -I \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_4(M) = \begin{pmatrix} 2I & 2I \\ I & I \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_5(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$m(Z) = \varphi(Z)$$

ملاحظـة $(\mathbf{1.5.2})$. كثيـر الحـدود الأصـغري للمصـفوفة النتروسـوفيكية المربعـة M دائمـا يسـاوي كثيـر حـدودها المميـز أي $m(Z) = \varphi(Z)$. وهـذا مـايميز كثيـر الحـدود الأصـغري للمصـفوفة النتروسوفيكية بمقارنتها بكثير الحدود الأصغري للمصفوفة التقليديـة، إذ أنـه في المصفوفات التقليديـة ليس من الضروري أن يكون كثير حدوها الأصغري مساوياً لكثير حدودها المميز.

مبرهنة $(\mathbf{1.5.2})$. للمصفوفات النتروسوفيكية المربعة المتشابهة كثير حدود أصغري نفسه.

البرهان:

لـتكن $M = A + BI$ مصـفوفة نتروسـوفيكية مربعـة مشـابهة للمصـفوفة $N = C + DI$ ولـيكن $\varphi(Z)$ كثيـر الحـدود المميـز للمصـفوفة M ولـيكن $\psi(Z)$ كثيـر الحـدود المميـز للمصـفوفة N . عندئذ حسب المبرهنة (1.4.2) يكون $\psi(Z) = \varphi(Z)$.

لـيكن $m_1(Z)$ كثيـر الحـدود الأصـغري للمصـفوفة M ولـيكن $m_2(Z)$ كثيـر الحـدود الأصـغري للمصـفوفة N عنئـذ وحسـب الملاحظـة (1.5.2) ينـتج أن: $m_1(Z) = \varphi(Z)$ و $m_2(Z) = \varphi(Z)$ ومن كون $\psi(Z) = \varphi(Z)$ نستنتج أن:

$$m_1(Z) = m_2(Z)$$

$\mathbf{2-6}$ القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة النتروسوفيكية المربعة:

تعريف $(\mathbf{1.6.2})$. لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة فوق الحقل $F(I)$، نقول بـالتعريف أن $Z = X + YI$ شـعاع ذاتـي نتروسـوفيكي إذا وفقط إذا كـان $MZ = (a + bI)Z$. يسمى العدد النتروسوفيكي $a + bI$ بالقيمة الذاتية للمصفوفة M.

مبرهنة $(\mathbf{1.6.2})$. لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة فوق الحقل $F(I)$، عندئذ تكون $a + bI$ قيمـة ذاتية للمصفوفة M إذا وفقط إذا كان a قيمـة ذاتية للمصفوفة A وكان $a + b$ قيمـة ذاتيـة للمصـفوفة $A + B$، وأيضـا يكـون $Z = X + YI$ شـعاع ذاتـي للمصـفوفة M إذا وفقط إذا كان X شعاع ذاتي للمصفوفة A وكان $X + Y$ شعاع ذاتي للمصفوفة $A + B$.

البرهان:

لزوم الشرط:

لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة، وليكن $Z = X + YI$ شعاع ذاتي للمصفوفة M، و $a + bI$ قيمة ذاتية للمصفوفة M، عندئذ حسب التعريف (1.6.2) يكون:

$MZ = (a + bI)Z$ أي $(A + BI)(X + YI) = (a + bI)(X + YI)$ ومنه وحسب التعريف (6.1.2) نجد:

$$AX + I[(A + B)(X + Y) - AX] = aX + I[(a + b)(X + Y) - aX]$$

بمطابقة الطرفين نحصل على:

$$AX = aX , (A + B)(X + Y) = (a + b)(X + Y)$$

إذن وحسب التعريف (1.6.2) ينتج لدينا أن:

a قيمة ذاتية للمصفوفة A وأن X شعاع ذاتي للمصفوفة A ، و $a + b$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A + B$ وأن $X + Y$ شعاع ذاتي للمصفوفة $A + B$.

كفاية الشرط:

لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة، وليكن a قيمة ذاتية للمصفوفة A وأن X شعاع ذاتي للمصفوفة A ، و $a + b$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A + B$ وأن $X + Y$ شعاع ذاتي للمصفوفة $A + B$. إذن ومن التعريف (1.6.2) ينتج أن:

$$AX = aX , (A + B)(X + Y) = (a + b)(X + Y)$$

ومنه:

$$MZ = (A + BI)(X + YI) = AX + I[(A + B)(X + Y) - AX]$$

وبما أن:

$$AX = aX , (A + B)(X + Y) = (a + b)(X + Y)$$

إذن:

$$MZ = aX + I[(a+b)(X+Y) - aX] = (a+bI)(X+YI) = (a+bI)Z$$

العلاقة الأخيرة ومن التعريف (1.6.2) ينتج أن $(a+bI)$ قيمة ذاتية للمصفوفة M وأن $X+YI$ شعاع ذاتي للمصفوفة M.

مبرهنة $(\mathbf{2.6.2})$. القيم الذاتية للمصفوفة $M = A + BI$ نحصل عليها بحل المعادلة النتروسوفيكية $det[M - (a+bI)U_{n\times n}] = 0$.

البرهان:

لدينا وحسب تعريف محدد المصفوفة النتروسوفيكية:

$$det[M - (a+bI)U_{n\times n}] = det[(A - aU_{n\times n}) - I(B - bU_{n\times n})]$$

$$\begin{aligned} det[M - (a+bI)U_{n\times n}] &= det(A - aU_{n\times n}) \\ &+ I\big[det\big((A+B) - (a+b)U_{n\times n}\big) - det(A - aU_{n\times n})\big] = 0 \end{aligned}$$

بمطابقة الطرفين نجد أن:

$$det(A - aU_{n\times n}) = 0 \ldots (1.6.2)$$

$$\big[det\big((A+B) - (a+b)U_{n\times n}\big) - det(A - aU_{n\times n})\big] = 0 \ldots (2.6.2)$$

من العلاقة (1.6.2) نجد أن a قيمة ذاتية للمصفوفة A.

ومن العلاقة (2.6.2) نجد أن:

$$det\big((A+B) - (a+b)U_{n\times n}\big) = det(A - aU_{n\times n}) = 0$$

لذلك تكون $(a+b)$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A+B$.

تعريف $(\mathbf{2.6.2})$. لتكن $M = A + BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة فوق الحقل $F(I)$، ولتكن $a = (\alpha_0, \beta_0)$ القيم الذاتية للمصفوفة A. وكذلك $a + b = (\alpha_1, \beta_1)$ القيم الذاتية للمصفوفة

$A+B$، ولـتكن $X=\{X_0=(m_0,n_0),X_1=(m_1,n_1)\}$ الأشـعة الذاتيـة للمصـفوفة A،
وأيضـاً $X+Y=\{K_0=(s_0,r_0),K_1=(s_1,r_1)\}$ الأشـعة الذاتيـة للمصـفوفة $A+B$،
عندئذ تعطى القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة بالصيغ الآتية:

القيم الذاتية:

$$a+bI=\begin{Bmatrix}\alpha_0+(\alpha_1-\alpha_0)I, & \alpha_0+(\beta_1-\alpha_0)I\\ \\ \beta_0+(\alpha_1-\beta_0)I, & \beta_0+(\beta_1-\beta_0)I\end{Bmatrix} \dots\ (3.6.2)$$

الأشعة الذاتية:

$$X+YI=\begin{Bmatrix}X_0+(X_1-X_0)I, & X_0+(K_1-X_0)I\\ \\ K_0+(K_1-Y_0)I, & K_0+(K_1-K_0)I\end{Bmatrix} \dots\ (4.6.2)$$

مثال $(\mathbf{1.6.2})$. لتكن $M=A+BI$ مصفوفة نتروسوفيكية مربعة من المرتبة الثانية حيث:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\ ,B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

لنوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة M.

الحل:

يمكن بسهولة التحقق من أن القيم الذاتية للمصفوفة A هي $a=(\alpha_0,\beta_0)=(1,2)$.

وأن القيم الذاتية للمصفوفة $A+B$ هي $a+b=(\alpha_1,\beta_1)=(1,3)$

من العلاقات (3.6.2) نجد أن القيم الذاتية للمصفوفة M هي:

$$a+bI=\{1\ ,1+2I\ ,2-I\ ,2+I\}$$

أيضا يمكن التحقق بسهولة من أن الأشعة الذاتية للمصفوفة A هي:

$$X=\{X_0=(1,0),X_1=(1,-1)\}$$

وأن القيم الذاتية للمصفوفة $A+B$ هي:

$$X+Y=\left\{K_0=\left(1,\frac{-1}{2}\right),K_1=(0,1)\right\}$$

من العلاقات (4.6.2) نجد أن الأشعة الذاتية هي:

$$X+YI=\begin{Bmatrix} (1,0)+(-1,1)I\ ,(1,0)+\left(0,\frac{-1}{2}\right)I \\ (1,-1)+(-1,2)I,(1,-1)+\left(0,\frac{1}{2}\right)I \end{Bmatrix}$$

الفصل الثالث

مصفوفة نتروسوفيكية n−REFINED

مقدمة:

نقدم في هذا الفصل تعميم للمصفوفات النتروسوفيكية المربعة، إلى n−refined مصفوفة نتروسوفيكية مربعة، ويعتبر هذا التعميم مفهوم جديد في النيوتروسوفيك، وكما في الفصل الثاني سنقوم بتعريف هذا النمط من المصفوفات، ودراسة خصائصه وتطبيقاته، كالمحدد، والمقلوب، والمنقول، وتعميم مبرهنة كيلي هاميلتون لهذا النوع من المصفوفات، وإيجاد مقلوب هذه المصفوفة اعتماداً على تعميم هذه المبرهنة، بالإضافة للقيم والأشعة الذاتية.

$3-1$ *n-REFINED* مصفوفة نتروسوفيكية مربعة:

تعريف $(\mathbf{1.1.3})$. لنعرف الأن العدد الحقيقي النتروسوفيكي بشكل عام، والذي يعرف بالشكل:

$$w = a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_n I_n$$

حيث $I_1, I_2, \dots, I_n$ عناصر اللاتحديد.

تعريف $(\mathbf{2.1.3})$. ليكن العدد النتروسوفيكي $w = a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_n I_n$ عندئذ يعرف مقلوب هذا العدد بالشكل:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_n I_n} = (a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_n I_n)^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= {a_0}^{-1} + [(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{-1} - (a_0 + a_2 + \cdots + a_n)^{-1}]I_1 \\ &\quad + [(a_0 + a_2 + \cdots + a_n)^{-1} - (a_0 + a_3 + \cdots + a_n)^{-1}]I_2 + \cdots \\ &\quad + [(a_0 + a_n)^{-1} - {a_0}^{-1}]I_n \dots (1.1.3) \end{aligned}$$

تعريف $(\mathbf{2.1.3})$. ***n-REFINED*** **مصفوفة نتروسوفيكية:**

لتكن $A_{m\times n} = \{(a_{ij})\};\ a_{ij} = x + yI_1 + zI_2 + \cdots + tI_n \in R_n(I)$ حيث $R_n(I)$ حقل نتروسوفيكي، عندئذ نسمي $A_{m\times n}$ *n−refined* مصفوفة نتروسوفيكية.

تعريف $(\mathbf{3.1.3})$: ***n-REFINED*** **مصفوفة نتروسوفيكية مربعة:**

نقول عن المصفوفة النتروسوفيكية $A_{m\times n}$ أنها *n−refined* مصفوفة نتروسوفيكية مربعة إذا كانت $m = n$ وتكتب بالشكل $A_{n\times n}$، ونعبر عنها بالصيغة:

$$A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + \cdots + A_n I_n$$

حيث $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ مصفوفات حقيقية.

ملاحظة $(\mathbf{1.1.3})$. في حال كانت $n = 2$ عندئذ نسمي المصفوفة السابقة ***REFINED*** مصفوفة نتروسوفيكية مربعة، وفي حال كانت $n = 1$ تسمى مصفوفة نتروسوفيكية مربعة وتمت دراستها في الفصل الثاني من هذه الأطروحة.

ملاحظة $(\mathbf{2.1.3})$. لدينا:

$$I_n . I_n = I_n,\ I_i . I_j = I_i;\ i \neq j\ , 1 \leq i \leq n-1\ , 1 \leq j \leq n-1$$

أو $I_i . I_j = I_j;\ i \neq j\ , 1 \leq i \leq n-1\ , 1 \leq j \leq n-1$

تعريف $(\mathbf{3.1.3})$**:**

لتكن المصفوفتان

$$A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + \cdots + A_n I_n, B = B_0 + B_1 I_1 + B_2 I_2 + \cdots + B_n I_n$$

ولتكن:

$$; 1 \leq j \leq n N_0 = A_0,\ N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n$$

$$; 1 \leq j \leq n M_0 = A_0,\ M_j = B_0 + B_1 I_1 + B_2 I_2 + \cdots + B_n I_n$$

عندئذ يعرف الجداء AB بالصيغة:

$$AB = N_0 M_0 + \sum_{i=1}^{n-1} [N_i M_i - N_{i+1} M_{i+1}] I_i + [N_n M_n - N_0 M_0] I_n$$

تعريف $(\mathbf{4.1.3})$**:**

لتكن $A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + \cdots + A_n I_n$ وليكن:

$$N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n \quad ;\ N_0 = A_0\ \ ,\ \ 1 \leq j \leq n$$

عندئذ يعرف محدد المصفوفة A بالشكل:

$$
\begin{aligned}
detA = detA_0 & \\
& + [det(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \\
& - det(A_0 + A_2 + \cdots + A_n)]I_1 \\
& + [det(A_0 + A_2 + \cdots + A_n) - det(A_0 + A_3 + \cdots + A_n)]I_2 \\
& + \cdots + [det(A_0 + A_n) - detA_0]I_n
\end{aligned}
$$

$$detA = detA_0 + \sum_{i=1}^{n-1}[det(N_i) - det(N_{i+1})]I_i + [det(N_n) - det(N_0)]I_n$$

مثال $(\mathbf{1.1.3})$.

لتكن المصفوفة $A = A_0 + A_1I_1 + A_2I_2 + A_3I_3$ حيث:

$$,\ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

لنوجد محدد هذه المصفوفة.

الحل:

نلاحظ أولاً أن المصفوفة A من النوع *3-REFINED* ومنه:

$$N_0 = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow detN_0 = 1$$

$$N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n\ ;\ 1 \le j \le n$$

$$N_1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow detN_1 = -6$$

$$N_2 = A_0 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow detN_2 = -10$$

$$N_3 = A_0 + A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow detN_1 = -6$$

حسب التعريف (4.1.3) نجد أن:

$$
\begin{aligned}
detA = detN_0 + [det(N_1) - det(N_2)]I_1 + [det(N_2) - det(N_3)]I_2 + \cdots & \\
+ [det(N_3) - det(N_0)]I_3 &
\end{aligned}
$$

$detA = 1 + [-6 + 10]I_1 + [-10 + 6]I_2 + [-6 - 1]I_3$

$detA = 1 + 4I_1 - 4I_2 - 7I_3$

مثال $(\mathbf{2.1.3})$.

لتكن المصفوفة $A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2$ حيث:

$$, \; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لنوجد محدد هذه المصفوفة.

الحل:

نلاحظ أولاً أن المصفوفة A من النوع *REFINED* ومنه:

$$N_0 = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow detN_0 = 2$$

$$N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n \; ; 1 \leq j \leq n$$

$$N_1 = A_0 + A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow detN_1 = -2$$

$$N_2 = A_0 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow detN_2 = 3$$

حسب التعريف (4.1.3) نجد أن:

$detA = detN_0 + [det(N_1) - det(N_2)]I_1 + [det(N_2) - det(N_0)]I_2$

$detA = 2 + [-2 - 3]I_1 + [-3 - 2]I_2$

$detA = 2 - 5I_1 - 5I_2$

مبرهنة $(\mathbf{1.1.3})$.

لتكن المصفوفتان

$A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + \cdots + A_n I_n, B = B_0 + B_1 I_1 + B_2 I_2 + \cdots + B_n I_n$

عندئذ فإن $detAB = detA \; detB$.

البرهان:

لتكن:

$$; 1 \leq j \leq n N_0 = A_0,\ N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n$$

$$; 1 \leq j \leq n M_0 = A_0,\ M_j = B_0 + B_1 I_1 + B_2 I_2 + \cdots + B_n I_n$$

لدينا حسب التعريف (3.1.3):

$$AB = N_0 M_0 + \sum_{i=1}^{n-1} [N_i M_i - N_{i+1} M_{i+1}] I_i + [N_n M_n - N_0 M_0] I_n$$

ومنه وحسب التعريف (4.1.3) يكون:

$$\begin{aligned} detAB = det(N_0 M_0) + \sum_{i=1}^{n-1} [det(N_i M_i) - det(N_{i+1} M_{i+1})] I_i \\ + [det(N_n M_n) - det(N_0 M_0)] I_n \end{aligned}$$

ومن كون N_0, M_0 وكذلك $N_j,\ M_j$ مصفوفات حقيقية فإن:

$$det(N_0 M_0) = det(N_0) det(M_0)\ , det(N_j M_j) = det(N_j) det(M_j)$$

إذن:

$$\begin{aligned} detAB = det(N_0) det(M_0) \\ + \sum_{i=1}^{n-1} [det(N_i) det(M_i) - det(N_{i+1}) det(M_{i+1})] I_i \\ + [det(N_n) det(M_n) - det(N_0) det(M_0)] I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} detAB = \Bigg[det(N_0) + \sum_{i=1}^{n-1} [det(N_i) - det(N_{i+1}) d] I_i \\ + [det(N_n) - det(N_0)] I_n \Bigg] \Bigg[det(M_0) \\ + \sum_{i=1}^{n-1} [det(M_i) - det(M_{i+1})] I_i + [det(M_n) - det(M_0)] I_n \Bigg] \\ = detA\ detB \end{aligned}$$

تعريف $(5.1.3)$:

لتكن $A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + \cdots + A_n I_n$ وليكن:

$$; 1 \leq j \leq n N_0 = A_0,\ N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n$$

عندئذ يعرف مقلوب المصفوفة A بالشكل:

$$A^{-1} = {A_0}^{-1} + \sum_{i=1}^{n-1} [(N_i)^{-1} - (N_{i+1})^{-1}] I_i + [(N_n)^{-1} - (N_0)^{-1}] I_n$$

مثال $(3.1.3)$.

لتكن المصفوفة $A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + A_3 I_3$ حيث:

$$,\ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

لنوجد مقلوب هذه المصفوفة.

الحل:

$$N_0 = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (N_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$; 1 \leq j \leq n\ N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n$$

$$N_1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow (N_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_2 = A_0 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow (N_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

$$N_3 = A_0 + A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow (N_3)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

حسب التعريف (5.1.3) نجد:

$$A^{-1} = (N_0)^{-1} + [(N_1)^{-1} - (N_2)^{-1}]I_1 + [(N_2)^{-1} - (N_3)^{-1}]I_2 + [(N_3)^{-1} - (N_0)^{-1}]I_3.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 7 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}\right] I_1$$

$$+ \left[\begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right] I_2$$

$$+ \left[\begin{pmatrix} \frac{-4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] I_3$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{63}{10} & \frac{-7}{10} \\ \frac{-13}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} I_1 + \begin{pmatrix} \frac{76}{60} & \frac{-8}{60} \\ \frac{-2}{60} & \frac{-16}{60} \end{pmatrix} I_2 + \begin{pmatrix} \frac{-10}{6} & \frac{8}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-5}{6} \end{pmatrix} I_3$$

تعريف (6.1.3):

لتكن $A = A_0 + A_1I_1 + A_2I_2 + \cdots + A_nI_n$ وليكن:

$$; 1 \leq j \leq n N_0 = A_0,\ N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n$$

عندئذ يعرف منقول المصفوفة A بالشكل:

$$.A^T = {A_0}^T + \sum_{i=1}^{n-1}[(N_i)^T - (N_{i+1})^T]I_i + [(N_n)^T - (N_0)^T]I_n$$

مثال (4.1.3).

لتكن المصفوفة $A = A_0 + A_1I_1 + A_2I_2 + A_3I_3$ حيث:

$$,\ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

لنوجد منقول هذه المصفوفة.

الحل:

$$N_0 = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow {N_0}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n \ ; 1 \le j \le n$$

$$N_1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow {N_1}^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$N_2 = A_0 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow {N_2}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$N_3 = A_0 + A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow {N_3}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = {N_0}^T + \left[{N_1}^T - {N_2}^T\right] I_1 + \left[{N_2}^T - {N_3}^T\right] I_2 + \left[{N_3}^T - {N_0}^T\right] I_3$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\right] I_1 + \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right] I_2 + \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right] I_3$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} I_2 + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} I_3$$

ملاحظة ($\mathbf{1.1.3}$).

لتكن $A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + \cdots + A_n I_n$ وليكن:

$$; 1 \le j \le n N_0 = A_0,\ N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n$$

عندئذ:

(1). $\det(A^{-1}) = (detA)^{-1}$.

(2). $detA = detA^T$.

تعريف $(7.1.3)$:

لتكن $A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + \cdots + A_n I_n$ وليكن:

$$; 1 \leq j \leq n N_0 = A_0,\ N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n$$

عندئذ يعرف قوى المصفوفة A بالشكل:

$$A^r = {A_0}^r + \sum_{i=1}^{n-1} [(N_i)^r - (N_{i+1})^r] I_i + [(N_n)^r - (N_0)^r] I_n$$

$3-2-$ كثير الحدود المميز ل n-refined مصفوفة نتروسوفيكية المربعة:

تعريف $(1.2.3)$.

لتكن $A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + \cdots + A_n I_n$ وليكن:

$$; 1 \leq j \leq n N_0 = A_0,\ N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n$$

ولـيكن $Z = X + YI_1 + TI_2 + \cdots + FI_n$ عندئـذ يعرف كثيـر الحـدود المميـز للمصـفوفة A بالشكل:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= det[ZU_{n\times n} - A] \\ &= det[(ZU_{n\times n} - A_0) + (-A_1)I_1 + (-A_2)I_2 + \cdots \\ &\quad + (-A_n)I_n]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= det(ZU_{n\times n} - A_0) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} [det(ZU_{n\times n} - N_i) - det(ZU_{n\times n} - N_{i+1})] I_i \\ &\quad + [det(ZU_{n\times n} - N_n) - det(ZU_{n\times n} - N_0)] I_n\end{aligned}$$

مثال $(1.2.3)$.

لتكن المصفوفة $A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + A_3 I_3$ حيث:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

لنوجد كثير الحدود المميز لها.

الحل:

ليكن $Z = X + YI_1 + TI_2 + FI_3$ عندئذ:

$$; 1 \le j \le nN_0 = A_0,\ N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n$$

$$N_0 = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow ZU_{2\times2} - N_0 = \begin{pmatrix} Z-1 & 0 \\ -1 & Z-1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow det(ZU_{2\times2} - N_0) = Z^2 - 2Z + 1$$

$$N_1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow ZU_{2\times2} - N_1 = \begin{pmatrix} Z & -2 \\ -3 & Z-7 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow det(ZU_{2\times2} - N_1) = Z^2 - 7Z - 6$$

$$N_2 = A_0 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow ZU_{2\times2} - N_2 = \begin{pmatrix} Z+1 & -2 \\ -2 & Z-6 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow det(ZU_{2\times2} - N_2) = Z^2 - 5Z - 10$$

$$N_3 = A_0 + A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow ZU_{2\times2} - N_3 = \begin{pmatrix} Z+1 & -1 \\ -2 & Z-4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow det(ZU_{2\times2} - N_3) = Z^2 - 3Z - 6$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = det(ZU_{2\times2} - N_0) &+ [det(ZU_{2\times2} - N_1) - det(ZU_{2\times2} - N_2)]I_1 \\ &+ [det(ZU_{2\times2} - N_2) - det(ZU_{2\times2} - N_3)]I_2 \\ &+ [det(ZU_{2\times2} - N_3) - det(ZU_{2\times2} - N_0)]I_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = Z^2 - 2Z + 1 &+ [(Z^2 - 7Z - 6\ ) - (Z^2 - 5Z - 10\ )]I_1 \\ &+ [(Z^2 - 5Z - 10\ ) - (Z^2 - 3Z - 6)]I_2 \\ &+ [(Z^2 - 3Z - 6) - (Z^2 - 2Z + 1)]I_3 \end{aligned}$$

$$\varphi(z) = Z^2 - 2Z + 1 + (-Z - 7\ )I_1 + (-2Z - 4\ )I_2 + (-2Z + 4\ )I_3$$

مبرهنـة $(1.2.3)$. كثير الحدود المميز من أجل أي n−refined مصفوفة نتروسوفيكية مربعة يساوي كثير الحدود المميز لمنقولها.

البرهان: يتم البرهان بالأسلوب نفسه ببرهان المبرهنة (1.2.2).

مثال $(2.2.3)$.

لتكن المصفوفة $A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + A_3 I_3$ حيث:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

من المثال (1.2.3) وجدنا أن:

$$\varphi(z) = Z^2 - 2Z + 1 + (-Z - 7)I_1 + (-2Z - 4)I_2 + (-2Z + 4)I_3$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} I_2 + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} I_3 \\ &= B_0 + B_1 I_1 + B_2 I_2 + B_3 I_3 \end{aligned}$$

عندئذ:

$$N_1 = B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow ZU_{2\times2} - N_0 = \begin{pmatrix} Z-1 & -1 \\ 0 & Z-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow det(ZU_{2\times2} - N_0) = Z^2 - 2Z + 1$$

$$N_1 = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow ZU_{2\times2} - N_1 = \begin{pmatrix} Z & -3 \\ -2 & Z-7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow det(ZU_{2\times2} - N_1) = Z^2 - 7Z - 6$$

$$N_2 = B_0 + B_2 + B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow ZU_{2\times2} - N_2 = \begin{pmatrix} Z+1 & -2 \\ -2 & Z-6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow det(ZU_{2\times2} - N_2) = Z^2 - 5Z - 10$$

$$N_3 = A_0 + A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow ZU_{2\times2} - N_3 = \begin{pmatrix} Z+1 & -2 \\ -1 & Z-4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow det(ZU_{2\times2} - N_3) = Z^2 - 3Z - 6$$

$$\psi(z) = det(ZU_{2\times2} - N_0) + [det(ZU_{2\times2} - N_1) - det(ZU_{2\times2} - N_2)]I_1 \\ + [det(ZU_{2\times2} - N_2) - det(ZU_{2\times2} - N_3)]I_2 \\ + [det(ZU_{2\times2} - N_3) - det(ZU_{2\times2} - N_0)]I_3$$

$$\psi(z) = Z^2 - 2Z + 1 + [(Z^2 - 7Z - 6\ ) - (Z^2 - 5Z - 10\ )]I_1 \\ + [(Z^2 - 5Z - 10\ ) - (Z^2 - 3Z - 6)]I_2 \\ + [(Z^2 - 3Z - 6) - (Z^2 - 2Z + 1)]I_3$$

$$\psi(z) = Z^2 - 2Z + 1 + (-Z - 7\ )I_1 + (-2Z - 4\ )I_2 + (-2Z + 4\ )I_3$$

$$\Longrightarrow \psi(z) = \varphi(z)$$

مبرهنة $(2.2.3)$.(كيلي-هاميلتون):

أي مصفوفة من النمط n−refined هي صفر لكثير حدودها المميز.

مثال $(3.2.3)$.

لتكن المصفوفة $A = A_0 + A_1I_1 + A_2I_2 + A_3I_3$ حيث:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

من المثال (1.2.3) وجدنا أن:

$$\varphi(z) = Z^2 - 2Z + 1 + (-Z - 7\ )I_1 + (-2Z - 4\ )I_2 + (-2Z + 4\ )I_3$$

لنوجد $\varphi(A)$:

$$\varphi(A) = A^2 - 2A + 1 + (-A - 7\ )I_1 + (-2A - 4\ )I_2 + (-2A + 4\ )I_3$$

$$\varphi(A) = A^2 - 2A - AI_1 - 2AI_2 - 2AI_3 + U_{2\times2} - 7U_{2\times2}\,I_1 - 4U_{2\times2}I_2 \\ + 4U_{2\times2}I_3$$

$$\varphi(A) = A^2 - (2 + I_1 + 2I_2 + 2I_3\ )A + (1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3\ )U_{2\times2}$$

$$A^2 = AA = N_0N_0 + [N_1N_1 - N_2N_2]I_1 + [N_2N_2 - N_3N_3]I_2 \\ + [N_3N_3 - N_0N_0]I_3$$

$$N_0N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_1N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 21 & 55 \end{pmatrix}$$

$$N_2N_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}$$

$$N_3N_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 21 & 55 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}\right] I_1 + \left[\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}\right] I_2 + \left[\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right] I_3$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} I_1 + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 22 \end{pmatrix} I_2 + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 17 \end{pmatrix} I_3$$

$$-(2 + I_1 + 2I_2 + 2I_3)A = \begin{pmatrix} -2 + I_1 + 2I_2 - 7I_3 & 10I_1 - 7I_2 - 3I_3 \\ -2 - 11I_1 - 4I_2 - 4I_3 & -2 - 4I_1 - 18I_2 - 21I_3 \end{pmatrix}$$

$$(1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3)U_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3 & 0 \\ 0 & 1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 + 6I_1 + 2I_2 + 3I_3 & -10I_1 + 7I_2 + 3I_3 \\ 2 + 11I_1 + 4I_2 + 4I_3 & 1 + 11I_1 + 22I_2 + 17I_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 + I_1 + 2I_2 - 7I_3 & 10I_1 - 7I_2 - 3I_3 \\ -2 - 11I_1 - 4I_2 - 4I_3 & -2 - 4I_1 - 18I_2 - 21I_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3 & 0 \\ 0 & 1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(A) = 0$$

3 – 3– مقلوب المصفوفة النتروسوفيكية المربعة من الشكل n-refined:

سنوضح هذا المفهوم من خلال المثال الآتي:

مثال $(1.3.3)$.

لتكن المصفوفة $A = A_0 + A_1I_1 + A_2I_2 + A_3I_3$ حيث:

$$,\ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

المطلوب:

1. أوجد مقلوب المصفوفة A اعتماداً على التعريف (5.1.3).
2. أوجد مقلوب المصفوفة A اعتماداً على المبرهنة (2.2.3).

الحل:

1. من المثال (3.1.3) وجدنا أن:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{63}{10} & \frac{-7}{10} \\ \frac{-13}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} I_1 + \begin{pmatrix} \frac{76}{60} & \frac{-8}{60} \\ \frac{-2}{60} & \frac{-16}{60} \end{pmatrix} I_2 + \begin{pmatrix} \frac{-10}{6} & \frac{8}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-5}{6} \end{pmatrix} I_3.$$

2. من المثال (1.2.3) لدينا أن:

$$\varphi(z) = Z^2 - 2Z + 1 + (-Z - 7\,)I_1 + (-2Z - 4\,)I_2 + (-2Z + 4\,)I_3$$

حسب المبرهنة (2.2.3) يكون:

$$\varphi(A) = A^2 - 2A + 1 + (-A - 7\,)I_1 + (-2A - 4\,)I_2 + (-2A + 4\,)I_3 = 0$$

$$\Longrightarrow A^2 - (2 + I_1 + 2I_2 + 2I_3\,)A = -(1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3\,)U_{2\times2}$$

$$\Longrightarrow \frac{-1}{(1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3\,)}[A^2 - (2 + I_1 + 2I_2 + 2I_3\,)A] = U_{2\times2}$$

$$\Longrightarrow \frac{-1}{(1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3\,)}[A - (2 + I_1 + 2I_2 + 2I_3\,)U_{2\times2}] = A^{-1}$$

$$detA = 1 + 4I_1 - 4I_2 - 7I_3 \neq 0$$

$$\frac{-1}{(1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3\,)}[A - (2 + I_1 + 2I_2 + 2I_3\,)U_{2\times2}] = A^{-1}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{-1}{(1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3\,)}[A - (2 + I_1 + 2I_2 + 2I_3\,)U_{2\times2}]$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{-1}{(1 - 7I_1 - 4I_2 + 4I_3\,)}\begin{pmatrix} -1 - 2I_1 - 2I_2 - 4I_3 & I_2 + I_3 \\ 1 + 2I_1 + I_3 & -1 + I_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+2I_1+2I_2+4I_3}{1-7I_1-4I_2+4I_3} & \frac{-I_2-I_3}{1-7I_1-4I_2+4I_3} \\ \frac{-1-2I_1-I_3}{1-7I_1-4I_2+4I_3} & \frac{1-I_3}{1-7I_1-4I_2+4I_3} \end{pmatrix}$$

ومن التعريف (2.1.3) نجد أن:

$$\frac{1+2I_1+2I_2+4I_3}{1-7I_1-4I_2+4I_3} = -1 + \frac{63}{10}I_1 + \frac{76}{60}I_2 - \frac{10}{6}I_3$$

$$\frac{-I_2-I_3}{1-7I_1-4I_2+4I_3} = -1 - \frac{7}{10}I_1 - \frac{8}{60}I_2 + \frac{8}{6}I_3$$

$$\frac{-1-2I_1-I_3}{1-7I_1-4I_2+4I_3} = -\frac{13}{10}I_1 - \frac{2}{60}I_2 + \frac{1}{6}I_3$$

$$\frac{1-I_3}{1-7I_1-4I_2+4I_3} = 1 + \frac{1}{10}I_1 - \frac{16}{60}I_2 - \frac{5}{6}I_3$$

إذن:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{63}{10} & \frac{-7}{10} \\ \frac{-13}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} I_1 + \begin{pmatrix} \frac{76}{60} & \frac{-8}{60} \\ \frac{-2}{60} & \frac{-16}{60} \end{pmatrix} I_2 + \begin{pmatrix} \frac{-10}{6} & \frac{8}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-5}{6} \end{pmatrix} I_3$$

$3-4$ القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة النتروسوفيكية المربعة:

تعريف $(\mathbf{1.4.3})$: لتكن $A = A_0 + A_1I_1 + A_2I_2 + \cdots + A_nI_n$ n-refined مصفوفة نتروسوفيكية مربعة وليكن:

$$; 1 \leq j \leq n N_0 = A_0,\ N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n$$

نقول بالتعريف أن $Z = X + YI_1 + TI_2 + \cdots + FI_n$ شعاع ذاتي نتروسوفيكي إذا وفقط إذا كان $AZ = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)Z$. يسمى العدد الحقيقي النتروسوفيكي

$a_0 + a_1I_1 + a_2I_2 + \cdots + a_nI_n$ بالقيمة الذاتية للمصفوفة A.

مبرهنـة $(\mathbf{1.4.3})$. لـتكن $A = A_0 + A_1I_1 + A_2I_2 + \cdots + A_nI_n$ n-refined مصـفوفة نتروسوفيكية مربعة فوق الحقل $R_n(I)$، عندئذ تكون $a_0 + a_1I_1 + a_2I_2 + \cdots + a_nI_n$ قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وفقط إذا كان a_0 قيمة ذاتية للمصفوفة $N_0 = A_0$ وأيضاً كان

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ قيمـة ذاتيـة للمصـفوفة N_1 ، وهكـذا إلـى أن تكـون $a_0 + a_n$ قيمـة ذاتية للمصفوفة N_n وأيضا يكون

$Z = X + YI_1 + TI_2 + \cdots + FI_n$ شـعاع ذاتـي للمصـفوفة A إذا وفقـط إذا كـان X شـعاع ذاتـي للمصـفوفة $N_0 = A_0$ وكان $X + T + \cdots + F$ شعاع ذاتـي للمصفوفة N_1 وهكذا إلى أن يكون $X + F$ شعاع ذاتي للمصفوفة N_n .

البرهان:

لزوم الشرط:

لـــتكن $A = A_0 + A_1I_1 + A_2I_2 + \cdots + A_nI_n$ n-refined مصـــفوفة نتروســـوفيكية مربعة وليكن:

$$N_0 = A_0,\ N_j = A_0 + A_j + A_{j+1} + \cdots + A_n\ ;\ 1 \le j \le n$$

وليكن $Z = X + YI_1 + TI_2 + \cdots + FI_n$ شعاع ذاتي للمصفوفة A.

ولـتكن $a_0 + a_1I_1 + a_2I_2 + \cdots + a_nI_n$ قيمـة ذاتيـة للمصـفوفة A، عندئـذ حسـب التعريـف (1.4.3) يكون:

$AZ = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)Z$ أي أن:

$$(A_0 + A_1I_1 + A_2I_2 + \cdots + A_nI_n)(X + YI_1 + TI_2 + \cdots + FI_n) = (a_0 + a_1I_1 + a_2I_2 + \cdots + a_nI_n)(X + YI_1 + TI_2 + \cdots + FI_n)$$

ومنه وحسب التعريف نجد:

$$A_0X+[(A_0+A_1+A_2+\cdots+A_n)(X+T+\cdots+F)]I_1+\cdots$$
$$+[(A_0+A_n)(X+F)]I_n$$
$$=a_0X+[(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n)(X+T+\cdots+F)]I_1+\cdots$$
$$+[(a_0+a_n)(X+F)]I_n$$

ومنه:

$$N_0X+[(N_1)(X+T+\cdots+F)]I_1\ldots+[(N_n)(X+F)]I_n$$
$$=a_0X+[(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n)(X+T+\cdots+F)]I_1\ldots$$
$$+[(a_0+a_n)(X+F)]I_n$$

بمطابقة الطرفين نحصل على:

$$N_0X=a_0X$$

$$(N_1)(X+T+\cdots+F)=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n)(X+T+\cdots+F),\ldots,$$

$$(N_n)(X+F)=(a_0+a_n)(X+F)$$

إذن وحسب التعريف (1.4.3) ينتج لدينا أن:

a_0 قيمة ذاتية للمصفوفة $N_0=A_0$ وأن X شعاع ذاتي للمصفوفة $N_0=A_0$ ، وأيضاً $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$ قيمة ذاتية للمصفوفة N_1 ، وأن $X+T+\cdots+F$ شعاع ذاتي للمصفوفة N_1 وهكذا إلى أن a_0+a_n قيمة ذاتية للمصفوفة N_n وأن $X+F$ شعاع ذاتي للمصفوفة N_n .

كفاية الشرط:

لتكن $A=A_0+A_1I_1+A_2I_2+\cdots+A_nI_n$ مصفوفة نتروسوفيكية n-refined مربعة وليكن:

$$;1\le j\le nN_0=A_0,\ N_j=A_0+A_j+A_{j+1}+\cdots+A_n$$

ولتكن a_0 قيمة ذاتية للمصفوفة $N_0=A_0$ وأن X شعاع ذاتي للمصفوفة $N_0=A_0$ ، وأيضاً $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$ قيمة ذاتية للمصفوفة N_1 ، وأن $X+T+\cdots+F$ شعاع ذاتي

للمصـفوفة N_1 ، وأن $a_0 + a_n$ قيمـة ذاتيـة للمصـفوفة N_n وأن $X + F$ شـعاع ذاتـي للمصـفوفة N_n .

إذن ومن التعريف (1.4.3) ينتج أن:

$$N_0X = a_0X$$

$$(N_1)(X + Y + T + \cdots + F) \\ = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(X + Y + T + \cdots + F), \dots ,$$

$$(N_n)(X + F) = (a_0 + a_n)(X + F)$$

ومنه:

$$AZ = (A_0 + A_1I_1 + A_2I_2 + \cdots + A_nI_n)(X + YI_1 + TI_2 + \cdots + FI_n) = \\ A_0X + [(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n)(X + Y + T + \cdots + F)]I_1 + \cdots + \\ [(A_0 + A_n)(X + F)]I_n$$

ومنه:

$$AZ = N_0X + [(N_1)(X + Y + T + \cdots + F)]I_1 \dots + [(N_n)(X + F)]I_n$$

وبما أن:

$$N_0X = a_0X$$

$$(N_1)(X + Y + T + \cdots + F) \\ = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(X + Y + T + \cdots + F), \dots ,$$

$$(N_n)(X + F) = (a_0 + a_n)(X + F)$$

إذن:

$$AZ = a_0X + [(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(X + Y + T + \cdots + F)]I_1 \dots \\ + [(a_0 + a_n)(X + F)]I_n =$$

$$(a_0 + a_1I_1 + a_2I_2 + \cdots + a_nI_n)(X + YI_1 + TI_2 + \cdots + FI_n) \\ = (a_0 + a_1I_1 + a_2I_2 + \cdots + a_nI_n)Z$$

العلاقة الأخيرة ومن التعريف (1.4.3) ينتج أن $(a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_n I_n)$ قيمة ذاتية للمصفوفة A وأن $X + YI_1 + TI_2 + \cdots + FI_n$ شعاع ذاتي للمصفوفة A.

مبرهنة $(\mathbf{2.4.3})$. القيم الذاتية للمصفوفة $A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 + \cdots + A_n I_n$ نحصل عليها بحل المعادلة النتروسوفيكية:

$$det[A - (a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_n I_n)U_{n\times n}] = 0$$

البرهان:

لدينا وحسب تعريف محدد المصفوفة النتروسوفيكية:

$$\begin{aligned} & det[A - (a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_n I_n)U_{n\times n}] \\ & \quad = det[(A_0 - a_0 U_{n\times n}) - (A_1 - a_1 U_{n\times n})I_1 - \cdots \\ & \quad - (A_n - a_n U_{n\times n})I_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \det(A - (a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_n I_n)U_{n\times n}) \\ & \quad = \det(A_0 - a_0 U_{n\times n}) \\ & \quad + I_1[\det(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n - (a_0 + a_1 + a_2 \\ & \quad + \cdots +)U_{n\times n}) \\ & \quad - \det(A_0 + A_2 + \cdots + A_n - (a_0 + a_2 + \cdots + a_n)U_{n\times n})] \\ & \quad + I_n[\det(A_0 + A_n - (a_0 + a_n)U_{n\times n}) - \det(A_0 - a_0 U_{n\times n})] \\ & \quad = 0 \end{aligned}$$

بمطابقة الطرفين نجد أن:

$$\begin{aligned} & \det(A_0 - a_0 U_{n\times n}) \\ & \quad = \det(A_0 + A_2 + \cdots + A_n - (a_0 + a_2 + \cdots + a_n)U_{n\times n}) \\ & \quad = \det(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n - (a_0 + a_1 + a_2 \\ & \quad + \cdots +)U_{n\times n}) = \cdots = \det(A_0 + A_n - (a_0 + a_n)U_{n\times n}) \\ & \quad = \det(A_0 + A_n - (a_0 + a_n)U_{n\times n}) = 0 \end{aligned}$$

إذ a_0 قيمة ذاتية للمصفوفة $N_0 = A_0$ و $(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ قيمة ذاتية للمصفوفة N_1 وهكذا إلى أن نجد أن $(a_0 + a_n)$ قيمة ذاتية للمصفوفة N_n.

3 − 5 − n- REFINRD معادلة خطية نتروسوفيكية:

تعريف $(\mathbf{1.5.3})$.

ليكن $F_n(I)$ n-REFINED حقل نتروسوفيكي عندئذ نعرف n-REFINED معادلة خطية فوق الحقل $F_n(I)$ بالشكل:

$$AX + B = 0 \ldots \ (1.5.3)$$

حيث أن:

$$A = a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_n I_n$$

$$B = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_2 + \cdots + b_n I_n$$

$$X = x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + \cdots + x_n I_n$$

ويعطى حلها بالشكل:

$$AX + B = 0 \Longrightarrow AX = -B \Longrightarrow X = -A^{-1}B \ldots \ (2.5.3)$$

تعريف $(\mathbf{2.5.3})$.

ليكن n-REFINED حقل نتروسوفيكي عندئذ نعرف جملة n-REFINED معادلة خطية بالشكل فوق الحقل $F_n(I)$:

$$\begin{Bmatrix} A_1X_1 + B_1 = 0 \\ A_2X_2 + B_2 = 0 \\ \vdots \\ A_nX_n + B_n = 0 \end{Bmatrix} \ldots \ (3.5.3)$$

ويعطى حلها وفقاً للعلاقة (2.5.3) حيث أن A هي n-REFINED مصفوفة نتروسوفيكية وأن X هـي n-REFINED مصـفوفة نتروسـوفيكية عموديـة، وأن B هـي n-REFINED مصـفوفة نتروسوفيكية عمودية.

مثال $(\mathbf{1.5.3})$.

أوجد حلول جملة المعادلات النتروسوفيكية الآتية:

$$(2 + I_1 + 3I_2)X_0 + (1 - I_1 - I_2)X_1 = -I_1$$

$$(3 + 4I_2)X_0 + (1 + I_1)X_1 = I_2$$

الحل:

لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 2 + I_1 + 3I_2 & 1 - I_1 - I_2 \\ 3 + 4I_2 & 1 + I_1 \end{pmatrix}$$

وهذه المصفوفة تكتب بالشكل:

$$A = A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2$$

حيث:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ولدينا:

$$X = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

الآن اعتماداً على التعريف (5.1.3) نجد أن:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{9}{95} I_1 + \frac{6}{5} I_2 & 1 + \frac{1}{19} I_1 - I_2 \\ 3 + \frac{98}{95} I_1 - \frac{22}{5} I_2 & -2 - \frac{13}{19} I_1 + 3I_2 \end{pmatrix}$$

عندئذ حسب العلاقة (2.5.3) نجد أن:

$$X = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{9}{95} I_1 + \frac{6}{5} I_2 & 1 + \frac{1}{19} I_1 - I_2 \\ 3 + \frac{98}{95} I_1 - \frac{22}{5} I_2 & -2 - \frac{13}{19} I_1 + 3I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

ومنه حسب التعريف (3.1.3) يكون:

$$X = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} I_1 \\ -\frac{6}{19} I_1 + I_2 \end{pmatrix}$$

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية الخطية النيوتروسوفكية باستخدام دالة السُمُك النيوتروسوفيكية

مقدمة:

تعتبر المعادلات التفاضلية أحد الفروع الهامة في الرياضيات، وفيما يتعلق بمنطق النيوتروسوفيك لم يسبق لأحد وأن قام بتعريف لنمط المعادلات التفاضلية النيوتروسوفيكية، لذلك كانت الفكرة بدايةً تقديم مفهوم لتكامل دالة السمك النيوتروسوفيكية لما لها من أهمية بالغة في منطق النتروسوفيك، واستخدام هذه الدالة وتكاملها في تعريف أنماط متنوعة للمعادلات التفاضلية نتروسوفيكياً، كالمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى، ومعادلتي برنولي وريكاتي، والمعادلات التامة، وعوامل التكميل، بالإضافة لإدخال مفهوم دالة السمك النيوتروسوفيكية في تحويل لابلاس واستخدامه في حل بعض المعادلات التفاضلية الخطية النتروسوفيكية، فاتحين المجال أمام المهتمين والباحثين في النيوتروسوفيك لدراسة أنماط أخرى للمعادلات التفاضلية النيوتروسوفيكية، كالمعادلات التفاضلية النيوتروسوفيكية من مراتب عليا.

$4-1$ تكامل دالة السمك النيوتروسوفيكية:

تعريف $(\mathbf{4.1.1})$. لتكن $m(x)=[m_1(x),m_2(x)]$ دالة السمك النيوتروسوفيكية عندئذ يعرف مفهوم تكامل هذه الدالة بالشكل:

$$\int m(x)dx=\int[m_1(x),m_2(x)]dx$$
$$=\left[\int m_1(x)\,dx+c_1,\int m_2(x)\,dx+c_2\right]=[A,B]\quad(48)$$

حيث $c_1=a_1+b_1I_1$ و $c_2=a_2+b_2I_2$ ثابتي التكاملين.

مثال $(\mathbf{4.1.1})$.

لتكن $m(x)=[m_1(x),m_2(x)]=\left[xe^x,xe^{x^2}\right]$ عندئذ:

$$\int m(x)dx=\int[xe^x,xe^{x^2}]dx=\left[\int xe^x\,dx+c_1,\int xe^{x^2}dx+c_2\right]$$
$$=[A,B]$$

$$A=\int xe^x\,dx+c_1=x.e^x-e^x+c_1$$

$$B=\int xe^{x^2}dx+c_2=\frac{1}{2}.e^{x^2}+c_2$$

$$\int m(x)dx = \left[x.e^{x} - e^{x} + c_1, \frac{1}{2}.e^{x^2} + c_2\right]$$

مثال $(\mathbf{2.1.4})$.

لتكن $m(x) = [m_1(x), m_2(x)] = \left[\frac{1}{1+x^2}, \frac{x^2}{1+x^2}\right]$ عندئذ:

$$\int m(x)dx = \int \left[\frac{1}{1+x^2}, \frac{x^2}{1+x^2}\right] dx$$

$$= \left[\int \frac{1}{1+x^2}\ dx + c_1\ , \int \frac{x^2}{1+x^2} dx + c_2\ \right] = [A, B]$$

$$A = \int \frac{1}{1+x^2}\ dx + c_1 = arc\ tg(x) + c_1$$

$$B = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx + c_2 = x - arc\ tg(x) + c_2$$

$$\int m(x)dx = [arc\ tg(x) + c_1, x - arc\ tg(x) + c_2]$$

$4 - 2$ المعادلة التفاضلية الخطية النيويتروسوفيكية من المرتبة الأولى:

المعادلة التفاضلية الخطية النيوتروسوفيكية المتجانسة:

تم تعريف المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة النيوتروسوفيكية لدالة السمك بالشكل:

$$\acute{y} + m(x)y = 0\ ;\ m(x) = [m_1(x), m_2(x)] \quad (49)$$

طريقة الحل:

$$\acute{y} + m(x)y = 0$$

$$\acute{y} + [m_1(x), m_2(x)]y = 0$$

$$\acute{y} = -[m_1(x), m_2(x)]y$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = -[m_1(x), m_2(x)]$$

بمكاملة الطرفين نجد:

$$\ln\frac{y}{c} = -\int [m_1(x), m_2(x)]\ dx = -\left[\int m_1(x)\ dx\ , \int m_2(x)\ dx\right]$$

ومنه:

$$y = c\left[e^{-\int m_1(x)\,dx}, e^{-\int m_2(x)\,dx}\right] \;\ldots\ldots\; (50)$$

حيث $c = a + bI$ ثابت التكامل.

العلاقة (50) حل المعادلة التفاضلية (49).

مثال $(\mathbf{2.2.4})$.

أوجد الحل للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\acute{y} + \left[\frac{1}{x}, 2x\right] y = 0$$

الحل:

نلاحظ أن: $m_1(x) = \frac{1}{x}$ و $m_2(x) = 2x$.

الآن بالتعويض بشكل مباشر بالعلاقة (2) نجد أن:

$$y = (a + bI)\left[e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}, e^{-\int 2x\,dx}\right] = (a + bI)\left[e^{-\ln x}, e^{-x^2}\right]$$
$$= (a + bI)\left[\frac{1}{x}, e^{-x^2}\right]$$

ومنه الحل العام للمعادلة هو:

$$y = (a + bI)\left[\frac{1}{x}, e^{-x^2}\right]$$

$4.2.4$ المعادلة التفاضلية الخطية النيوتروسوفيكية غير المتجانسة:

تعريف $\mathbf{5.2.4}$:

تم تعريف المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة النيوتروسوفيكية لدالة السمك بالشكل:

$$\acute{y} + m(x)y = f(x)$$

حيث: $m(x) = [m_1(x), m_2(x)]$ و $f(x) = [f_1(x), f_2(x)]$

عندئذ تأخذ هذه المعادلة أحد الأشكال الآتية:

$$\acute{y} + [m_1(x), m_2(x)]y = q(x) \ldots\ldots (51)$$

$$\acute{y} + p(x)y = [f_1(x), f_2(x)] \ldots\ldots (52)$$

$$\acute{y} + [m_1(x), m_2(x)]y = [f_1(x), f_2(x)] \quad (53)$$

طريقة الحل:

كما هو الحال في المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة الكلاسيكية توجد عدة طرق لحلها منها طريقة لاغرانج (تغيير الثابت) وطريقة أويلر (عامل التكميل).

ولكن نعرض في هذا الفصل الحل فقط باستخدام طريقة أويلر.

والآن نعتمد في طريقة الحل على النموذج الأول وباقي النماذج بالطريقة نفسها.

$$\acute{y} + [m_1(x), m_2(x)]y = q(x)$$

خطوات الحل:

أولاً: نوجد عامل التكميل للمعادلة (51) كما يلي:

$$\mu(x) = e^{\int [m_1(x), m_2(x)]dx}$$

ثانياً: نضرب طرفي المعادلة (51) بعامل التكميل نجد:

$$\mu(x)\acute{y} + \mu(x)[m_1(x), m_2(x)]y = q(x)\mu(x)$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر ما هو إلا مشتق الدالة: $\mu(x)y$ وبالتالي يمكن كتابة المعادلة بالشكل:

$$\big(y\mu(x)\big)' = q(x)\mu(x)$$

ثالثاً: بمكاملة العلاقة الأخيرة نحصل على الحل العام للمعادلة (51) وهو:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(a + bI + \int q(x)\mu(x)dx\right) \dots\dots \ (54)$$

مثال $(\mathbf{6.2.3})$.

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة النيوتروسوفيكية الآتية:

$$\acute{y} + \left[2x, \frac{1}{x}\right]y = x$$

الحل:

المعادلة المعطاة من النموذج الأول أي:

$$\acute{y} + [m_1(x), m_2(x)]y = q(x)$$

نوجد عامل التكميل:

$$\mu(x) = \left[e^{x^2}, x\right]$$

بالتعويض المباشر بالعلاقة (54) نجد:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(a + bI + \int x\mu(x)dx\right)$$
$$= \frac{1}{\left[e^{x^2}, x\right]}\left(a + bI + \left[\int xe^{x^2}dx, \int x^2dx\right]\right)$$

حيث:

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\, e^{x^2}$$

$$\int x^2dx = \frac{1}{3}\, x^3$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y = \frac{1}{\left[e^{x^2}, x\right]}\left(a + bI + \left[\frac{1}{2}e^{x^2}, \frac{1}{3}x^3\right]\right)$$

مثال $(\mathbf{7.2.4})$.

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\acute{y} + cot(x)\, y = [sin(x), cos(x)]$$

الحل:

المعادلة المعطاة من النموذج الثاني أي:

$$\acute{y} + p(x)y = [f_1(x), f_2(x)]$$

نوجد عامل التكميل نجد:

$$\mu(x) = sin(x)$$

الآن بضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل نجد أن الحل العام يكتب بالشكل:

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left(a+bI+\int \mu(x)\,.\,[sin(x),cos(x)]dx\right)$$
$$=\frac{1}{sin(x)}\left(a+bI+\int sin(x)\,.\,[sin(x),cos(x)]dx\right)$$
$$=\frac{1}{sin(x)}\left(a+bI+\left[\int sin^2(x)\,dx,\int sin(x).\,cos(x)\,dx\right]\right)$$

حيث:

$$\int sin^2(x)\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sin(2x)$$

$$\int sin(x).\,cos(x)\,dx=\frac{1}{2}\int sin(2x)dx=-\frac{1}{4}cos(2x)$$

إذن الحل العام هو:

$$y=\frac{1}{sin(x)}\left(a+bI+\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sin(2x)\,,-\frac{1}{4}cos(2x)\right]\right)$$

مثال $(8.2.4)$.

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية النيتروسوفيكية الآتية:

$$\acute{y}+\left[\frac{1}{x},x\right]y=[x^2,x]$$

الحل:

المعادلة المعطاة من النموذج الثالث أي:

$$\acute{y}+[m_1(x),m_2(x)]y=[f_1(x),f_2(x)]$$

نوجد عامل التكميل فنجد:

$$\mu(x)=\left[\,x,e^{\frac{1}{2}x^2}\right]$$

الآن بضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل نجد أن الحل العام يكتب بالشكل:

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left(a+bI+\int\mu(x)\,[f_1(x),f_2(x)]dx\right)$$
$$=\frac{1}{\left[x,e^{\frac{1}{2}x^2}\right]}\left(a+bI+\int\left[x,e^{\frac{1}{2}x^2}\right].[x^2,x]dx\right)$$
$$=\frac{1}{\left[x,e^{\frac{1}{2}x^2}\right]}\left(a+bI+\left[\int x.x^2\,dx,\int x.e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx\right]\right)$$
$$=\frac{1}{\left[x,e^{\frac{1}{2}x^2}\right]}\left(a+bI+\left[\int x^3\,dx,\int x.e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx\right]\right)$$

حيث:

$$\int x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4$$
$$\int x.e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx=e^{\frac{1}{2}x^2}$$

إذن الحل العام هو:

$$y=\frac{1}{\left[x,e^{\frac{1}{2}x^2}\right]}\left(a+bI+\left[\frac{1}{4}x^4,e^{\frac{1}{2}x^2}\right]\right)$$

$4-3-$ معادلة برنولي النيوتروسوفيكية:

تعريف ($\mathbf{1.3.4}$).

تأخذ معادلة برنولي نيوتروسوفيكياً أحد الأشكال الآتية:

$$\acute{y}+[p_1(x),p_2(x)]y=q(x)y^n \quad (55)$$
$$\acute{y}+p(x)y=[q_1(x),q_2(x)]y^n \quad (56)$$
$$\acute{y}+[p_1(x),p_2(x)]y=[q_1(x),q_2(x)]y^n \quad (57)$$

طريقة الحل:

سنعتمد في طريقة الحل على النموذج الأول وباقي النماذج بالطريقة نفسها.

$$\acute{y}+[p_1(x),p_2(x)]y=q(x)y^n$$

أولاً: نقسم طرفي المعادلة (55) على y^n فتأخذ المعادلة الشكل:

$$\acute{y}y^{-n} + [p_1(x), p_2(x)]y^{-n+1} = q(x) \quad (58)$$

ثانياً: نجري تغيير في المتحول من الشكل:

$$z = y^{-n+1}$$

عندئذ:

$$\acute{z} = (-n+1)y^{-n}\acute{y}$$

ومنه:

$$\acute{y} = \frac{y^n \acute{z}}{-n+1}$$

ثالثاً: نعوض في المعادلة (58) نحصل على المعادلة:

$$\acute{z}y^{-n} + (-n+1)[p_1(x), p_2(x)]z = (-n+1)q(x) \quad (59)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة ويعطى حلها بالشكل:

$$z = \frac{1}{\mu(x)}\left(a + bI + \int \mu(x)q(x)dx\right)$$

حيث $\mu(x)$ عامل التكميل للمعادلة (59).

رابعاً: يعطى حل المعادلة (55) بالشكل:

$$y = \{z\}^{\frac{1}{-n+1}}$$

مثال $(2.3.4)$.

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية النيوتروسوفيكية الآتية:

$$\acute{y} - \left[x, \frac{1}{x}\right]y = xy^3$$

الحل:

المعادلة المعطاة هي معادلة برنولي من النموذج الأول أي:

$$\acute{y} + [p_1(x), p_2(x)]y = q(x)y^n$$

نقسم طرفي المعادلة على y^3 فتأخذ المعادلة الشكل:

$$\acute{y}y^{-3} - \left[x, \frac{1}{x}\right] y^{-2} = x \quad (60)$$

نجري تغيير في المتحول من الشكل:

$$z = y^{-2}$$

عندئذ:

$$\acute{z} = -2y^{-3}\acute{y}$$

ومنه:

$$\acute{y} = \frac{-y^3 \acute{z}}{2}$$

نعوض في المعادلة (60) نحصل على المعادلة:

$$\acute{z} + \left[2x, \frac{2}{x}\right] z = -2x$$

وهــــي معادلـــة تفاضـــلية خطيـــة غيـــر متجانســـة عامـــل التكميـــل لهـــا هـــو:

$$\mu(x) = \left[e^{x^2}, x^2\right]$$

ويعطى حلها بالشكل:

$$z = \frac{1}{\mu(x)}\left(a + bI + \int \mu(x) q(x) dx\right)$$

إذن:

$$z = \frac{1}{\left[e^{x^2}, x^2\right]}\left(a + bI + \left[\int -2xe^{x^2} dx \,, \int -2x^3 dx \,\right]\right)$$

$$z = \frac{1}{\left[e^{x^2}, x^2\right]}\left(a + bI + \left[\int -e^{x^2} dx \,, \int \frac{-x^4}{2} dx \,\right]\right)$$

وأخيراً يعطى حل المعادلة بالشكل:

$$y = \left\{\frac{1}{\left[e^{x^2}, x^2\right]}\left(a + bI + \left[-e^{x^2}, \frac{-x^4}{2}\right]\right)\right\}^{\frac{-1}{2}}$$

مثال $(3.3.4)$.

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\acute{y} + \frac{1}{x}\, y = \left[-\ln(x)\,, \frac{1}{x}\right] y^2$$

الحل:

المعادلة المعطاة هي معادلة برنولي من النموذج الثاني أي:

$$\acute{y} + p(x)y = [q_1(x), q_2(x)]y^n$$

نقسم طرفي المعادلة على y^2 فتأخذ المعادلة الشكل:

$$\acute{y}y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = \left[-\ln(x)\,, \frac{1}{x}\right] \;\ldots\ldots\; (61)$$

نجري تغيير في المتحول من الشكل:

$$z = y^{-1}$$

عندئذ:

$$\acute{z} = -y^{-2}\acute{y}$$

ومنه:

$$\acute{y} = -y^2\acute{z}$$

نعوض في المعادلة (61) نحصل على المعادلة:

$$\acute{z} - \frac{1}{x}z = \left[\ln(x)\,, \frac{-1}{x}\right]$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة عامل التكميل لها هو:

$$\mu(x) = \frac{1}{x}$$

ويعطى حلها بالشكل:

$$z = \frac{1}{\mu(x)}\left(a + bI + \int \mu(x)q(x)dx\right)$$

إذن:

$$z = \frac{1}{\frac{1}{x}}\left(a + bI + \left[\int \frac{\ln(x)}{x} dx \,, \int \frac{-1}{x^2} dx\right]\right)$$

$$z = x\left(a + bI + \left[\ln(\ln x)\,, \frac{1}{x}\right]\right)$$

وأخيراً يعطى حل المعادلة بالشكل:

$$y = \left\{x\left(a + bI + \left[\ln(\ln x)\,, \frac{1}{x}\right]\right)\right\}^{-1}$$

مثال $(\mathbf{4.3.4})$.

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية النيوتروسوفيكية الآتية:

$$\acute{y} + [tanx, cotx]y = [sinx, cosx]y^2$$

الحل:

المعادلة المعطاة هي معادلة برنولي من النموذج الثالث أي:

$$\acute{y} + [p_1(x), p_2(x)]y = [q_1(x), q_2(x)]y^n$$

نقسم طرفي المعادلة على y^2 فتأخذ المعادلة الشكل:

$$\acute{y}y^{-2} + [tanx, cotx]y^{-1} = [sinx, cosx] \quad (62)$$

نجري تغيير في المتحول من الشكل:

$$z = y^{-1}$$

عندئذ:

$$\acute{z} = -y^{-2}\acute{y}$$

ومنه:

$$\acute{y} = -y^2\acute{z}$$

نعوض في المعادلة (62) نحصل على المعادلة:

$$\acute{z} + [-tanx, -cotx]z = [-sinx, -cosx]$$

وهـــي معادلـــة تفاضـــلية خطيـــة غيـــر متجانســـة عامـــل التكميـــل لهـــا هـــو:

$$\mu(x) = \left[cosx, \frac{1}{sinx}\right]$$

ويعطى حلها بالشكل:

$$z = \frac{1}{\mu(x)}\left(a + bI + \int \mu(x)q(x)dx\right)$$

إذن:

$$z = \frac{1}{\left[cosx, \frac{1}{sinx}\right]}\left(a + bI + \left[\int -sinx\ cosxdx\ , \int \frac{-cosx}{sinx}dx\ \right]\right)$$

$$z = \frac{1}{\left[cosx, \frac{1}{sinx}\right]}\left(a + bI + \left[\frac{1}{4}cos2x\ , -\ln(sinx)\right]\right)$$

وأخيراً يعطى حل المعادلة بالشكل:

$$y = \left\{\frac{1}{\left[cosx, \frac{1}{sinx}\right]}\left(a + bI + \left[\frac{1}{4}cos2x\ , -\ln(sinx)\right]\right)\right\}^{-1}$$

4 – 4– المعادلة التفاضلية التامة النيوتروسوفيكية:

تعريف $(\mathbf{1.4.4})$.

لتكن المعادلة التفاضلية:

$$[p_1(x,y), p_2(x,y)]dx + [q_1(x,y), q_2(x,y)]dy = 0 \quad (63)$$

نقول عن المعادلة (63) أنها تامة إذا حققت الشرطين الآتيين:

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial q_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial y} = \frac{\partial p_2}{\partial x}$$

ويعطى حلها بالعلاقة:

$$\left[\int_{x_0}^{x} p_1(x,y)dx\,,\int_{x_0}^{x} p_2(x,y)dx\right]+\left[\int_{y_0}^{y} q_1(x_0,y)dy\,,\int_{y_0}^{y} q_2(x_0,y)dy\right]$$
$$= a + bI \ \dots\dots\ (64)$$

حيث x_0 و y_0 ثوابت اختيارية.

مثال $(\mathbf{2.4.4})$.

أثبت أن المعادلة التفاضلية الآتية تامة وأوجد حلها:

$$[3x^2+6xy^2, y-2x^3]dx+[6xy^2+4y^3, x]dy=0$$

الحل:

لدينا:

$$\frac{\partial p_1}{\partial y}=12xy\,,\frac{\partial q_1}{\partial x}=12xy\ \Longrightarrow \frac{\partial p_1}{\partial y}=\frac{\partial q_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial y}=1\,,\frac{\partial q_2}{\partial x}=1\ \Longrightarrow \frac{\partial p_2}{\partial y}=\frac{\partial q_2}{\partial x}$$

إذن الشروط محققة فالمعادلة تامة ويعطى حلها بالشكل:

$$\left[\int_{x_0}^{x} p_1(x,y)dx\,,\int_{x_0}^{x} p_2(x,y)dx\right]+\left[\int_{y_0}^{y} q_1(x_0,y)dy\,,\int_{y_0}^{y} q_2(x_0,y)dy\right]$$
$$= a + bI$$

باختيار $x_0=y_0=0$ نجد:

$$\left[\int_{0}^{x} 3x^2+6xy^2dx\,,\int_{0}^{x} y-2x^3dx\right]+\left[\int_{0}^{y} 4y^3dy\,,\int_{0}^{y} 0\ dy\right]=a+bI$$

$$\left[x^3+3x^2y^2, yx-\frac{1}{2}x^4\right]+[y^4, a_1+b_1I_1]\ =a+bI$$

$$\left[x^3+3x^2y^2+y^4\,, yx-\frac{1}{2}x^4+a_1+b_1I_1\right]\ =a+bI$$

4 – 5– المعادلة التفاضلية غير التامة النتروسوفيكية وعوامل التكميل:

تعريف ($\mathbf{1.5.4}$). لتكن المعادلة التفاضلية:

$$[p_1(x,y),p_2(x,y)]dx+[q_1(x,y),q_2(x,y)]dy=0 \quad (65)$$

نقول عن المعادلة أنها غير تامة إذا كان:

$$\frac{\partial p_1}{\partial y}\neq\frac{\partial q_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial y}\neq\frac{\partial p_2}{\partial x}$$

طريقة الحل:

1- نبحث عن عامل تكميل للمعادلة بالشكل:

$$\mu(z)=[\mu_1(z),\mu_2(z)]$$

حيث $z=z(x,y)$.

$$\frac{d\ln\mu_1(z)}{dz}=\frac{\dfrac{\partial p_1}{\partial y}-\dfrac{\partial q_1}{\partial x}}{q_1\dfrac{\partial z}{\partial x}-p_1\dfrac{\partial z}{\partial y}}$$

$$\frac{d\ln\mu_2(z)}{dz}=\frac{\dfrac{\partial p_2}{\partial y}-\dfrac{\partial q_2}{\partial x}}{q_2\dfrac{\partial z}{\partial x}-p_2\dfrac{\partial z}{\partial y}}$$

2- نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل نحصل على المعادلة:

$$[\mu_1(z)p_1(x,y),\mu_2(z)p_2(x,y)]dx+[\mu_1(z)q_1(x,y),\mu_2(z)q_2(x,y)]dy=0$$

تصبح المعادلة تامة وحلها يعطى بالعلاقة (64).

مثال ($\mathbf{2.5.4}$).

أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية علماً أنها تقبل عامل تكميل تابع فقط ل x.

$$\left[2xy+x^2y+\frac{1}{3}y^3,\frac{y}{x^2}-2x\right]dx+\left[x^2+y^2,\frac{1}{x}\right]dy=0$$

الحل: عامل التكميل تابع فقط ل x أي $z=x$.

$$\mu(x) = [\mu_1(x), \mu_2(x)]$$

$$\frac{d \ln \mu_1(x)}{dx} = \frac{\dfrac{\partial p_1}{\partial y} - \dfrac{\partial q_1}{\partial x}}{q_1 \dfrac{\partial z}{\partial x} - p_1 \dfrac{\partial z}{\partial y}} = 1 \Longrightarrow \mu_1(x) = e^x$$

$$\frac{d \ln \mu_2(z)}{dz} = \frac{\dfrac{\partial p_2}{\partial y} - \dfrac{\partial q_2}{\partial x}}{q_2 \dfrac{\partial z}{\partial x} - p_2 \dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{1}{x} \Longrightarrow \mu_2(x) = x^2$$

إذن:

$$\mu(x) = [e^x, x^2]$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فنحصل على المعادلة التامة الآتية:

$$\left[e^x\left(2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3\right), y - 2x^3\right]dx + [e^x(x^2 + y^2), x]dy = 0$$

يعطى حلها بالعلاقة:

$$\left[\int_{x_0}^{x} e^x\left(2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)dx\,, \int_{x_0}^{x}(y - 2x^3)dx\right] + \left[\int_{y_0}^{y} e^{x_0}({x_0}^2 + y^2)dy\,, \int_{y_0}^{y} x_0 dy\right] = a + bI$$

باختيار $x_0 = y_0 = 0$ نجد:

$$\left[\int_{0}^{x} e^x\left(2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)dx\,, \int_{0}^{x}(y - 2x^3)dx\right] + \left[\int_{0}^{y} y^2 dy\,, \int_{y_0}^{y}(0)\,dy\right] = a + bI$$

$$\left[yx^2e^x + \frac{1}{3}y^3e^x, yx - \frac{x^4}{2}\right] + \left[\frac{1}{3}y^3, a_1 + b_1I_1\right] = a + bI$$

$$\left[yx^2e^x + \frac{1}{3}y^3e^x + \frac{1}{3}y^3, yx - \frac{x^2}{4} + a_1 + b_1I_1\right] = a + bI$$

مثال $(\mathbf{3.5.4})$.

أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية علماً أنها تقبل عامل تكميل من الشكل $z = x + y$.

$$[5x^2 + 2xy + 3y^3, x^2 - y^2 + 2x]dx + [3x^2 + 3xy^2 + 6y^3, x^2 - y^2 - 2y]dy = 0$$

الحل: عامل التكميل من الشكل $z = x + y$.

$$\mu(x) = [\mu_1(x), \mu_2(x)]$$

$$\frac{d \ln \mu_1(x)}{dx} = \frac{\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\partial q_1}{\partial x}}{q_1 \frac{\partial z}{\partial x} - p_1 \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{2}{x + y} \Longrightarrow \mu_1(x) = (x + y)^2$$

$$\frac{d \ln \mu_2(z)}{dz} = \frac{\frac{\partial p_2}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial x}}{q_2 \frac{\partial z}{\partial x} - p_2 \frac{\partial z}{\partial y}} = 1 \Longrightarrow \mu_2(x) = e^{x+y}$$

إذن:

$$\mu(x) = [(x + y)^2, e^{x+y}]$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فنحصل على المعادلة التامة الآتية:

$$[(x + y)^2(5x^2 + 2xy + 3y^3), (x^2 - y^2 + 2x)e^{x+y}]dx + [(x + y)^2(3x^2 + 3xy^2 + 6y^3), (x^2 - y^2 - 2y)e^{x+y}]dy = 0$$

يعطى حلها بالعلاقة:

$$\left[\int_{x_0}^{x} (x + y)^2(5x^2 + 2xy + 3y^3)dx \,, \int_{x_0}^{x} (x^2 - y^2 + 2x)e^{x+y}dx\right] + \left[\int_{y_0}^{y} (x_0 + y)^2(3{x_0}^2 + 3x_0y^2 + 6y^3)dy \,, \int_{y_0}^{y} ({x_0}^2 - y^2 - 2y)e^{x_0+y}dy\right] = a + bI$$

باختيار $x_0 = y_0 = 0$ نجد:

$$\left[\int_0^x (x+y)^2(5x^2+2xy+3y^3)dx\,,\int_0^x (x^2-y^2+2x)e^{x+y}dx\right] + \left[\int_0^y 6y^5dy\,,\int_0^y (-y^2-2y)e^y dy\right] = a+bI$$

$$[x^5+3yx^4+(y^3+2xy+3y^3)x^3+(3y^4+y^3)x^2 + 3xy^5,(x^2-y^2)e^{x+y}] + [y^6,-y^2e^y] = a+bI$$

$$[(y^3+2xy+3y^3)x^3+(3y^4+y^3)x^2+3xy^5+y^6,(x^2-y^2)e^{x+y} - y^2e^y] = a+bI$$

$4-6-$ معادلة ريكاتي النتروسوفيكية:

تعريف $(\mathbf{1.6.4})$.

تأخذ معادلة ريكاتي نيتروسوفيكياً الشكل الآتي:

$$\acute{y}+[p_1(x),p_2(x)]y^2+[q_1(x),q_2(x)]y+[r_1(x),r_2(x)]=0 \quad (65)$$

وتقبل حلاً خاصاً من الشكل:

$$y_1=[f_1(x),f_2(x)]$$

طريقة الحل:

1- نجري تغيير في المتحول من الشكل:

$$y=[f_1(x)+z_1,f_2(x)+z_2]$$

نوجد $\acute{y}=\left[\acute{f}_1(x)+\acute{z}_1\,,\acute{f}_2(x)+\acute{z}_2\right]$

2- نعوض في المعادلة (65) فنحصل على معادلتي برنولي وتم ذكر طريقة حل هذه المعادلة، بحل معادلتي برنولي الناتجتين نحصل على حل معادلة ريكاتي.

مثال $(\mathbf{2.6.3})$.

أوجد حل معادلة ريكاتي الآتية علماً أنها تقبل حل خاص من الشكل:

$$y_1=[cosx,-x^2]$$

$$\acute{y} + \left[\frac{cosx}{1 - sinx\ cosx}, \frac{1}{1 - x^3}\right] y^2 + \left[\frac{-1}{1 - sinx\ cosx}, \frac{-x^2}{1 - x^3}\right] y + \left[\frac{sinx}{1 - sinx\ cosx}, \frac{-2x}{1 - x^3}\right] = 0$$

الحل:

1- نجري تغيير في المتحول من الشكل:

$$y = [cosx + z_1, -x^2 + z_2]$$

$$\acute{y} = [-sinx + \acute{z}_1\ , -2x + \acute{z}_2]$$

نعوض في المعادلة المعطاة نجد:

$$[-sinx + \acute{z}_1\ , -2x + \acute{z}_2] \left[\frac{cosx}{1 - sinx\ cosx}, \frac{1}{1 - x^3}\right] [{z_1}^2 + 2cosx z_1 + cos^2x\ , {z_2}^2 - 2x z_2 + 4x^4] + \left[\frac{-1}{1 - sinx\ cosx}, \frac{-x^2}{1 - x^3}\right] [cosx + z_1, -x^2 + z_2] + \left[\frac{sinx}{1 - sinx\ cosx}, \frac{-2x}{1 - x^3}\right] = 0$$

$$\left[\acute{z}_1 - \frac{2cos^2x - 1}{1 - sinx\ cosx} z_1 - \frac{cosx}{1 - sinx\ cosx} {z_1}^2, \acute{z}_2 + \frac{3x^2}{1 - x^3} z_2 - \frac{1}{1 - x^3} {z_1}^2\right] = 0$$

نلاحظ أن كل من المعادلتين الآتيتين هي من شكل معادلة برنولي:

$$\acute{z}_1 - \frac{2cos^2x - 1}{1 - sinx\ cosx} z_1 - \frac{cosx}{1 - sinx\ cosx} {z_1}^2 = 0$$

$$\acute{z}_2 + \frac{3x^2}{1 - x^3} z_2 - \frac{1}{1 - x^3} {z_1}^2 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد أن الحل لهما على الترتيب هو:

$$z_1 = \left\{\frac{1}{1 - sinx\ cosx} (a_1 + b_1 I_1 + sinx)\right\}^{-1}$$

$$z_2 = \left\{\frac{1}{1 - x^3} (a_2 + b_2 I_2 - x)\right\}^{-1}$$

بالتعويض في التحويل نجد أن الحل لمعادلة ريكاتي المعطاة يعطى بالشكل:

$$y = \left[cosx + \left\{ \frac{1}{1 - sinx\, cosx} (a_1 + b_1 I_1 + sinx) \right\}^{-1}, -x^2 + \left\{ \frac{1}{1 - x^3} (a_2 + b_2 I_2 - x) \right\}^{-1} \right]$$

$4-7-$ المعادلات التفاضلية النتروسوفيكية ذات الرتبة الثانية:

تعريف ($4.7.1$). تعرف المعادلة التفاضلية النتروسوفيكية غير المتجانسة ذات المعاملات المتغيرة من الرتبة الثانية بالشكل:

$$[p_1(x), p_2(x)]y'' + [q_1(x), q_2(x)]\acute{y} + [r_1(x), r_2(x)]y = [f_1(x), f_2(x)] \dots\dots (66)$$

تعريف ($4.7.2$). تعرف المعادلة التفاضلية النتروسوفيكية المتجانسة ذات المعاملات المتغيرة من الرتبة الثانية الموافقة للمعادلة (66) بالشكل:

$$[p_1(x), p_2(x)]y'' + [q_1(x), q_2(x)]\acute{y} + [r_1(x), r_2(x)]y = 0 \quad (67)$$

تعريف ($4.7.3$). تعرف المعادلة التفاضلية النتروسوفيكية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة من الرتبة الثانية بالشكل:

$$a_2 y'' + a_1 \acute{y} + a_0 y = [f_1(x), f_2(x)] \quad (68)$$

تعريف ($4.7.4$). تعرف المعادلة التفاضلية النتروسوفيكية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة من الرتبة الثانية الموافقة للمعادلة (68) بالشكل:

$$a_2 y'' + a_1 \acute{y} + a_0 y = 0 \quad (69)$$

$4-8-$ حذف المشتقة الأولى من المعادلة التفاضلية النتروسوفيكية المتجانسة ذات المعاملات المتغيرة من الرتبة الثانية:

لتكن المعادلة:

$$[p_1(x), p_2(x)]y'' + [q_1(x), q_2(x)]\acute{y} + [r_1(x), r_2(x)]y = 0 \quad (70)$$

خطوات الحل:

أولاً: نجعل أمثال y'' تساوي الواحد فتأخذ المعادلة الشكل:

$$y'' + [\alpha_1(x), \beta_2(x)]\acute{y} + [\alpha_0(x), \beta_0(x)]y = 0 \quad (71)$$

ثانياً: نجري تغيير في المتحول من الشكل:

$$y = \left[e^{\frac{-1}{2}\int \alpha_1(x)dx} z_1 \ , e^{\frac{-1}{2}\int \alpha_2(x)dx} z_2 \ \right] \quad (72)$$

ثالثاً: نحسب المشتقات $\acute{y}$ ، $y"$ من التحويل (72) ونعوض في المعادلة (71) فنحصل على معادلة تفاضلية نتروسوفيكية متجانسة ذات معاملات متغيرة من الرتبة الثانية لا تحتوي على المشتقة الأولى فيها الدالة z حيث $z = [z_1 , z_2 \ ]$ هي والمتحول هو x .

مثال (1.8.4).

احذف المشتقة الأولى من المعادلة الآتية:

$$y" - \left[\frac{4}{x}, \frac{2}{x}\right]\acute{y} + \left[\frac{6}{x^2} - 1{,}1 + \frac{2}{x^2}\right]y = 0 \quad (73)$$

الحل:

نجري تغيير في المتحول من الشكل:

$$y = \left[e^{\frac{-1}{2}\int\frac{-4}{x}dx} z_1 \ , e^{\frac{-1}{2}\int\frac{-2}{x}dx} z_2 \ \right] = \left[e^{2\int\frac{1}{x}dx} z_1 \ , e^{\int\frac{1}{x}dx} z_2 \ \right]$$
$$= \left[e^{2\ln x} z_1 \ , e^{\ln x} z_2 \ \right] = \left[e^{\ln x^2} z_1 \ , e^{\ln x} z_2 \ \right] = [x^2 z_1 \ , x z_2 \ ]$$

إذن:

$$y = [x^2 z_1 \ , x z_2 \ ] \dots\dots (74)$$

نحسب المشتقات $\acute{y}$ و $y"$ من العلاقة (74) فنجد:

$$\acute{y} = [x^2 z_1 \ , x z_2 \ ]' = [(x^2 z_1)' , (x z_2 \ )'] = [2x z_1 + x^2 \acute{z}_1 , z_2 + x\acute{z}_2]$$

$$y" = [2x z_1 + x^2 \acute{z}_1 , z_2 + x\acute{z}_2]' = [(2x z_1 + x^2 \acute{z}_1)' , (z_2 + x\acute{z}_2)']$$
$$= [2z_1 + 2x\acute{z}_1 + 2x\acute{z}_1 + x^2 z_1" , \acute{z}_2 + \acute{z}_2 + x z"_2]$$
$$= [x^2 z"_1 + 4x\acute{z}_1 + 2z_1 , x z"_2 + 2\acute{z}_2]$$

نعوض في المعادلة (73) نجد:

$$[x^2 z"_1 + 4x\acute{z}_1 + 2z_1 , x z"_2 + 2\acute{z}_2] - \left[\frac{4}{x}, \frac{2}{x}\right][2x z_1 + x^2 \acute{z}_1 , z_2 + x\acute{z}_2]$$
$$+ \left[\frac{6}{x^2} - 1, \frac{x^2+2}{x^2}\right][x^2 z_1 \ , x z_2 \ ] = 0$$

$$\Longrightarrow [x^2\, z"_1 + 4x\acute{z}_1 + 2z_1\,, xz"_2 + 2\acute{z}_2]$$
$$+ \left[2x\left(\frac{-4}{x}\right)z_1 + \left(\frac{-4}{x}\right)x^2\, \acute{z}_1\,, \left(\frac{-2}{x}\right)\, z_2 + \left(\frac{-2}{x}\right)x\acute{z}_2\right]$$
$$+ \left[\left(\frac{6}{x^2}\right)x^2 z_1 \,-x^2 z_1\,\,, xz_2\,\, + \left(\frac{2}{x^2}\right)xz_2\,\right] = 0$$

$$\Longrightarrow [x^2\, z"_1 + 4x\acute{z}_1 + 2z_1\,, xz"_2 + 2\acute{z}_2]$$
$$+ \left[-8z_1 + -4x\,\acute{z}_1\,, \frac{-2}{x}\, z_2 + -2\acute{z}_2\right]$$
$$+ \left[6z_1\, - x^2 z_1\,\,, xz_2\,\, + \frac{2}{x} z_2\,\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \Big[x^2\, z"_1 + 4x\acute{z}_1 + 2z_1\, - 8z_1 - 4x\,\acute{z}_1 + 6z_1\, - x^2 z_1\,, xz"_2$$
$$+ 2z_2{}' - \frac{2}{x}\, z_2 + -2\acute{z}_2 + \,xz_2\,\, + \frac{2}{x} z_2\,\Big] = 0$$

ومنه:

$$[x^2\, z"_1 - x^2 z_1\,, xz"_2 + \,xz_2\,] = 0$$

مثال $(\mathbf{2.8.4})$.

احذف المشتقة الأولى من المعادلة الآتية:

$$y" + [3{,}2]\acute{y} + \left[-2{,}1 - \frac{2}{x^2}\right]y = 0 \quad (75)$$

الحل:

نجري تغيير في المتحول من الشكل:

$$y = \left[e^{\frac{-1}{2}\int 3d}\,\, z_1\,\,, e^{\frac{-1}{2}\int 2dx} z_2\,\right] = \left[e^{\frac{-3}{2}x} z_1\,\,, e^{-x} z_2\,\right]$$

إذن:

$$y = \left[e^{\frac{-3}{2}x} z_1\,\,, e^{-x} z_2\,\right] \ldots\ldots (76)$$

نحسب المشتقات $\acute{y}$ و $y"$ من العلاقة (75) فنجد:

$$\acute{y} = \left[e^{\frac{-3}{2}x} z_1 \ , e^{-2x} z_2 \ \right]' = \left[\left(e^{\frac{-3}{2}x} z_1\right)' \ , (e^{-x} z_2 \ )'\right]$$

$$= \left[\frac{-3}{2} e^{\frac{-3}{2}x} z_1 \ + e^{\frac{-3}{2}x} \ \acute{z}_1 \, , -e^{-x} z_2 \ \ + e^{-x} \acute{z}_2\right]$$

$$y" = \left[\frac{-3}{2} e^{\frac{-3}{2}x} z_1 \ + e^{\frac{-3}{2}x} \ \acute{z}_1 \, , -e^{-x} z_2 \ \ + e^{-x} \acute{z}_2\right]'$$

$$= \left[\left(\frac{-3}{2} e^{\frac{-3}{2}x} z_1 \ + e^{\frac{-3}{2}x} \ \acute{z}_1\right)' \ , (-e^{-x} z_2 \ \ + e^{-x} \acute{z}_2)'\right]$$

$$= \left[\frac{9}{4} e^{-3x} z_1 \ - \frac{3}{2} e^{\frac{-3}{2}x} \acute{z}_1 - \frac{3}{2} e^{\frac{-3}{2}x} \acute{z}_1 + e^{\frac{-3}{2}x} \ z_1" \, , e^{-x} z_2 \right.$$

$$\left. - e^{-x} \acute{z}_2 - e^{-x} \acute{z}_2 + e^{-x} \ z_2"\right]$$

$$= \left[e^{\frac{-3}{2}x} \ z"_1 - 3e^{\frac{-3}{2}x} \acute{z}_1 + \frac{9}{4} e^{-3x} z_1 \ \ , e^{-x} z"_2 \right.$$

$$\left. - 2e^{-x} z_2{}' + e^{-x} z_2 \right]$$

نعوض في المعادلة (75) نجد:

$$\left[e^{\frac{-3}{2}x} \ z"_1 - 3e^{\frac{-3}{2}x} \acute{z}_1 + \frac{9}{4} e^{-3x} z_1 \ \ , e^{-x} z"_2 - 2e^{-x} z_2{}' + e^{-x} z_2 \right]$$

$$+ [3,2] \left[\frac{-3}{2} e^{\frac{-3}{2}x} z_1 \ + e^{\frac{-3}{2}x} \ \acute{z}_1 \, , -e^{-x} z_2 \ \ + e^{-x} \acute{z}_2\right]$$

$$+ \left[-2,1 - \frac{2}{x^2}\right] \left[e^{\frac{-3}{2}x} z_1 \ \ , e^{-x} z_2 \ \right] = 0$$

$$\Longrightarrow \left[e^{\frac{-3}{2}x} \ z"_1 - 3e^{\frac{-3}{2}x} \acute{z}_1 + \frac{9}{4} e^{-3x} z_1 \ \ , e^{-x} z"_2 - 2e^{-x} z_2{}' + e^{-x} z_2 \right]$$

$$+ \left[\frac{-9}{2} e^{\frac{-3}{2}x} z_1 \ + 3e^{\frac{-3}{2}x} \ \acute{z}_1 \, , -2e^{-x} z_2 \ \ + 2e^{-x} \acute{z}_2\right]$$

$$+ \left[-2e^{\frac{-3}{2}x} z_1 \ \ , e^{-x} z_2 \ - \frac{2}{x^2} \ e^{-x} z_2 \ \right] = 0$$

$$\Longrightarrow \left[e^{\frac{-3}{2}x} \ z"_1 - 3e^{\frac{-3}{2}x} \acute{z}_1 + \frac{9}{4} e^{-3x} z_1 \ - \frac{9}{2} e^{\frac{-3}{2}x} z_1 \ + 3e^{\frac{-3}{2}x} \ \acute{z}_1 \right.$$

$$- 2e^{\frac{-3}{2}x} z_1 \ \ , e^{-x} z"_2 - 2e^{-x} z_2{}' + e^{-x} z_2 - 2e^{-x} z_2$$

$$\left. + 2e^{-x} \acute{z}_2 + e^{-x} z_2 \ - \frac{2}{x^2} \ e^{-x} z_2 \ \right] = 0$$

$$\Longrightarrow \left[e^{\frac{-3}{2}x} z"_1 - \frac{13}{4} e^{\frac{-3}{2}x} z_1 , e^{-x} z"_2 - \frac{2}{x^2} e^{-x} z_2 \right] = 0$$

ومنه:

$$\left[e^{\frac{-3}{2}x} z"_1 - \frac{13}{4} e^{\frac{-3}{2}x} z_1 , e^{-x} z"_2 - \frac{2}{x^2} e^{-x} z_2 \right] = 0$$

4 – 9– المعادلة التفاضلية التامة النتروسوفيكية من الرتبة الثانية:

تعريف ($\mathbf{1.9.4}$). لتكن المعادلة التفاضلية:

$$[p_1(x), p_2(x)]y" + [q_1(x), q_2(x)]\acute{y} + [r_1(x), r_2(x)]y = [f_1(x), f_2(x)] \quad (80)$$

الشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة (80) تامة هو أن يتحقق الشرط:

$$[p"_1(x), p"_2(x)] - [\acute{q}_1(x), \acute{q}_2(x)] + [r_1(x), r_2(x)] = [0,0] \quad (81)$$

وتكون المعادلة:

$$[B_1(x), B_2(x)]\acute{y} + [M_1(x), M_2(x)]y = [g_1(x), g_2(x)] \quad (82)$$

تكامل أولي للمعادلة (81) حيث:

$$[B_1(x), B_2(x)] = [p_1(x), p_2(x)]$$

$$[M_1(x), M_2(x)] = [q_1(x) - \acute{p}_1(x), q_2(x) - \acute{p}_2(x)]$$

$$[g_1(x), g_2(x)] = \left[\int f_1(x)dx , \int f_2(x)dx\right]$$

مثال ($\mathbf{2.9.4}$).

أثبت أن المعادلة التفاضلية الآتية تامة وأوجد حلها العام:

$$[x^2 + 2, sinx]y" + [4x, 3cosx]\acute{y} + [2, -2sinx]y = [sinx, 5cosx] \quad (83)$$

الحل:

لدينا:

$$p_1 = x^2 + 2 , q_1 = 4x , r_1 = 2, f_1 = sinx$$

$$p_2 = sinx , q_2 = 3cosx , r_2 = -2sinx, f_2 = 5cosx$$

الآن لنتأكد من تحقق الشرط (81):

$$[p''_1(x), p''_2(x)] - [\acute{q}_1(x), \acute{q}_2(x)] + [r_1(x), r_2(x)]$$
$$= [2, -sinx] - [4, -3sinx] + [2, -2sinx]$$
$$= [2 - 4 + 2, -sinx + 3sinx - 2sinx] = [0,0]$$

إذن الشرط محقق وبالتالي فالمعادلة تامة.

المعادلة الآتية تمثل تكامل أولي للمعادلة (83).

$$[B_1(x), B_2(x)]\acute{y} + [M_1(x), M_2(x)]y = [g_1(x), g_2(x)]$$

حيث:

$$[B_1(x), B_2(x)] = [p_1(x), p_2(x)] = [x^2 + 2, sinx]$$

$$[M_1(x), M_2(x)] = [q_1(x) - \acute{p}_1(x), q_2(x) - \acute{p}_2(x)] = [2x, 2cosx]$$

$$[g_1(x), g_2(x)] = \left[\int f_1(x)dx\,, \int f_2(x)dx\right] = [-cosx, 5sinx]$$

ومنه:

$$[x^2 + 2, sinx]\acute{y} + [2x, 2cosx]y = [-cosx, 5sinx]$$

ومنه:

$$\acute{y} + \left[\frac{2x}{x^2 + 2}, \frac{2cosx}{sinx}\right]y = \left[\frac{-cosx}{x^2 + 2}, \frac{5sinx}{sinx}\right]$$

$$\acute{y} + \left[\frac{2x}{x^2 + 2}, \frac{2cosx}{sinx}\right]y = \left[\frac{-cosx}{x^2 + 2}, 5\right]$$

وهي معادلة تفاضلية نتروسوفيكية غير متجانسة نحلها باستخدام عامل التكميل:

$$\mu(x) = [\mu_1(x), \mu_2(x)] = \left[e^{\int \frac{2x}{x^2+2}dx}, e^{\int \frac{2cos}{sinx}dx}\right]$$

$$\mu(x) = \left[e^{\ln(x^2+2)}, e^{21\ \ (sinx)}\right] = \left[e^{\ln(x^2+2)}, e^{\ln(sin^2x)}\right]$$

$$\mu(x) = [x^2 + 2, sin^2x]$$

ومنه:

$$y = \frac{1}{[x^2 + 2, sin^2x]}\Bigg(a + bI + \left[\int (x^2 + 2)\frac{2x}{x^2 + 2}dx\,, \int (sin^2x)\frac{2cosx}{sinx}dx\right]\Bigg)$$

$$y = \frac{1}{[x^2 + 2, sin^2 x]}\left(a + bI + \left[\int 2xdx\,, \int 2sinxcosxdx\right]\right)$$

$$y = \frac{1}{[x^2 + 2, sin^2 x]}\left(a + bI + \left[\int 2xdx\,, \int sin2xdx\right]\right)$$

$$y = \frac{1}{[x^2 + 2, sin^2 x]}\left(a + bI + \left[x^2\,, \frac{-1}{2}\, cos2x\right]\right)$$

وهو الحل العام للمعادلة (83).

$4 - 10-$ تحويل لابلاس لدالة السُمُك النيوتروسوفكية:

تعريف ($4.10.1$) لتكن $[f_1(x), f_2(x)]$ دالة سُمُك نيوتروسوفكية، عندئذ يعرف تحويل لابلاس للدالة السابقة بالشكل:

$$F(p) = [F_1(p), F_2(p)] = L[f_1(x), f_2(x)] = \int_0^{-\infty} e^{-px}[f_1(x), f_2(x)]dx$$

$$= \int_0^{-\infty} [e^{-px} f_1(x), e^{-px} f_2(x)]dx$$

$$F(p) = \left[\int_0^{-\infty} e^{-Px} f_1(x)dx\,, \int_0^{-\infty} e^{-Px} f_2(x)dx\right] \quad (87)$$

($4.10.2$) جدول بتحويل لابلاس لبعض الدوال التحليلية:

$f(x)$	$F(p) = L[f(x)]$
a	$\frac{a}{p}$
1	$\frac{1}{p}$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}; n = 1,2,3, \dots \dots$
$\sqrt{x}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}$
$\sin ax$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
$\cos ax$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$

$x \sin ax$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
$x \cos ax$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin(ax+b)$	$\frac{p\sin b + a\cos b}{p^2+a^2}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{p\cos b - a\sin b}{p^2+a^2}$
$e^{ax}\sin bx$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{ax}\cos bx$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-b^2}$
$\sinh ax$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\cosh ax$	$\frac{p}{p^2-a^2}$

($3.10.4$): خواص تحويل لابلاس:

الخاصة الأولى:

$$L[e^{ax}f(x)] = F(p-a)$$

الخاصة الثانية:

$$L[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d}{d^n p} F(p)$$

الخاصة الثالثة:

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_{p}^{-\infty} F(p)dp$$

($4.10.4$): تحويل لابلاس للمشتقات:

$$L[y'] = pL[y] - y(0)$$

$$L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0)$$

$$L[y'''] = p^3L[y] - p^2y(0) - y''(0) + py'(0)$$

وبشكل عام:

$$L\left[y^{(n)}\right] = p^nL[y] - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \cdots py^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

$4-11-$ حل المعادلات التفاضلية النيوتروسوفيكية باستخدام تحويل لابلاس:

لتكن المعادلة التفاضلية النيوتروسوفيكية الآتية:

$$y^{(n)} + [a_1, a_2]y^{(n-1)} + \cdots + [b_1, b_2]y' + [c_1, c_2]y = [f_1(x), f_2(x)] \quad (88)$$

ولها شروط ابتدائية تعطى في نص المسألة.

طريقة الحل:

1- نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (88).
2- نعوض الشروط الابتدائية في نص المسألة بعد تطبيق الخطوة 1.
3- نأخذ تحويل لابلاس العكسي فنحصل على حل المعادلة (88).

مثال ($1.11.4$). أوجد حل المعادلة الآتية باستخدام تحويل لابلاس:

$$y" + [16,1]y = [2sin4x, x] \quad (89)$$

وتحقق الشروط الابتدائية الآتية:

$$y'(0) = \left[\frac{-1}{2}, 2\right], y(0) = [0,1] \quad (90)$$

الحل:

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (89) نجد:

$$L[y''] + L\big[[16,1]y\big] = L\big[[2sin4x, x]\big]$$

$$\Longrightarrow L[y''] + [16,1]L[y] = [2L(sin4x), L(x)]$$

$$\Longrightarrow [p^2, p^2]L[y] - py(0) - y'(0) + [16,1]L[y] = [2L(sin4x), L(x)]$$

$$\Longrightarrow [p^2, p^2]L[y] - py(0) - y'(0) + [16,1]L[y] = \left[\frac{8}{p^2+16}, \frac{1}{p^2}\right]$$

نعوض الشروط (90) في المعادلة الأخيرة نجد:

$$[p^2,p^2]L[y]-p[0,1]-\left[\frac{-1}{2},2\right]+[16,1]L[y]=\left[\frac{8}{p^2+16},\frac{1}{p^2}\right]$$

$$\Longrightarrow [p^2,p^2]L[y]-[0,p]-\left[\frac{-1}{2},2\right]+[16,1]L[y]=\left[\frac{8}{p^2+16},\frac{1}{p^2}\right]$$

$$\Longrightarrow [p^2+16,p^2+1]L[y]-\left[\frac{-1}{2},p+2\right]=\left[\frac{8}{p^2+16},\frac{1}{p^2}\right]$$

$$\Longrightarrow [p^2+16,p^2+1]L[y]=\left[\frac{8}{p^2+16},\frac{1}{p^2}\right]+\left[\frac{-1}{2},p+2\right]$$

$$\Longrightarrow [p^2+16,p^2+1]L[y]=\left[\frac{8}{p^2+16}-\frac{1}{2},\frac{1}{p^2}+p+2\right]$$

$$\Longrightarrow [p^2+16,p^2+1]L[y]=\left[\frac{-p^2-16}{2(p^2+16)},\frac{p^3+2p^2+1}{p^2}\right]$$

نقسم الطرفين على $[p^2+16,p^2+1]$ نجد:

$$L[y]=\left[\frac{-1}{2(p^2+16)},\frac{p^3+2p^2+1}{p^2(p^2+16)}\right]$$

باستخدام تفريق الكسور نجد:

$$\frac{p^3+2p^2+1}{p^2(p^2+16)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{(p^2+16)}\Longrightarrow \mathrm{A}=0,\mathrm{B}=\mathrm{C}=\mathrm{D}=1$$

$$\Longrightarrow \frac{p^3+2p^2+1}{p^2(p^2+16)}=\frac{1}{p^2}+\frac{p}{(p^2+16)}+\frac{1}{(p^2+16)}$$

$$\Longrightarrow L[y]=\left[\frac{-1}{2(p^2+16)},\frac{1}{p^2}+\frac{p}{(p^2+16)}+\frac{1}{(p^2+16)}\right]$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي المعادلة الأخيرة نجد:

$$L^{-1}[y]=\left[L^{-1}\left\{\frac{-1}{2(p^2+16)}\right\},L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+16)}\right\}\right.$$
$$\left.+L^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+16)}\right\}\right]$$

$$\Rightarrow L^{-1}[y] = \left[\frac{-1}{8}L^{-1}\left\{\frac{-1}{(p^2+16)}\right\}, L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+16)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+16)}\right\}\right]$$

$$\Rightarrow y = \left[\frac{-1}{8}sin4x\ , x + cosx + sinx\right]$$

وهو حل المعادلة (89).

مثال ($\mathbf{3.11.4}$). أوجد حل المعادلة الآتية باستخدام تحويل لابلاس:

$$y'' + [3,2]y' + [2,5]y = [0, e^{-x}sinx] \quad (91)$$

وتحقق الشروط الابتدائية الآتية:

$$y'(0) = [-1,1]\ , y(0) = [1,0] \quad (92)$$

الحل:

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (91) نجد:

$$L[y''] + [3,2]L[y'] + [2,5]L[y] = [L(0), L(e^{-x}sinx)]$$

$$\Rightarrow [p^2,p^2]L[y] - py(0) - y'(0) + [-3,2]pL[y] - [3,2]y(0) + [2,5]L[y] = [L(0), L(e^{-x}sinx)]$$

$$\Rightarrow [p^2,p^2]L[y] - py(0) - y'(0) + [-3,2]pL[y] - [3,2]y(0) + [2,5]L[y] = \left[0, \frac{1}{(p+1)^2+1}\right]$$

نعوض الشروط (92) في المعادلة الأخيرة نجد:

$$\Rightarrow [p^2,p^2]L[y] - [p,0] - [-1,1] + [-3p,2p]L[y] - [3,2][1,0] + [2,5]L[y] = \left[0, \frac{1}{(p+1)^2+1}\right]$$

$$\Rightarrow [p^2,p^2]L[y] - [p,0] - [-1,1] + [-3p,2p]L[y] - [3,0] + [2,5]L[y] = \left[0, \frac{1}{(p+1)^2+1}\right]$$

$$\Longrightarrow [p^2+3p+2, p^2+2p+5]L[y] = \left[p+2, 1+\frac{1}{p^2+2p+3}\right]$$

$$\Longrightarrow [p^2+3p+2, p^2+2p+5]L[y] = \left[p+2, \frac{p^2+2p+4}{p^2+2p+3}\right]$$

نقسم الطرفين على $[p^2+3p+2, p^2+2p+5]$ نجد:

$$L[y] = \left[\frac{p+2}{p^2+3p+2}, \frac{p^2+2p+4}{(p^2+2p+3)(p^2+2p+5)}\right]$$

$$\Longrightarrow L[y] = \left[\frac{p+2}{(p+2)(p+1)}, \frac{p^2+2p+4}{(p^2+2p+3)(p^2+2p+5)}\right]$$

$$\Longrightarrow L[y] = \left[\frac{1}{p+1}, \frac{p^2+2p+4}{(p^2+2p+3)(p^2+2p+5)}\right]$$

باستخدام تفريق الكسور نجد:

$$\frac{p^2+2p+4}{(p^2+2p+3)(p^2+2p+5)} = \frac{Ap+B}{p^2+2p+5} + \frac{Cp+D}{p^2+2p+3}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{A}=0, \mathrm{B}=\frac{1}{2}, \mathrm{C}=0, \mathrm{D}=\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{p^2+2p+4}{(p^2+2p+3)(p^2+2p+5)} = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+2p+5} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+2p+3}$$

$$\Longrightarrow L[y] = \left[\frac{1}{p+1}, \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+2p+5} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+2p+3}\right]$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي المعادلة الأخيرة نجد:

$$L^{-1}[y] = \left[L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\}, L^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+2p+5}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+2p+3}\right\}\right]$$

$$\Longrightarrow L^{-1}[y] = \left[L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\}, \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+2p+5}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+2p+3}\right\}\right]$$

$$\Longrightarrow L^{-1}[y] = \left[L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\}, \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2+4}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2+2}\right\}\right]$$

$$\Longrightarrow y = \left[sinx\,, \frac{1}{4}e^{-x}sin2x + \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-x}sin\sqrt{2}x\right]$$

وهو حل المعادلة (91).

مثال ($\mathbf{4.11.2}$). أوجد حل المعادلة الآتية باستخدام تحويل لابلاس:

$$y'' + [2,-3]y' + [1,2]y = [3xe^{-x}, 4e^{2x}] \quad (93)$$

وتحقق الشروط الابتدائية الآتية:

$$y'(0) = [2,5]\,, y(0) = [4,-3] \quad (94)$$

الحل:

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (93) نجد:

$$L[y''] + [2,-3]L[y'] + [1,2]L[y] = [3L(xe^{-x}), 4L(e^{2x})]$$

$$\Rightarrow [p^2, p^2]L[y] - py(0) - y'(0) + p[2,-3]L[y] - [2,-3]y(0) + [1,2]L[y] = [3L(xe^{-x}), 4L(e^{2x})]$$

$$\Rightarrow [p^2, p^2]L[y] - py(0) - y'(0) + p[2,-3]L[y] - [2,-3]y(0) + [1,2]L[y] = \left[\frac{-3}{(p+1)^2}, \frac{4}{p-2}\right]$$

نعوض الشروط (94) في المعادلة الأخيرة نجد:

$$\Rightarrow [p^2, p^2]L[y] - [4p, 3p] - [2,5] + [2p, -3p]L[y] - [8,9] + [1,2]L[y] = \left[\frac{-3}{(p+1)^2}, \frac{4}{p-2}\right]$$

$$\Rightarrow [p^2 + 2p + 1, p^2 - 3p + 2]L[y] = \left[\frac{-3}{(p+1)^2} + 4p + 10, \frac{4}{p-2} - 3p + 16\right]$$

$$\Rightarrow [(p+1)^2, (p-2)(p-1)]L[y] = \left[\frac{-3}{(p+1)^2} + 4p + 10, \frac{4}{p-2} - 3p + 16\right]$$

نقسم الطرفين على $[(p+1)^2, (p-2)(p-1)]$ نجد:

$$L[y] = \left[\frac{-3}{(p+1)^4} + \frac{4p+10}{(p+1)^2}, \frac{4}{(p-2)^2(p-1)} + \frac{-3p+16}{(p-2)(p-1)}\right]$$

باستخدام تفريق الكسور نجد:

$$L[y] = \left[\frac{4}{p+1} + \frac{6}{(p+1)^2} - \frac{3}{(p+1)^4}, \frac{8}{p-2} + \frac{20}{(p-2)^2} - \frac{3}{p-1}\right]$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي المعادلة الأخيرة نجد:

$$L^{-1}[y] = \left[4L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} + 6L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^4}\right\}, 8L^{-1}\left\{\frac{1}{p-2}\right\} + 20L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-2)^2}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\}\right]$$

$$\Longrightarrow y = \left[4e^{-x} + 6xe^{-x} + \frac{1}{2}x^3e^{-x}, 8e^{2x} + 20xe^{-x}e^{2x}s - 3e^{x}\right]$$

وهو حل المعادلة (93).

الفصل الخامس

أساسيات الهندسة النيوتروسوفيكية

مقدمة:

في هذا الفصل سنقدم مفهوم جديد في النتروسوفيك، والذي لم يسبق لأحد أن قام بمثل هذه الأفكار، وذلك من خلال تقديم تحويل خطي نيوتروسوفيكي (إيزومتري) قام بتعريفه كل من محمد أبو بالا و أحمد خطيب، ينقل المفاهيم الهندسية الكلاسيكية جبرياً إلى مفاهيم هندسية نيوتروسوفيكية، كتعريف للنقاط النيوتروسوفيكية، والدائرة النيوتروسوفيكية، وتطبيقاتها كحساب المساحة وإيجاد معادلة المستقيم المماس لها، بالإضافة لمعادلة المستقيم النيوتروسوفيكي،والقطعة المستقيمة النيوتروسوفيكية، والنقطة القاسمة لقطعة نيوتروسوفيكية، وأيضاً من المفاهيم الهامة القطوع الهندسية، كالقطع المكافئ والناقص والزائد النيوتروسوفيكية، وفتح المجال للمزيد من الدراسات في مجال الهندسة النيوتروسوفيكية، كالهندسة التفاضلية وتعميمها نيوتروسوفيكياً.

$5-1$ تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف $(1.1.5)$.

ليكن $R(I)=\{a+bI;a,b\in R\}$ حقل أعداد نيوتروسوفيكية، عندئذ نقول إن $a+bI\le c+dI$ إذا وفقط إذا كان $a\le c$ و $a+b\le c+d$.

مبرهنة $(2.1.5)$:

العلاقة في التعريف (1.1.5) علاقة ترتيب جزئي (انعكاسية ومتخالفة ومتعدية).

البرهان:

ليكن $x=a+\mathrm{b}I,y=c+\mathrm{d}I,z=m+\mathrm{n}I\in R(I)$ ، عندئذ:

انعكاسية : $x\le x$ لأن $a\le a$ و $a+b\le a+b$

تخالفية : اذا كانت $x\le y$ و $y\le x$ فإن $y=x$

نفرض أن $x\le y$ و $y\le x$ عندئذ يكون:

$$a\le c\ ;\ a+b\le c+d \quad و \quad c\le a\ ;\quad c+d\le a+b$$

وبالتالي $a=c\ ;\ a+b=c+d$ هذا يعني أن $a=b$ وبالتالي $x=y$

متعدية:

لنفرض أن $x\le y$ و $y\le z$ إذن $a\le c,a+b\le c+d,c\le m,c+d\le m+n$ وهذا يعني أن $a\le m,a+b\le m+n$ لذلك $x\le z$.

مما سبق نجد أن $\le$ هي علاقة ترتيب جزئي على $R(I)$.

ملاحظة $(3.1.5)$:

يمكننا تعريف العدد الحقيقي النيوتروسوفيكي الموجب كما يلي:

$$a + bI \geq 0 = 0 + 0I$$

وهذا يعني أن $a \geq 0$ و $a + b \geq 0$

تعرف القيمة المطلقة على $R(I)$ بالعلاقة:

$$|a + bI| = |a| + I[|a + b| - |a|]$$

كما يمكننا تعريف الجذر التربيعي لعدد نيوتروسوفيكي موجب بالعلاقة:

$$\sqrt{a + bI} = \sqrt{a} + I\left[\sqrt{a + b} - \sqrt{a}\right]$$

مثال $(4.1.5)$:

- $x = 2 - I$ عدد حقيقي نيوتروسوفيكي موجب حيث $2 \geq 0$ و $2 - 1 = 1 \geq 0$.
- $2 + I \geq 2$ لأن $2 \geq 2$ و $2 + 1 = 3 \geq 2 + 0 = 2$.
- $|1 + 3I| = |1| + I[|1 + 3| - |1|] = 1 + 3I$.
- $|-3 + 2I| = |-3| + I[|-3 + 2| - |-3|] = 3 - 2I$، لاحظ أن $0 + 0I \geq -3 + 2I$.
- $\sqrt{9 + 4I} = \sqrt{9} + I\left[\sqrt{13} - \sqrt{9}\right] = 3 + I\left[\sqrt{13} - 3\right]$

تعريف $(5.1.5)$:

نعرف المستوي النيوتروسوفيكي ذو n بعد بالشكل:

$$R(I) \times R(I) \times R(I) \times \underbrace{\dots\dots}_{n-tim} \times R(I)$$

مثال $(6.1.5)$:

$R(I) = \{a + bI; a, b \in R\}$ مستوي نيوتروسوفيكي أحادي البعد.

$R(I)^2 = \{(a + bI, c + dI); a, b, c, d \in R\}$ مستوي نيوتروسوفيكي ثنائي البعد.

تعريف $(7.1.5)$:

لتكن $A(a + bI, c + dI), B(x + yI, z + tI)$ نقطتين نيوتروسوفيكيتين من $R(I)^2$، عندئذ نعرف الشعاع النيوتروسوفيكي بالصيغة:

$$\overrightarrow{AB} = ([x + yI] - [a + bI], [z + tI] - [c + dI])$$

تعريف $(8.1.5)$:

ليكن $\vec{u} = (a + bI, c + dI)$ شعاع نيوتروسوفيكي، عندئذ نعرف النظيم بالشكل:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{(a+bI)^2 + (c+dI)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + c^2 + I[(a+b)^2 + (c+d)^2 - a^2 - c^2]}\end{aligned}$$

بسهولة يمكن أن نلاحظ أن $\|\vec{u}\| \geq 0$، اعتماداً على الملاحظة (3.1.5).

تعريف $(9.1.5)$:

لتكن $A(a + bI, c + dI), B(x + yI, z + tI)$ نقطتين نيوتروسوفيكيتين من $R(I)^2$، عندئذ نعرف:

- منتصف القطعة $[AB]$ هي النقطة $C\left(\frac{a+bI+x+yI}{2}, \frac{c+dI+z+tI}{2}\right)$.
- المسافة النيوتروسوفيكية بين النقطتين A و B تساوي $\|\overrightarrow{AB}\|$.

مثال $(10.1.5)$:

لتكن $A(1 + I, 2 - 3I), B(-I, -1 + 2I)$ نقطتين نيوتروسوفيكيتين من $R(I)^2$، عندئذ:

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 2I, -3 + 5I)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 1 + 9 + I[9 + 4 - 1 - 9] = 10 + 3I$$

لتكن النقطة C منتصف القطعة $[AB]$، إذن $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\right)$.

الآن سنقوم بعرض بعض الخصائص الهندسية والجبرية للفضاء الكلاسيكي $R^2 \times R^2$. سنحتاجها في الفقرات القادمة.

ملاحظة $(11.1.5)$:

ليكن $V = R^2 \times R^2$ الجداء الديكارتي للمستوي الإقليدي الكلاسيكي بنفسه، عندئذ يكون:

1. يملك V مودول واحدي فوق الحلقة $R \times R$، مع العمليات الآتية:

الجمع:

$$\big((a,b),(c,d)\big) + \big((x,y),(z,t)\big) = \big((a+x, b+y)\big), \big((c+z, d+t)\big)$$

الجداء بعدد سلمي من $R \times R$:

$$(m,n).\big((a,b),(c,d)\big) = \big((m.a, n.b),(m.c, n.d)\big)$$

2. النظيم لأي متجه في V يمكن تعريفه بالصيغة:

$$\|(a,b),(c,d)\| = \left(\sqrt{a^2+c^2}, \sqrt{b^2+d^2}\right)$$

مثال ($12.1.4$):

لتكن النقطتان $A\big((1,2),(2,5)\big), B\big((-1,4),(3,-2)\big)$ من الفضاء V عندئذ:

1. $\overrightarrow{AB} = \big((-2,2),(1,-7)\big)$.
2. $\|\overrightarrow{AB}\| = \left(\sqrt{(-2)^2+(1)^2}, \sqrt{(2)^2+(-7)^2}\right) = \left(\sqrt{5}, \sqrt{53}\right)$.
3. ليكن $r = (5,8) \in R \times R$ عدد سلمي، عندئذ:

$$r.\overrightarrow{AB} = \big((-10,16),(5,-56)\big)$$

واضح أن: $\|r.\overrightarrow{AB}\| = r.\,\|\overrightarrow{AB}\|$.

$5-2$–العلاقة بين الهندسة النيوتروسوفيكية والكلاسيكية:

هذا الجزء مخصص لتوضيح العلاقات بين الإحداثيات النيوتروسوفيكية المحددة أعلاه، وبين الإحداثيات الهندسية الكلاسيكية.

تبرز العديد من الأسئلة الهامة وفقاً للفقرات $(5-1)$. السؤال الأول عن العلاقات الشهيرة في الهندسة الكلاسيكية: هل نقطة المنتصف للقطعة $[AB]$ لها المسافة نفسها بين A وB؟.

إذا كان الجواب لا، فإن نظامنا الهندسي ضعيف وليس له أهمية لأنه يتعارض مع البيانات المنطقية.

السؤال الثاني هل النقاط النيوتروسوفيكية لها ارتباط أو علاقات مع النقاط الكلاسيكية؟. وهذا السؤال هو الأهم، لأنه إذا كانت الإجابة نعم، عندها يمكننا دراسة الأشكال الهندسية في المستوي النيوتروسوفيكي.

السؤال الثالث هو كيف نعرف الخطوط، الدوائر، القطوع النيوتروسوفيكية، ... إلخ.

تعريف ($1.2.5$):

لتكن $M = R(I)^2 = R(I) \times R(I), V = R^2 \times R^2$ مستوي نيوتروسوفيكي، والجداء الديكارتي للمستوي الكلاسيكي R^2 بنفسه، عندئذ نعرف تحويل إيزومتري بين $R(I)^2$ و$R^2 \times R^2$ بالصيغة:

$$f: M \to V; f(a+bI, c+dI) = \big((a, a+b),(c, c+d)\big)$$

نعرف التحويل الإيزومتري أحادي البعد بين $R(I)$ و $R \times R$ بالصيغة:

$$g: R(I) \to R \times R; g(a+bI) = (a, a+b)$$

مبرهنة $(\mathbf{5.2.2})$:

الإيزومتري أحادي البعد هو تماثل جبري $R(I)$ و $R \times R$.

البرهان:

ليكن $a+bI, c+dI$ عددان حقيقيان نتروسوفيكيين، عندئذ.

$$f(a+bI+c+dI) = f([a+c]+[b+d]I) = (a+c, a+c+b+d)$$
$$= (a, a+b) + (c, c+d) = f(a+bI) + f(c+dI)$$

$$f([a+bI].[c+dI]) = f(ac+[ad+bc+bd]I)$$
$$= (ac, ac+ad+bc+dd) = (a, a+b).(c, c+d)$$
$$= f(a+bI).f(c+dI)$$

f تقابل، لأن $ker(f) = \{0\}$، ومن أجل كل زوج $(a,b) \in R \times R$، يوجد

$a + (a,b)I \in R(I)$ ويحقق $f(a+[b-a]I) = (a,b)$. لذلك ومما سبق نجد أن f تماثل.

مثال $(\mathbf{5.2.3})$:

لنفرض النقطة النيوتروسوفيكية $A(1+I, 3-6I)$، الصورة الإيزومترية لها هي

هي $B\big((1,2),(3,-3)\big)$.

ليكن المتجه النيوتروسوفيكي $\vec{u} = (2-I, 4+I)$، عندئذ صورته وفق الإيزومتري هي

$\vec{v} = \big((2,1),(4,5)\big)$.

مبرهنة $(\mathbf{5.2.4})$: (النظرية الأساسية في الهندسة الإقليدية النيوتروسوفيكية).

ليكن $f: M \to V; f(a+bI, c+dI) = \big((a, a+b),(c, c+d)\big)$ الإيزومتري المعرف أعلاه. عندئذ يكون:

1. f يحافظ على عملية الجمع بين المتجهات.

2. f يحافظ على المسافات بين النقاط.

3. f تقابل عكسي بين M و V.

4. الإيزومتري يحافظ على جداء المتجه النيوتروسوفيكي بعدد حقيقي نيوتروسوفيكي.

الصورة المباشرة لمتجه نيوتروسوفيكي مضروب بعدد حقيقي نيوتروسوفيكي تساوي تماماً صورته الإيزومترية مضروبة بالصورة الإيزومترية أحادية البعد المقابلة للعدد الحقيقي النيوتروسوفيكي.

البرهان:

1. ليكن $\vec{u} = (a + bI, c + dI), \vec{v} = (x + yI, z + tI)$ متجهين نيوتروسوفيكيين، عندئذ:

$$\begin{aligned} f(\vec{u} + \vec{v}) &= f(a + x + I[b + y], c + z + I[d + t]) \\ &= \big((a + x, a + x + b + y), (c + z, c + z + d + t)\big) \\ &= \big((a, a + b), (c, c + d)\big) + \big((x, x + y), (z, z + t)\big) \\ &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \end{aligned}$$

2. يجب أن نثبت أن نظيم المتجه الكلاسيكي $\overrightarrow{f(u)}$ الصورة الإيزومترية أحادية البعد لنظيم المتجه النيوتروسوفيكي $\overrightarrow{f(u)}$.

$$\|f(\vec{u})\|^2 = (a^2 + c^2, (a + b)^2 + (c + d)^2)$$

من ناحية أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} g\|\vec{u}\|^2 &= g(a^2 + c^2 + I[(a + b)^2 + d^2 - a^2 - c^2]) \\ &= (a^2 + c^2, (a + b)^2 + (c + d)^2) = \|f(\vec{u})\|^2 \end{aligned}$$

3. لنفرض أن $f(a + bI, c + dI) = f(x + yI, z + tI)$، وبالتالي فإن:

$$\big((a, a + b), (c, c + d)\big) = \big((x, x + y), (z, z + t)\big)$$

لذلك: $a = x, b = y, c = z, d = t$، ومنه f يكون متباين.

واضح أن f غامر، لذلك فهو تقابل.

4. ليكن المتجه النيوتروسوفيكي $\vec{u} = (a + bI, c + dI)$ والعدد الحقيقي النيوتروسوفيكي $m + nI$، عندئذ:

$$\begin{aligned} (m + nI).\vec{u} &= \big((m + nI)(a + bI), (m + nI)(c + dI)\big) \\ &= \big((ma + I[mb + na + nb]), (mc + I[md + nc + nd])\big) \end{aligned}$$

من ناحية أخرى، لدينا:

$$f\big((m+nI).\vec{u}\big) = \big((ma, ma+mb+na+nb), (mc, mc+md+nc + nd)\big) = (m, m+n).\big((a, a+b), (c, c+d)\big) = g(m+nI).f(a+bI, c+dI)$$

مثال ($\mathbf{5.2.5}$):

لتكن النقطتين النيوتروسوفيكيتين $A(1+2I, I), B(3I, -2+I)$، عندئذ يكون:

1. الإيزومتري للنقطتين A, B هو $\acute{A}\big((1,3),(0,1)\big), \acute{B}\big((0,3),(-2,-1)\big)$.
2. الإيزومتري للمتجه $\overrightarrow{AB} = (-1+I, -2)$ هو $\overrightarrow{\acute{A}\acute{B}} = \big((-1,0),(-2,-2)\big)$.
3. المسافة النيوتروسوفيكية:

$$[AB] = \sqrt{1+4+I[0+4-1-4]} = \sqrt{5-I} = \sqrt{5} + I\big[4-\sqrt{5}\big]$$

الصورة الإيزومترية للمسافة الكلاسيكية بينهما هي:

$$\big[\acute{A}\acute{B}\big] = \left(\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}, \sqrt{(0)^2+(-2)^2}\right) = \big(\sqrt{5}, 4\big) = g([AB])$$

مبرهنة ($\mathbf{6.2.5}$):

لتكن $A\big((a,b),(c,d)\big)$ جداء ديكارتي لنقطتين كلاسيكيتين، عندئذ الصورة العكسية الإيزومترية (النقطة النيوتروسوفيكية المقابلة) لها هي

$$B(a+(b-a)I, c+(d-c)I)$$

$\mathbf{5-3}$ – بعض الأشكال الهندسية النيوتروسوفيكية:

تعريف($\mathbf{5.3.1}$): (الدائرة النيوتروسوفيكية)

لتكن $M(a+bI, c+dI)$ نقطة نيوتروسوفيكية ثابتة، عندئذ نعرف الدائرة النيوتروسوفيكية ذات المركز M ونصف القطر $R = r_1 + r_2I \geq 0$ بأنها مجموعة النقاط ثنائية البعد $N(X,Y) = N(x_0 + x_1I, y_0 + y_1I)$ والتي تحقق: $dis(M,N) = R = const$.

مبرهنة ($\mathbf{5.3.2}$) :

لتكن $M(a+bI, c+dI)$ نقطة نيوتروسوفيكية ثابتة، $R = r_1 + r_2I$ عدد حقيقي نيوتروسوفيكي موجب، عندئذ يكون:

1. معادلة الدائرة النيوتروسوفيكية ذات المركز M ونصف القطر R هي:

$$([x_0 + x_1I]^2 - [a+bI]^2) + ([y_0 + y_1I]^2 - [c+dI]^2) = R^2$$

2. الدائرة النيوتروسوفيكية السابقة تكافئ جداء دائرتين كلاسيكيتين:

$$C_1: (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = {r_1}^2$$

$$C_2: ([x_0 + x_1]^2 - [a + b]^2) + ([y_0 + y_1]^2 - [c + d]^2) = (r_1 + r_2)^2$$

البرهان:

1. باستخدام المسافة النيوتروسوفيكية في التعريف (8.1.5) والتعريف (9.1.5) نحصل على:

$$([x_0 + x_1 I]^2 - [a + bI]^2) + ([y_0 + y_1 I]^2 - [c + dI]^2) = R^2$$

2. نأخذ الصورة الإيزومترية للدائرة النيوتروسوفيكية نجد أن:

$$f\left(\left(([x_0 + x_1 I]^2 - [a + bI]^2) + ([y_0 + y_1 I]^2 - [c + dI]^2)\right)\right) = f(R^2)$$

ومنه:

$$((x_0 - a)^2, (x_0 + x_1 - [a + b])^2) + ((y_0 - c)^2, (y_0 + y_1 - [c + d])^2) = ({r_1}^2, (r_1 + r_2)^2)$$

ومنه فإن:

$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = {r_1}^2$ و $([x_0 + x_1] - [a + b])^2 + ([y_0 + y_1] - [c + d])^2 = (r_1 + r_2)^2$

مثال $(3.3.5)$:

لتكن الدائرة النيوتروسوفيكية $(X - I)^2 + \left(Y - (2 - 3I)\right)^2 = (2 + I)^2$، عندئذ:

$$C_1: (x_0 - 0)^2 + (y_0 - 2)^2 = 2^2$$

$$C_2: ([x_0 + x_1]^2 - [-1]^2) + ([y_0 + y_1]^2 - [-1]^2) = (2 + 1)^2$$

تعريف $(4.3.5)$: (المستقيم النيوتروسوفيكي)

نعرف المستقيم النيوتروسوفيكي بأنه مجموعة كل النقاط ثنائية البعد (X, Y) التي تحقق:

$$AX + BY + C = 0\,; X = x_0 + x_1 I, Y = y_0 + y_1 I, A = a_0 + a_1 I, B = b_0 + b_1 I, C = c_0 + c_1 I$$

مبرهنة $(5.3.5)$:

ليكن $AX + BY + C = 0$ مستقيم نيوتروسوفيكي d، ذلك المستقيم يكافئ جداء مستقيمين كلاسيكيتين:

$$d_1: a_0x_0 + b_0y_0 + c_0 = 0$$

$$d_2: (a_0 + a_1)(x_0 + x_1) + (b_0 + b_1)(y_0 + y_1) + c_0 + c_1 = 0$$

البرهان:

بأخذ الصورة الإيزومترية لمعادلة المستقيم النيوتروسوفيكي نحصل على البرهان.

مثال $(6.3.5)$:

ليكن المستقيم النيوتروسوفيكي $(1 + I)X + (2 - 4I)Y1 - 3I+= 0$، عندئذ:

$$d_1: x_0 + 2y_0 + 1 = 0$$

$$d_2: 2(x_0 + x_1) - 2(y_0 + y_1) - 2 = 0$$

ملاحظة $(7.3.5)$:

1. إذا كان لدينا دائرتان كلاسيكيتان من الشكل:

$$C_1: (x_0 - a)^2 + (y_0 - c)^2 = {r_1}^2, C_2: (x_1 - b)^2 + (y_1 - d)^2 = {r_2}^2$$

عندئذ يمكننا الحصول على الدائرة النيوتروسوفيكية باستخدام الإيزومتري العكسي، وتعطى بالصيغة:

$$\begin{aligned} C: (X - M)^2 + (Y - N)^2 = r^2\,; X = x_0 + (x_1 - x_0)I, Y \\ = y_0 + (y_1 - y_0)I, M = a + (b - a)I, N = c + (c - d)I, \\ r = r_1 + (r_2 - r_1)I \end{aligned}$$

2. إذا كان لدينا مستقيمان كلاسيكيان من الشكل:

$$d_1: a_0x_0 + b_0y_0 + c_0 = 0, d_2: a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$$

عندئذ يمكننا الحصول على المستقيم النيوتروسوفيكي باستخدام الإيزومتري العكسي، ويعطى بالصيغة:

$$\begin{aligned} d: AX + BY + C = 0\,\,; X = x_0 + (x_1 - x_0)I, Y = y_0 + (y_1 - y_0)I, A \\ = a_0 + (a_1 - a_0)I, B = b_0 + (b_1 - b_0)I, \\ C = c_0 + (c_1 - c_0)I \end{aligned}$$

تعريف ($8.3.5$): (النقطة القاسة لقطعة مستقيمة نيوتروسوفيكية بنسبة معلومة)

لتكن $C(c_1 + c_2 I, c_3 + c_4 I)$ نقطة نيوتروسوفيكية قاسمة للقطعة المستقيمة النيوتروسوفيكية $\overline{AB}$ بنسبة $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 I$، حيث أن

$A(a_1 + a_2 I, a_3 + a_4 I), B(b_1 + b_2 I, b_3 + b_4 I)$، عندئذ نكتب:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda \Longrightarrow \overline{AC} = \lambda \overline{CB}$$

إذا كانت C تقع بين A و B يكون:

$$\begin{aligned}([(c_1 - a_1) + I(c_2 - a_2), (c_3 - a_3) + I(c_4 - a_4)])\\ = (\lambda_1 \\ + \lambda_2 I)([(b_1 - c_1) + I(b_2 - c_2), (b_3 - c_3) + I(b_4 - c_4)])\end{aligned}$$

الآن، وبأخذ الصورة الإيزومترية للعلاقة السابقة يكون:

$$\begin{aligned}f([(c_1 - a_1) + I(c_2 - a_2), (c_3 - a_3) + I(c_4 - a_4)])\\ = f(\lambda_1 \\ + \lambda_2 I)\, f([(b_1 - c_1) + I(b_2 - c_2), (b_3 - c_3) + I(b_4 - c_4)])\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}([(c_1 - a_1), (c_1 + c_2) - (a_1 + a_2)], [(c_3 - a_3), (c_3 + c_4) - (a_3 + a_4)])\\ = [\lambda_1, (\lambda_1 + \lambda_2)]([(b_1 - c_1), (b_1 + b_2)\\ - (c_1 + c_2)], [(b_3 - c_3), (b_3 + b_4) - (c_3 + c_4)])\end{aligned}$$

وبمطابقة الطرفين يكون:

$$\begin{cases} c_1 - a_1 = \lambda_1(b_1 - c_1) \\ (c_3 - a_3) = \lambda_1(b_3 - c_3) \\ (c_1 + c_2) - (a_1 + a_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)[(b_1 + b_2) - (c_1 + c_2)] \\ (c_3 + c_4) - (a_3 + a_4) = (\lambda_1 + \lambda_2)[(b_3 + b_4) - (c_3 + c_4)] \end{cases}$$

وبالحل المشترك للجملة السابقة نجد أن:

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{a_1 + \lambda_1 b_1}{1 + \lambda_1} \\ c_3 = \dfrac{a_3 + \lambda_1 b_3}{1 + \lambda_1} \\ c_2 = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)(b_1 + b_2 - c_1) + (a_1 + a_2) - c_1}{1 + \lambda_1 + + \lambda_2} \\ c_4 = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)(b_3 + b_4 - c_3) + (a_3 + a_4) - c_3}{1 + \lambda_1 + + \lambda_2} \end{cases}$$

وهي إحداثيات النقطة C، النقطة القاسمة للقطعة النيوتروسوفيكية $\overline{AB}$.

مثال $(9.3.5)$:

لتكن النقطتان النيوتروسوفيكيتان $A(-2 + I, 6 + I), B(2 + I, -4 + b_4 I)$ أوجد إحداثيات النقطة القاسمة للقطعة النيوتروسوفيكية بنسبة $\lambda = \frac{1}{2} + I$.

الحل:

لدينا: $a_1 = -2, a_2 = 1, b_1 = 2, b_2 = 1, \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1$. إذن:

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{a_1 + \lambda_1 b_1}{1 + \lambda_1} \\ c_3 = \dfrac{a_3 + \lambda_1 b_3}{1 + \lambda_1} \\ c_2 = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)(b_1 + b_2 - c_1) + (a_1 + a_2) - c_1}{1 + \lambda_1 + + \lambda_2} \\ c_4 = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)(b_3 + b_4 - c_3) + (a_3 + a_4) - c_3}{1 + \lambda_1 + + \lambda_2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{-2}{3} \\ c_3 = \dfrac{8}{3} \\ c_2 = \dfrac{31}{15} \\ c_4 = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow C\left(\frac{-2}{3} + \frac{31}{15} I, \frac{8}{3} - \frac{5}{3} I\right)$$

$5 - 3 -$ القطوع النيوتروسوفيكية:

تعريف $(1.4.5)$: (القطع المكافئ النيوتروسوفيكي)

ليكن $R^2(I)$ مستوي نيوتروسوفيكي ثنائي البعد، وليكن $a = a_0 + a_1 I$, $b = b_0 + b_1 I$, $X = x_0 + x_1 I, Y = y_0 + y_1 I, p = p_0 + p_1 I$.

عندئذ يعرف القطع المكافئ النيتروسوفيكي بالمعادلة الآتية $(X - a)^2 = 4p(Y - b)$.

مبرهنة $(2.4.5)$:

ليكن $R^2(I)$ مستوي نيوتروسوفيكي ثنائي البعد، وليكن $a = a_0 + a_1 I$, $b = b_0 + b_1 I$, $x = x_0 + x_1 I$, $y = y_0 + y_1 I$, $p = p_0 + p_1 I$. عندئذ القطع المكافئ النيوتروسوفيكي بالصيغة $(X - a)^2 = 4p(Y - b)$ يكافئ الجداء الديكارتي لقطعين مكافئين كلاسيكيين.

البرهان:

لتكن لدينا معادلة القطع المكافئ النيوتروسوفيكي $(X - a)^2 = 4p(Y - b)$. وبأخذ الصورة الإيزومترية لمعادلة القطع يكون:

$$f(X - a)^2 = f(p)f(Y - b)$$

ومنه:

$$\left((x_0 - a_0)^2, \left((x_0 + x_1) - (a_0 + a_1)\right)^2\right) = 4(p_0, p_0 + p_1)\big(y_0 - b_0, (y_0 + y_1) - (b_0 + b_1)\big).$$

وبمطابقة الطرفين نجد:

$P_1: (x_0 - a_0)^2 = 4p_0(y_0 - b_0)$, $P_2: \left((x_0 + x_1) - (a_0 + a_1)\right)^2 = 4(p_0 + p_1)[(y_0 + y_1) - (b_0 + b_1)]$.

ملاحظة $(3.4.5)$:

إذا كانت p قابلة للقلب(لها مقلوب) وجدنا أن معادلة القطع المكافئ هي $(X - a)^2 = 4p(Y - b)$. أما إذا كانت p غير قابلة للقلب، هنا نميز الحالات الآتية:

1. إذا كان $p_0 = 0$, $p_0 + p_1 \neq 0$، هذا يعني أن القطع المكافئ النيوتروسوفيكي يكافئ الجداء الديكارتي للقطع المكافئ الكلاسيكي الذي معادلته

$$\left((x_0 + x_1) - (a_0 + a_1)\right)^2 = 4(p_0 + p_1)[(y_0 + y_1) - (b_0 + b_1)]$$

والمستقيم العمودي الذي معادلته $x_0 = a_0$.

2. إذا كان $p_0 \neq 0$, $p_0 + p_1 = 0$, هذا يعني أن القطع المكافئ النيوتروسوفيكي يكافئ الجداء الديكارتي للقطع المكافئ الكلاسيكي الذي معادلته

$(x_0 - a_0)^2 = 4p_0(y_0 - b_0)$ والمستقيم الذي معادلته $x_0 + x_1 = a_0 + a_1$.

3. إذا كان $p_0 = p_0 + p_1 = 0$ هذا يعني أن القطع المكافئ النيوتروسوفيكي يمثل الجداء الديكارتي للمستقيمين الكلاسيكيين معادلتهما هي

$$, x_0 + x_1 = a_0 + a_1 x_0 = a_0$$

تعريف $(4.4.5)$: (القطع الناقص النيوتروسوفيكي)

ليكن $R^2(I)$ مستوي نيوتروسوفيكي ثنائي البعد، وليكن $X = x_1 + x_2 I$, $Y = y_1 + y_2 I$, $c = c_1 + c_2 I,\ d = d_1 + d_2 I,\ a = a_1 + a_2 I,\ b = b_1 + b_2 I,$.عندئذ تعرف معادلة القطع الناقص النيوتروسوفيكي بالصيغة:

$$\frac{(X-c)^2}{a^2} + \frac{(Y-d)^2}{b^2} = 1$$

أو بالصيغة:

$$b^2(X-c)^2 + a^2(Y-d)^2 = a^2 b^2$$

مبرهنة $(5.4.5)$:

ليكن القطع الناقص النيوتروسوفيكي $b^2(X-c)^2 + a^2(Y-d)^2 = a^2 b^2$ ، إذا كانت a و b قابلتان للقلب ، فإن القطع الناقص النيوتروسوفيكي يكافئ الجداء الديكارتي لقطعين ناقصيين كلاسيكيين.

البرهان:

لتكن لدينا معادلة القطع الناقص النيوتروسوفيكي $b^2(X-c)^2 + a^2(Y-d)^2 = a^2 b^2$، وبأخذ الصورة الإيزومترية لها يكون:

$$f(b^2)\, f(X-c)^2 + f(a^2)\, f(Y-d)^2 = f(a^2) f(b^2)$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\left({b_1}^2, (b_1+b_2)^2\right).\left((x_1-c_1)^2, (x_1+x_2-c_1-c_2)^2\right) \\ + \left({a_1}^2, (a_1+a_2)^2\right).\left((y_1-d_1)^2, (y_1+y_2-d_1-d_2)^2\right) \\ = \left({a_1}^2 {b_1}^2, (a_1+a_2)^2 (b_1+b_2)^2\right)\end{aligned}$$

بمطابقة الطرفين نجد:

$$E_1 \colon {b_1}^2 (x_1-c_1)^2 + {a_1}^2 (y_1-d_1)^2 = {a_1}^2 {b_1}^2$$

$$\begin{aligned}E_2 \colon (b_1+b_2)^2 (x_1+x_2-c_1-c_2)^2 + (a_1+a_2)^2 (y_1+y_2-d_1-d_2)^2 \\ = (a_1+a_2)^2 (b_1+b_2)^2\end{aligned}$$

ملاحظة $(5.4.5)$:

إذا كانت a و b قابلتان للقلب، وجدنا أن معادلة القطع الناقص النيوتروسوفيكي هي:

$$\frac{(X-c)^2}{a^2}+\frac{(Y-d)^2}{b^2}=1$$

أما إذا كانت a و b غير قابلتان للقلب.

بداية إذا كانت a غير قابلة للقلب، عندئذ نميز الحالات الآتية:

1. إذا كان $a_1=0$ $a_1+a_2\neq 0$ ،, هذا يعني أن القطع الناقص النيوتروسوفيكي يكافئ الجداء الديكارتي للقطع الناقص الكلاسيكي الذي معادلته

$(b_1+b_2)^2(x_1+x_2-c_1-c_2)^2+(a_1+a_2)^2(y_1+y_2-d_1-d_2)^2=(a_1+a_2)^2(b_1+b_2)^2$ والمستقيم الأفقي الذي معادلته $x_0=a_0$.

2. إذا كان $a_1\neq 0$ $a_1+a_2=0$, هذا يعني أن القطع الناقص النيوتروسوفيكي يكافئ الجداء الديكارتي للقطع الناقص الكلاسيكي الذي معادلته

${b_1}^2(x_1-c_1)^2+{a_1}^2(y_1-d_1)^2={a_1}^2{b_1}^2$ والمستقيم الذي معادلته $x_1+x_2=c_1-c_2$.

3. إذا كان $a_1=a_2=0$ هذا يعني أن القطع الناقص النيوتروسوفيكي يكافئ نقطة الأصل $(0,0)$.

وبطريقة مماثلة نناقش الحالات إذا كانت b غير قابلة للقلب.

مثال $(6.4.5)$:

لتكن لدينا معادلة القطع الناقص النيوتروسوفيكي:

$$\frac{(X-1-I)^2}{(2+I)^2}+\frac{(Y-I)^2}{(3-I)^2}=1$$

هذه المعادلة تكافئ الجداء الديكارتي $E_1\times E_2$، حيث:

$$E_1: 9(x_1-1)^2+4(y_1)^2=(4)(9)=36$$

$$E_2: 4(x_1+x_2-2)^2+9(y_1+y_2-2)^2=(9)(4)=36$$

تعريف $(7.4.5)$: (القطع الزائد النيوتروسوفيكي)

ليكن $R^2(I)$ مستوي نيوتروسوفيكي ثنائي البعد، وليكن$X = x_1 + x_2I$, $Y = y_1 + y_2I$, $b = b_1 + b_2I$, $a = a_1 + a_2I$, $d = d_1 + d_2I$, $c = c_1 + c_2I$.عندئذ تعرف معادلة القطع الزائد النيوتروسوفيكي بالصيغة:

$$\frac{(X-c)^2}{a^2} - \frac{(Y-d)^2}{b^2} = 1$$

أو بالصيغة:

$$b^2(X-c)^2 - a^2(Y-d)^2 = a^2b^2$$

مبرهنة $(8.4.5)$:

ليكن القطع الزائد النيوتروسوفيكي $b^2(X-c)^2 + a^2(Y-d)^2 = a^2b^2$ ، إذا كانت a و b قابلتان للقلب ، فإن القطع الزائد النيوتروسوفيكي يكافئ الجداء الديكارتي لقطعين زائديين كلاسيكيين.

البرهان:

لتكن لدينا معادلة القطع الزائد النيوتروسوفيكي $b^2(X-c)^2 - a^2(Y-d)^2 = a^2b^2$، وبأخذ الصورة الإيزومترية لها يكون:

$$f(b^2)\, f(X-c)^2 - f(a^2)\, f(Y-d)^2 = f(a^2)f(b^2)$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\left({b_1}^2, (b_1+b_2)^2\right).\,&((x_1-c_1)^2, (x_1+x_2-c_1-c_2)^2)\\ &- ({a_1}^2, (a_1+a_2)^2).\,((y_1-d_1)^2, (y_1+y_2-d_1-d_2)^2)\\ &= \left({a_1}^2{b_1}^2, (a_1+a_2)^2(b_1+b_2)^2\right)\end{aligned}$$

بمطابقة الطرفين نجد:

$$H_1: {b_1}^2(x_1-c_1)^2 - {a_1}^2(y_1-d_1)^2 = {a_1}^2{b_1}^2$$

$$\begin{aligned}H_2: (b_1+b_2)^2(x_1+x_2-c_1-c_2)^2 - (a_1+a_2)^2(y_1+y_2-d_1-d_2)^2\\ = (a_1+a_2)^2(b_1+b_2)^2\end{aligned}$$

مثال $(9.4.5)$:

لتكن لدينا معادلة القطع الزائد النيوتروسوفيكي:

$$\frac{(X-I)^2}{(1+I)^2} - \frac{(Y-2I)^2}{(2+5I)^2} = 1$$

هذه المعادلة تكافئ الجداء الديكارتي $H_1 \times H_2$، حيث:

$$H_1: 9(x_1)^2 - (y_1)^2 = (4)(1) = 4$$

$$H_2: 49(x_1 + x_2 - 1)^2 - 4(y_1 + y_2 - 2)^2 = (4)(49) = 196$$

ملاحظة $(\mathbf{10.4.5})$:

أما إذا كانت a و b غير قابلتين للقلب. عندئذ تتم المناقشة كما في الملاحظة (5.4.5).

المراجع العلميَة

[1] Abobala, M., "A Study of AH-Substructures in n-Refined Neutrosophic Vector Spaces", International Journal of Neutrosophic Science", Vol. 9, pp.74-85, 2020.

[2] Smarandache F., and Abobala, M., " n-Refined Neutrosophic Vector Spaces", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 7, pp. 47-54, 2020.

[3] Hatip, A., Alhamido, R., and Abobala, M., " A Contribution to Neutrosophic Groups", International Journal of Neutrosophic Science", Vol. 0, pp. 67-76, 2019.

[4] Abobala, M, "Classical Homomorphisms Between Refined Neutrosophic Rings and Neutrosophic Rings", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 5, pp. 72-75, 2020.

[5] Abobala, M., " Classical Homomorphisms Between n-refined Neutrosophic Rings", International Journal of Neutrosophic Science", Vol. 7, pp. 74-78, 2020.

[6] Abobala, M., "On Some Special Substructures of Refined Neutrosophic Rings*",* International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 5, pp. 59-66, 2020.

[7] N. Olgun and A. Hatip, "The Effect Of The Neutrosophic Logic On The Decision Making," in Quadruple Neutrosophic Theory And Applications, Belgium, EU, Pons Editions Brussels, 2020, pp. 238-253.

[8] J. Anuradha and V. S, "Neutrosophic Fuzzy Hierarchical Clustering for Dengue Analysis in Sri Lanka,*" Neutrosophic Sets and Systems, vol. 31, pp. 179-199, 2020.*

[9] A. Chakraborty, B. Banik, S. P. Mondal, and S. Alam, " Arithmetic and Geometric Operators of Pentagonal Neutrosophic Number and its Application in Mobile Communication Service-Based MCGDM Problem," Neutrosophic Sets and Systems, vol. 32, pp. 61-79, 2020.

[10] S. K. Patro and F. Smarandache, "THE NEUTROSOPHIC STATISTICAL DISTRIBUTION, MORE PROBLEMS, MORE SOLUTIONS," *Neutrosophic Sets and Systems,* vol. 12, pp. 73-79, 2016.

[11] Hatip, A., "Neutrosophic Special Functions", International Journal of Neutrosophic Science,

[12] Alhamido, R., and Gharibah, T., "Neutrosophic Crisp Tri-Topological Spaces", Journal of New Theory, Vol. 23, pp.13-21, 2018.

[13] Agboola, A.A.A,. and Akinleye, S.A,. "Neutrosophic Vector Spaces", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 4, pp. 9-17, 2014.

[14] Abobala, M., "AH-Subspaces in Neutrosophic Vector Spaces", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 6, pp. 80-86, 2020

[15] Alhamido, R., and Abobala, M., "AH-Substructures in Neutrosophic Modules", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 7, pp. 79-86, 2020.

[16] Hatip, A., and Olgun, N., " On Refined Neutrosophic R-Module", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 7, pp.87-96, 2020.

[17] Hatip, A., and Abobala, M., "AH-Substructures In Strong Refined Neutrosophic Modules", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 9, pp. 110-116, 2020.

[18] Sankari, H., and Abobala, M., "n-Refined Neutrosophic Modules", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 36, 2020.

[19] Abdel-Basset, M., Gamal, A., Son, L. H., & Smarandache, F. (2020). A Bipolar Neutrosophic Multi-Criteria Decision Making Framework for Professional Selection. Applied Sciences, 10(4), 1202.

[20] G. Shahzadi, M. Akram and A. B. Saeid, "An Application of Single-Valued Neutrosophic Sets in Medical Diagnosis," *Neutrosophic Sets and Systems,* vol. 18, pp. 80-88, 2017.

[21] Abdel-Basset, M., Gunasekaran M., Abduallah G., and Victor C., "A Novel Intelligent Medical Decision Support Model Based on Soft Computing and IoT", IEEE Internet of Things Journal , 2019.

[22] Abdel-Basset, Mohamed, et al. "An integrated plithogenic MCDM approach for financial performance evaluation of manufacturing industries." Risk Management (2020): 1-27.

[23] T.Chalapathi and L. Madhavi,. "Neutrosophic Boolean Rings", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 33, pp. 57-66, 2020.

[24] Abdel-Basset, M., Mohamed, R., Zaied, A. E. N. H., Gamal, A., & Smarandache, F. (2020). Solving the supply chain problem using the best-worst method based on a novel Plithogenic model. In Optimization Theory Based on Neutrosophic and Plithogenic Sets (pp. 1-19). Academic Press.

[25] Smarandache, F., and Abobala, M., "n-Refined neutrosophic Rings", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. , pp. , 2020.

[26] Ibrahim, M.A., Agboola, A.A.A, Badmus, B.S., and Akinleye, S.A., "On refined Neutrosophic Vector Spaces I", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 7, pp. 97-109, 2020.

[27] Ibrahim, M.A., Agboola, A.A.A, Badmus, B.S., and Akinleye, S.A., "On refined Neutrosophic Vector Spaces II", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 9, pp. 22-36, 2020.

[28] Olgun, N., and Khatib, A., "Neutrosophic Modules", Journal of Biostatistic and Biometric Application", Vol. 3, 2018.

[29] W. B. V. Kandasamy and F. Smarandache, Neutrosophic Rings, Hexis, Phoenix, Arizona: Infinite Study, 2006.

[30] F. Smarandache, Introduction to Neutrosophic Statistics, USA: Sitech & Education Publishing, 2014.

[31] F. Smarandache, "Neutrosophic Set a Generalization of the Intuitionistic Fuzzy Sets," Inter. J. Pure Appl. Math., pp. 287-297, 2005.

[32] Abobala, M., " Semi Homomorphisms and Algebraic Relations Between Strong Refined Neutrosophic Modules and Strong Neutrosophic Modules", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 39, 2021.

[33] M. Ali, F. Smarandache, M. Shabir and L. Vladareanu, "Generalization of Neutrosophic Rings and Neutrosophic Fields," Neutrosophic Sets and Systems, vol. 5, pp. 9-14, 2014.

[34] Abobala, M., A Study of Maximal and Minimal Ideals of n-Refined Neutrosophic Rings, Journal of Fuzzy Extension and Applications, Vol. 2, pp. 16-22, 2021.

[35] Abobala, M., On The Representation of Neutrosophic Matrices by Neutrosophic Linear Transformations, Journal of Mathematics, Hindawi, 2021.

[36] Abobala, M., Partial Foundation of Neutrosophic Number Theory, Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 39 , 2021.

[37] Sankari, H., and Abobala, M.," AH-Homomorphisms In neutrosophic Rings and Refined Neutrosophic Rings", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 38, pp. 101-112, 2020.

[38] Mohammad Abobala, Ahmad Hatip, "An Algebraic Approach to Neutrosophic Euclidean Geometry," Neutrosophic Sets and Systems, pp. 114-123, 1 Jun 2021.

[39] A. A. Salama, F. Smarandache Neutrosophic Crisp Set Theory, Educational. Education Publishing 1313 Chesapeake, Avenue, Columbus, Ohio 43212, (2015).

[40] A. A. Salama and F. Smarandache. "Neutrosophic crisp probability theory & decision making process." Critical Review: A Publication of Society for Mathematics of Uncertainty, vol. 12, p. 34-48, 2016.

[41] R. Alhabib, M. Ranna, H. Farah and A. A Salama, "Foundation of Neutrosophic Crisp Probability Theory", Neutrosophic Operational Research, Volume III , Edited by Florentin Smarandache, Mohamed Abdel-Basset and Dr. Victor Chang (Editors), pp.49-60, 2017.

[42] R. Alhabib, M. Ranna, H. Farah and A. A Salama.(2018). Some neutrosophic probability distributions. Neutrosophic Sets and Systems, 22, 30-38, 2018.

[43] H. ELwahsha, M. Gamala, A. A. Salama, I.M. El-Henawy. Modeling Neutrosophic Data by Self-Organizing Feature Map: MANETs Data Case Study, Procida Computer, Vol.121, pp152-157, 2017.

[44] R. Alhabib, A. A Salama, "Using Moving Averages To Pave The Neutrosophic Time Series", International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Volume III, Issue 1, PP: 14-20, 2020.

[45] Belal Amin, A. A. Salama, I. M. El-Henawy, Khaled Mahfouz, Mona G. Gafar, "Intelligent Neutrosophic Diagnostic System for Cardiotocography Data", Computational Intelligence and Neuroscience, vol. 2021, 12 pages, 2021.

[46] Yasser I., Abd El-Khalek A.A., Twakol A., Abo-Elsoud ME., Salama A.A., Khalifa F. (2022) A Hybrid Automated Intelligent COVID-19 Classification System Based on Neutrosophic Logic and Machine Learning Techniques Using Chest X-Ray Images. In: Hassanien AE., Elghamrawy S.M., Zelinka I. (eds) Advances in Data Science and Intelligent Data Communication Technologies for COVID-19. Studies in Systems, Decision and Control, vol 378. Springer.

[47] Ibrahim Yasser, Abeer Twakol, A. A. Abd El-Khalek, Ahmed Samrah and A. A. Salama, COVID-X: Novel Health-Fog Framework Based on Neutrosophic Classifier for Confrontation Covid-19, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 35, 2020, pp. 1-21.

[48] A.A. Salama, Ahmed Sharaf Al-Din, Issam Abu Al-Qasim, Rafif Alhabib and Magdy Badran, Introduction to Decision Making for Neutrosophic Environment “Study on the Suez Canal Port, Egypt”, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 35, 2020, pp. 22-44.

المؤلف (1)

أ.د. / أحمد سلامة

Prof. Ahmed Salama

قسم الرياضيات وعلوم الحاسب – كلية العلوم – جامعة بورسعيد - مصر

رئيس المجمع العالمي لأنظمة النيتروسوفيك (الأقطار العربية) بقرار من المركز الرئيسي من جامعة نيوميكسيكو- أمريكا

Email: drsalama44@gmail.com

الوظائف :

- رئيس قسم الرياضيات وعلوم الحاسب بكلية العلوم - جامعة بور سعيد- مصر
- عميد المعهد العالى للحاسب الآلي بالعريش - مصر (من 2017: 2020)

نبذة عن الإنجازات

- حاصل على درجة DSC ودرجة بروفيسور من أمريكا
- جائزة أعظم باحث في إفريقيا للعلوم والتكنولوجيا من المعهد الأكاديمي للأبحاث تكساس أمريكا 2017 بترشيح من البروفيسور الأمريكي فلورنتن سمارنداكة 2015 البروفيسور جاداما.
- حاصل على الميدالية الذهبية من المجمع النيتروسوفيكى بأمريكا وفرعه بالعراق 2020
- صاحب نظرية النيتروسوفيك كريسبب والعديد من التطبيقات في جميع علوم المعرفة والنظم وأول من وضع أسس للرياضيات النيتروسوفيكية والفراغات التوبولوجية وأنظمة المعلومات وتطبيقات متعددة في علوم الحاسب وعلم النفس بمشاركة البروفيسور فلورنتن وتم نشر أكثر من 160 بحث علمي و 300 مقالة علمية وتربوية في دوريات ومجلات دولية في مجال الرياضيات وعلوم الحاسب ونظم المعلومات والاحصاء وقام بالمشاركة بنشر أكثر من 10 كتب وفصول بأمريكا وأوروبا
- مشارك أول فكرة لإصدار مجلة علمية محكمة في علوم النيتروسوفيك مع جامعة نيوميكسيكو بموافقة مكتبة الكونجرس بأمريكا 2013 تم إصدار منها 47 إصدار ودخولها المحركات العلمية الدولية بمعاملات التأثير العالمية
- رئيس تحرير مجلة المعرفة النيتروسوفيكية Neutrosophic Knowledge الصادرة من أمريكا
- ساهم في ترجمة الكتب العلمية الدولية بأمريكا بدور نشر أوربية والمشاركة في تأليف كتب علمية متنوعة منشورة دوليا ودور نشر أوربية والمشاركة بخطط لمشاريع بحثية مع فريق عمل دولي
- شهادة أفضل البحوث من أعداد المجلة الأمريكية 2018 المؤسسة الدولية لعلوم النيتروسوفيك بأمريكا

المؤلف (2)

Malath Alaswad

ملاذ الأسود

الموقع الاكاديمي: جامعة غازي عينتاب – قسم الرياضيات- تركيا

Gaziantep University, Department of Mathematics, Turkey

نبذة عن حياة الكاتب ونشاطاته :

- **ولد ملاذ الأسود في عام 1989 في حماه – سوريا وتلقى تعليمه الابتدائي والاعدادي والثانوي فمدينة طيبة الإمام.**
- **حصل ملاذ الأسود على شهادة البكالوريوس من جامعة البعث في سوريا عام 2013م.**
- **حصل على شهادة الماجستير في علوم الرياضيات البحتة (هندسة تفاضلية) من جامعة البعث عام 2018م.**
- **تابع تحصيله العلمي فحصل على مقعد لدراسة الدكتوراه في جامعة غازي عينتاب ولا يزال طالبا فيها.**
- **يعمل ملاذ الأسود حاليا محاضرا في جامعة حماه وعمل سابقاً محاضراً في جامعة البعث**

قدم ملاذ الأسود ما يزيد عن خمس عشرة ورقة بحثية في علوم النيتروسوفيك بالإضافة الى ثلاث كتب باللغة العربية .

المؤلف (3)

أحمد خطيب - Ahmed HATIP

الموقع الاكاديمي: جامعة غازي عينتاب – قسم الرياضيات- تركيا

Gaziantep University, Department of Mathematics, Turkey

نبذة عن حياة الكاتب ونشاطاته:

- ولد احمد خطيب في عام 1984 في خان شيخون – ادلب- سوريا وتلقى تعليمه الابتدائي والاعدادي والثانوي فيها.
- حصل احمد خطيب على شهادة البكالوريوس من جامعة حلب في سوريا
- حصل على شهادة الماجستير في علوم النيتروسوفيك من جامعة غازي عينتاب
- تابع تحصيله العلمي فحصل على مقعد لدراسة الدكتوراه في جامعة غازي عينتاب ولا يزال طالبا فيها.
- يعمل احمد خطيب حاليا محاضرا في جامعة غازي عينتاب ويشغل منصب رئيس قسم الرياضيات فيها.

قدم احمد خطيب ما يزيد عن عشرين ورقة بحثية في علوم النيتروسوفيك بالإضافة الى كتابين أحدهما باللغة العربية والآخر بالإنكليزية.

المراجعة العلمية (1)

أ.د. هدى اسماعيل خالد الجميلي

Prof. Dr. Huda E. Khalid,

Email: hodaesmail@yahoo.com
dr.huda-ismael@uotelafer.edu.iq

Mobile: +9647518096504

بكالـــوريوس في علـــوم الرياضيات / قسم الرياضيات / كلية العلوم/ جامعة الموصل 1998.

- مــاجستير / كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ قسم الرياضيات / جامعة الموصل 2001 .
- دكتوراه في الرياضيات/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ قسم الرياضيات / جامعة الموصل 2010 .

لديها عضوية في أكاديمية تليسيوا ـ جاليلو العالمية بلندن ، وعضوة في هيئة تحرير المجلات العلمية العالميـة التاليـة: IJNS, IJCAA JHEPGC, و عضوة شرف في المجمع العلمي العـالمي النيوتروسوفكي منذ 2015/5/19 ، وعضـو مشـارك في هيئة تحرير مجلة NSS التابعة لجامعة نيو مكسيكو الامريكية ومجلة Neutrosophic Knowledge، كما وكانت رئيسة لقسم الرياضيات في كلية التربيـة الاساسية / جامعة الموصل- جامعة تلعفر من 2012 الـى 2018 ، ثم اصبحت رئيسـة لقسم الشؤون العلمية والعلاقات الثقافية في رئاسة جامعة تلعفر منذ 2018 ولغايـة 2021، حالياً تشـغل منصـب مسـاعد رئيس جامعة تلعفر للشـؤون الاداريـة والماليـة والقانونيـة/ وزارة التعلـيم العـالي والبحـث العلمـي العراقيـة. احـدث منشـوراتها فـي مجـال تخصصـها وفي المنطق النيوتروسوفكي هو حـول وضـع صـيغ جديدة ومبتكرة للحلول العظمـى والـدنيا فـي المعـادلات العلاقيـة النيوتروسوفكية , كذلك وضـع مفهـوم مبتكر ل (ألاقل او يسـاوي) النيوتروسـوفكي فـي مسـائل البرمجـة الهندسـية غيـر المقيـدة . ولها اكثر من 30 بحثاً وكتب مؤلفة او مترجمة منشورة في مجلات ودور نشـر عالميـة كمـا وقامـت بمراجعـة عشـرات البحـوث والكتب لصالح مجلات ودور نشر عالمية. للمزيد من التفاصيل أنظر الروابط:

https://www.researchgate.net/profile/Drhuda_Khalid/stats

https://scholar.google.com/citations?user=1A-5iycAAAAJ&hl=en

المراجعة (2)

دكتورة رفيف الحبيب - قسم الإحصاء الرياضى – كلية العلوم - جامعة البعث – سوريا

- دكتوراه في الإحصاء الرياضي والبرمجة من جامعة حلب سوريا.
- عضو هيئة تعليمية في قسم الإحصاء الرياضي كلية العلوم جامعة البعث سوريا.
- عضو المجمع النيتروسوفيكي العالمي بأمريكا / جامعة نيومكسيكو.
- عضو الموسوعة الأمريكية للباحثين في مجال النيتروسوفيك.
- عضو هيئة تحرير في المجلة الأميركية Neutrosophic Sets and Systems
- عضو هيئة تحرير في المجلة الدولية لعلوم النيتروسوفيك /أميركا International Journal of Neutrosophic Science
- عضو الاتحاد العالمي للعلماء والباحثين /الولايات المتحدة الامريكية / كاليفورنيا.
- عضو في الهيئة الاستشارية العليا للاتحاد العالمي للعلماء والباحثين لعام 2020.
- نشرت العديد من الأبحاث في مجلات محلية وعالمية ذات معامل تأثير ومصنفة وفق مقاييس عالمية.
- المشاركة في إعداد كتب صادرة عن دور نشر عالمية / كدار نشر Ponsبروكسل – بلجيكا لعام 2017 ودار نشر نوفا - nova science publishersأميركا لعام 2020/.
- المشاركة بالعديد من المؤتمرات الدولية لأعوام 2020/2018/2017 .
- خبرة تدريسية من خلال تدريس العديد من المقررات النظرية والعملية في قسمي الرياضيات والاحصاء الرياضي.
- أول باحثة سورية تقوم بإدخال منطق النيتروسوفيك " فلسفة الفكر المحايد" إلى سورية والدول العربية، من خلال وضع أسس احتمالات النيتروسوفيك والتوزيعات الاحتمالية النيتروسوفيكية واتخاذ القرار النيتروسوفيكي من خلال أطروحة الدكتوراه بعنوان "صياغة الاحتمال الكلاسيكي وبعض التوزيعات الاحتمالية وفق منطق النيتروسوفيك وتأثير ذلك على اتخاذ القرار" والتي تم إنجازها بالتعاون مع مؤسس نظرية النيتروسوفيك الكلاسيكي البروفيسور المصري أحمد سلامة بجامعة بور سعيد والبروفيسور الأمريكي فلورنتن سمارانداكه مؤسس المنطق.

تم الحصول على عضوية فخرية في الجمعية الدولية لعلوم النيتروسوفيك بأميركا للإنجاز

المراجعة العلمية (3)

الاسم	**ميسم جديد**
البريد الالكتروني	jdidmaisam@gmail.com
العنوان	المزة – دمشق – سوريا
تاريخ الميلاد	27.04.1966
اللغات	الروسي – الإنكليزي

لمحة

شهادة دكتوراه (PH.D) في العلوم الرياضية جامعة تفير الحكومية التابعة لروسيا الاتحادية – عام 2003 تخصص النمذجة الرياضية - الطرق العددية ومجمعات البرامج .

عضو هيئة تدريسية ومدرسة في الجامعات السورية منذ ما يزيد عن 14 عامًا.

مشرفة على رسائل ماجستير طلاب في جامعة دمشق.

الإجازات الجامعية

بكالوريوس	كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية
دكتوراه	جامعة تفير الحكومية، روسيا

الخبرات

2006- حتى تاريخه	**كلية العلوم - جامعة دمشق**	
مدرسة جامعية	**مقررات قسم الرياضيات**	**هندسة تحليلية - النمذجة الرياضية**
	مقررات قسم الجيولوجيا	**رياضيات عامة (2)**
	مقررات قسم الكيمياء	**رياضيات عامة (3)**
	مقررات قسم الفيزياء	**التوابع خاصة**
	مقررات قسم الإحصاء	**تحليل (4) – هنسة تحليلية**
2012-2014	**كلية العلوم – قسم الرياضيات – جامعة تشرين**	
مدرسة جامعية	**مقررات قسم رياضيات**	**نظرية البيان**
		أمثليات وحساب التغيرات
		التحليل الدالي
		الهندسة التحليلية
	مقررات قسم الفيزياء	**التوابع الخاصة**
2015 – حتى تاريخه	**كلية الهندسة المعلوماتية – جامعة الشام الخاصة (ASPU)**	
مدرسة جامعية	**رياضيات عامة (1)**	
	رياضيات عامة (2)	
	رياضيات عامة (3)	
	الرياضيات المتقطعة	
	التحليل العددي	
	بحوث العمليات	
	النمذجة والمحاكاة	
	تطبيقات في الإحصاء الهندسي	
2015 – حتى تاريخه	**كلية العلوم – قسم الرياضيات – شعبة الرياضيات التطبيقية – جامعة دمشق**	
مدرسة طلاب ماجستير	**بحوث العمليات**	

2015 – حتى تاريخه إشراف على رسائل ماجستير	**النمذجة والمحاكاة** **كلية العلوم – قسم الرياضيات – شعبة الرياضيات التطبيقية – جامعة دمشق** **توازن ناش للألعاب الموسعة بمعلومات مثالية وغير مثالية وذات أربح متغيرة** **دراسة حول بعض الأساليب الكمية في نظرية اتخاذ القرار** **دراسة حول النماذج السكونية في إدارة المخزون** **دراسة حول إدارة المشاريع باتخدام التحليل الشبكي بهدف التقليل من الاختناقات** **أثر استخدام النماذج الكمية في ترشيد قرارات المخزون** **دراسة حول تطوير ثلاث خوارزميات التعلم الآلي (KNN – SVM – RF)** **دراسة صفوف الانتظار وفق منطق النتروسوفيك**
المؤلفات	
كتب ومقررات جامعية	بحوث عمليات، منشورات جامعة الشام الخاصة، 2021. رياضيات متقطعة، منشورات جامعة الشام الخاصة، 2021. رياضيات (1)، منشورات جامعة الشام الخاصة، 2020. رياضيات عامة (3)، منشورات جامعة دمشق، 2016. التحكم الأمثل في المسائل المتقطعة، منشورات جامعة تفير الحكومية، 2002.
أبحاث ومقالات	**يلينا أندرييفا وميسم جديد** النموذج الأمثل لاستخدام الموارد الطبيعية، طرق وخوارزميات دراسة مسائل التحكم الأمثل منشورات جامعة تفير، روسيا، 2000.
	يلينا أندرييفا وميسم جديد لزوم الشرط الأمثل في المسائل المتقطعة الخطية التحكم، متغيرات التحليل الدالي في نظرية التقريب منشورات جامعة تفير، روسيا، 2000.
	ميسم جديد النمذجة الرياضية لتكاثر الأسماك منشورات جامعة تفير، روسيا، 2000.
	ميسم جديد النماذج الرياضية لحماية واستخدام الموارد الطبيعية ضمن الشروط الصناعية، متغيرات التحليل الدالي في نظرية التقريب منشورات جامعة تفير، روسيا، 2001.
	ميسم جديد التحكم الأمثل في عملية صيد السمك، التحكم الأمثل بالنظم الديناميكية منشورات جامعة تفير، روسيا، 2000.
	ميسم جديد لزوم الشرط الأمثل في المسائل المتقطعة الخطية التحكم، متغيرات التحليل الدالي في نظرية التقريب منشورات جامعة تفير، روسيا، 2000.
	ميسم جديد النمذجة الرياضية لتكاثر الأسماك, منشورات جامعة تفير، روسيا، 2001.
	ميسم جديد النموذج المتقطع الثنائي الخطية لاستخدام الموارد الطبيعية بوجود شروط طورية، متغيرات التحليل الدالي في نظرية التقريب منشورات جامعة تفير، روسيا، 2001.
	ميسم جديد

	التحكم الأمثل بالمسائل المتقطعة ، منشورات جامعة تفير، روسيا، 2002
	ميسم جديد ورود المعراوي اتخاذ القرار في ظل المخاطرة والبحث عن الاستراتيجية المثلى في ضوء المعلومات المتوفرة مجلة جامعة البعث، المجلد 38، 2016.
	ميسم جديد وآلاء الشيخة توازن ناش للاستراتيجية المختلطة من أجل n لاعب, مجلة جامعة البعث، المجلد 39، 2017.
	ميسم جديد ورفيف الحبيب وأحمد سلامة النموذج السكوني لإدارة المخزون دون عجز بمنطق النيتروسوفيك المجلة الدولية لعلوم النيتروسوفيك، أمريكا،المجلد 16 ، الإصدار الأول ، 2021
أبحاث ومقالات قيد النشر	**ميسم جديد وأحمد سلامة ورفيف الحبيب وهدى خالد وفاطمة سليمان** المعالجة النيتروسوفيكة للنموذج السكوني لإدارة المخزون مع عجز المجلة الدولية لعلوم النيتروسوفيك
	ميسم جديد ورفيف الحبيب وأسامة بحبوح وأحمد سلامة وهدى خالد المعالجة النيتروسوفيكية لمشكلة التخزين المتعدد للمواد والأحجام المحدودة المجلة الدولية لعلوم النيتروسوفيك
	ميسم جديد ورفيف الحبيب وأحمد سلامة أساسيات المحاكاة النيتروسوفيكية لتوليد الأرقام العشوائية المرتبطة بالتوزيع الاحتمالي المنتظم مجموعات وأنظمة النيتروسوفيك
	ميسم جديد وأحمد سلامة وهدى خالد المعالجة النيتروسوفيكية لخوارزميات السمبلكس المباشرة لتحديد الحل الأمثل للنموذج الخطي المجلة الدولية لعلوم النيتروسوفيك
المراجعة العلمية	**علم النيتروسوفيك وتطبيقاته** تأليف أحمد سلامة ورفيف الحبيب

المراجعة العلمية (3)

د. إبراهيـــــم ياســــــر

Dr. Ibrahim Yasser

Email: ibrahimyasser14@gmail.com
ibrahim_yasser@mans.edu.eg

حصل الدكتور ياسر على بكالوريوس هندسة الإلكترونيات والاتصالات من جامعة بنها، مصر عام 2009. كما حصل على درجتى الماجستير والدكتوراه في 2016 و2020 على التوالي فى هندسة الإلكترونيات والاتصالات من كلية الهندسة، جامعة المنصورة، مصر. تغطي اهتماماته البحثية العديد من المجالات منها تأمين المعلومات، والشبكات، مع التركيز على تأمين الوسائط المتعددة، وأمن الصور، وأمن الفيديو، وتطبيقات الهواتف الذكية، والحوسبة الضبابية، وعلوم النيتروسوفيك وتطبيقاته في العديد المجالات. مهتم في الآونة الأخيرة بأبحاث الذكاء الصناعى وتطبيقاته في مجالات متعددة منها تصنيف الصور الطبية، البيانات الضخمة، علوم الفضاء، الأمن السيبرالى، وتأمين المعلومات. كما أنه مهتم بتدريس الدورات والمقررات ذات الصلة بالمعالجة الرقمية / التحليل والنماذج الإحصائية لطلاب البكالوريوس والدراسات العليا. نشر العديد من الأبحاث في مجلات محلية وعالمية ذات معامل تأثير ومصنفة وفق مقاييس عالمية وقام بمراجعة عشرات البحوث والكتب لصالح مجلات ودور نشر عالمية. لديه عضوية الاتحاد الدولي للعلماء والباحثين للعالم العربي. كما أنه رئيس تحرير مجلة Neutrosophic Knowledge Journal ISSN 2767-0619 (Print)، ISSN 2767-0627 (Online)، http://fs.unm.edu/NK جامعة نيو مكسيكو، أمريكا. عضو المجمع العالمى لعلوم النيتروسوفيك، بجامعة نيومكسيكو بأمريكا. عضو الموسوعة الأمريكية للعلماء والباحثين لعلوم النيتروسوفيك، كما أنه عضو هيئة تحرير الموسوعة العربية لعلوم النيتروسوفيك.