الميكانيك والتحليل الرياضي والتحكم

Mechanics, Mathematical Analysis & Control

الروبوتيكس

Robotics

تأليف المهندس رامي خليل

www.engramikhalil.weebly.com

ISBN 978-6-05035-459-1

50699 >

9 786050 354591

NARCISSUS

تلفون: 0096176610394
بريد إلكتروني: eng.ramikhalil@gmail.com
صيدا - لبنان

هذا الإصدار الإلكتروني متاح فقط من:
www.engramikhalil.weebly.com

ISBN 978-6-05035-459-1
50699 >
9 786050 354591

إلى من أسقياني الحب والحنان وعلّماني وأدّباني صغيراً وكبيراً، وكان دعاؤهما سر توفيقي.

أمي وأبي الغاليان.

إلى الذين بقلوبهم الطيبة تهنأ نفسي ويرتاح قلبي، وتحلو معهم الحياة بيسرها وبعسرها.

أخي وأختاي.

إلى الروح التي سكنت روحي والقلب الذي عانق قلبي، فكانت المبلسمة العطوف والجنة المعطاء.

شريكة دربي.

لكم أهدي هذا الكتاب

رامي خليل

تأليف: المهندس رامي خليل

الروبوتيكس: الميكانيك والتحليل الرياضي والتحكم

Robotics: Mechanics, Mathematical Analysis and Control

www.engramikhalil.weebly.com

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرس الكتاب

الفصل الثالث

الفصل الرابع

الفصل الخامس

الفصل السادس

الفصل السابع

الفصل الثامن

الفصل التاسع

الفصل العاشر

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

مقدمة المؤلف

يعتبر علم الروبوت (الروبوتيكس Robotics) أحد فروع التكنولوجيا الحديثة والجديدة نسبياً والذي يجمع بين مختلف الأطر الهندسية التقليدية، فحتى نتمكن من الفهم الدقيق لفحوى هذه العلم ونعرف مدى التعقيد الكامن في الروبوتات وفي تطبيقاتها العديدة، فإن الأمر يتطلب منا دراية معرفية جيدة حول الهندسة الميكانيكية والهندسة الكهربائية والنظم الصناعية وهندستها وعلوم الكمبيوتر والاقتصاد والرياضيات. وهناك العديد من التخصصات الأكاديمية الهندسية الجديدة (كهندسة التصنيع والهندسة التطبيقية والهندسة المعرفية) كان من أحد أسباب نشوئها هو القدرة على التعامل مع تعقيدات هذا الفرع من العلم المعني بالروبوتات وأتمتة المصانع.

إن أول ظهور لمصطلح "روبوت - Robot" في مفردات اللغة جاء من قبل الكاتب المسرحي التشيكي كاريل كابيك Karel Capek وذلك من خلال عمله المسرحي الذي قام به في عام 1920 بعنوان "رجال روسوم Rossum الآليون العالميون" (باللغة التشيكية Rossumovi univerzální roboti). وكلمة "روبوت - Robot" في الأساس هي مشتقة من الكلمة التشيكية "Robota" والتي تعني العمل الشاق، وكان مبتكر هذه الكلمة هو أخ الكاتب المسرحي الآنف الذكر واسمه جوزيف كابيك Josef Capek وذلك في مسعى منه لمساعدة أخيه على ابتكار اسم للآلات "الحية" في عمله المسرحي. وبعد ذلك أصبحت هذه الكلمة تطلق على تشكيلة واسعة من الأجهزة الميكانيكية، على سبيل المثال، الآلات المشغلة عن بعد والتي تقوم بتكرار حركة مشغلها Teleoperator، والمركبات العاملة تحت الماء وغير ذلك. وبشكل افتراضي، يمكن إلى حد ما أن يطلق على أي تركيبة آلية يتم تشغيلها مع وجود حيز ما للتحكم الذاتي، والذي عادة مايتم باستخدام التحكم بالحاسب، اسم "روبوت".

وكتعريف رسمي للروبوت، يمكن أن نعتمد التعريف الصادر عن المعهد الأمريكي للروبوت Robot Institute of America (RIA): الروبوت هو مناور متعدد الوظائف قابل للبرمجة ولإعادة البرمجة تم تصميمه من أجل تحريك المواد والقطع والأدوات وغير ذلك من خلال حركات مبرمجة تتغير تبعاً للأداء ولتنوع المهمات. ووفقاً لهذا التعريف، فإن ولادة الروبوت كانت نتيجة الدمج بين وسيلتين تقنيتين: الآلات المشغلة عن بعد والتي تكرر حركة مشغلها وآلات التفريز المتحكم بها رقمياً. حيث كان السبب وراء إيجاد مثل هذه الآلات المشغلة عن بعد هو تطوير وسيلة للتعامل مع المواد ذات الطبيعة الإشعاعية في الحرب العالمية الثانية. في حين كان السبب وراء إيجاد التحكم الرقمي باستخدام الحاسب Computer Numerical Control (CNC) هو الحاجة إلى الدقة العالية التي يتطلبها تشغيل بعض العناصر كأجزاء الطائرات عالية الأداء. ولذلك فإن الروبوتات الأولى وبشكل أساسي تجمع بين الميكانيزمات الميكانيكية الموجودة في الآلات المشغلة عن بعد (والتي مهمتها تقليد حركة العامل المشغل) والتحكم الذاتي وقابلية البرمجة لآلات التشغيل المتحكم بها رقمياً.

إن أولى التطبيقات الناجحة للروبوتات المناورة هي تلك التي تعنى بشكل عام بنقل المواد، كالتطبيقات المستخدمة في القولبة بالحقن أو المستخدمة في عملية الختم، حيث كانت وظيفة الروبوت الأساسية هي نزع وفك المشغولات بعد انتهاء عملية التشغيل ونقل وترتيب المشغولات النهائية. ويمكن برمجة هذا الصنف من الروبوتات من أجل تنفيذ تسلسل محدد من الحركات، كالانتقال إلى الموقع A، حيث يقوم اللاقط بعملية المسك، ومن قم الانتقال إلى الموقع B، وغيرها من الحركات التي يمكن أن توكل إلى الروبوت. وهذه الحركات كانت تتم دون وجود أي قدرة على التحسس الخارجي. ولكن في التطبيقات المعقدة أكثر، كاللحام والصقل والتجليخ والتجميع، فإن الأمر يتطلب بالإضافة إلى قابلية تنفيذ الحركات المعقدة بعضاً من أشكال التحسس الخارجي، كأنظمة الرؤيا والأنظمة اللمسية والتحسس للقوى، وذلك بسبب ازدياد التفاعل ما بين الروبوت والبيئة المحيطة به.

ومن الجدير بالذكر أن ننوه إلى أن التطبيقات المهمة للروبوتات ليست محصورة فقط في نطاق الأعمال الصناعية حيث يمكن توظيف الروبوت عوضاً عن العنصر البشري، فهناك الكثير من التطبيقات الأخرى التي يهتم هذا العلم (الروبوتيكس) بها، كتلك التي يكون فيها استخدام العنصر البشري غير مجدٍ وغير فعال أو غير مرغوب فيه أساساً، كاستكشاف الكواكب وأعماق البحار وصيانة وإصلاح الأقمار الاصطناعية وإلغاء تفعيل المتفجرات والعمل في البيئات ذات النشاط الإشعاعي.

ولعل المتمعن في زمننا الحالي وخصوصاً في العقدين الأخيرين منه، سيجد أن هناك موجة عالية من النشاط فيما يتعلق بالروبوتات وعلومها، وذلك على صعيد الأبحاث الجارية في هذا الصدد وعلى صعيد معرفة التصورات والتخيلات التي لا حصر لها والمتنوعة الاحتمالات عن ما ستؤول إليه الروبوتات المستقبلية. وهذه الفترة الزمنية كانت قد ترافقت مع نضوج تكنولوجي فيما يخص الروبوتات، ابتداء من الروبوتات المعنية بالمسك والنقل واللحام والدهان، وصولاً إلى روبوتات التجميع فائقة التطور والمتخصصة في تركيب رقاقات الدارات المتكاملة ومكوناتها على لوحات الدارات المطبوعة، والروبوتات المتنقلة والتي مهمتها التعامل مع المنتجات واستلامها وتسليمها. وهناك العديد من أنظمة الأتمتة الروبوتية أصبحت الآن تعد "معياراً" يمكن تطبيقه في العديد من المصانع، ويكاد لا يخفى على أحد مدى النمو الكبير لهذا العلم وتطبيقاته التي أصبحت تشمل العمل ضمن البيئات ذات الطبيعة الخطرة والعمليات الجراحية الدقيقة والميكانيزمات الكهروميكانيكة المايكروية وحتى النانوية منها.

وبشكل متزامن مع هذا النمو الهائل للروبوتيكس في العقدين الأخيرين تم إيجاد وتطوير الكثير من المناهج الدارسية في معظم الجامعات العلمية البحثية تركز على مختلف جوانب هذا العلم. وهذه المناهج يتم تدريسها للطلاب في المستويات ما قبل التخرج وما بعده في العديد من التخصصات كعلوم الكمبيوتر والهندسة الميكانيكية والكهربائية والرياضيات، وتختلف نقاط البحث في هذه المناهج تبعاً للخلفية العلمية للطلاب حسب كل اختصاص. وأصبح هناك عدد كبير من المراجع والمؤلفات الممتازة المنبثقة من هذه المناهج والتي تغطي مواضيع مهمة في التحليل الكينماتيكي (الحركي) والديناميكي (التحريكي) وسبل التحكم والتحسس والتخطيط للروبوتات المختلفة.

وبسبب حالة النضوج التي تعم مختلف مناحي هذا العلم والتنوع الكبير في اهتمامات الطلاب والباحثين فيه، رأينا أن هناك ضرورة لوجود كتاب يقدم وبصورة موجزة وسهلة إلى حد ما أهم النقاط المتعلقة بالصياغة الرياضية للتحليل الكينماتيكي والديناميكي وقوانين التحكم للروبوتات المناورة. وهذا الكتاب هو محاولة منا لتوصيل هذه المعلومات والأفكار لمهندسي الميكانيك وخاصة مهندسي التصميم الميكانيكي وهم المعنيون بشكل خاص بكل الشروحات والمعطيات المتعلقة بالدراسة الكينماتيكية والديناميكية لشتى أنواع الروبوتات بمختلف بناها الهيكلية المفتوحة أو المغلقة، ولمهندسي الكهرباء والذين لا يعلمون كثيراً عن الميكانيزمات الميكانيكية، وأيضاً لمهندسي الكمبيوتر والباحثين في علومه والذين قد لايعلمون شيئاً عن نظرية التحكم، وأخيراً للرياضيين الذين في قلبهم شيء من الفضول حول الروبوتيكس ومباحثه ولكن لم يكن لديهم الوقت الكافي لاكتساب المتطلبات اللازمة للشروع بدراسة هذا العلم.

وعلى الرغم من أن الإلمام الكامل بمختلف المواضيع التي يتطرق لها علم الروبوتيكس والحديث عنها ومعالجتها يحتاج إلى مجلدات عديدة، إلا أن هدفنا الأساسي من هذا الكتاب هو تقديم نظرة عامة شاملة لبعض الأفكار المهمة في هذا العلم والتي تعتبر منصة الانطلاق لمن يريد التبحر فيه والخوض في غماره، مع العلم أنه وفي والوقت الحالي تعتبر غالبية تطبيقات الروبوتيكس تتمحور حول الروبوتات الصناعية والأذرع الروبوتية المستخدمة في العديد من المجالات الصناعية، ولذلك فإنه وفي هذا الكتاب سنتطرق للحديث عن مثل هذه الروبوتات بشكل شبه مفصل في إطار مسعانا الذي نرغب ببلوغه عن طريق هذا الكتاب.

إن محتويات هذا الكتاب تم اختيارها بحيث تبقى كأساس يمكن الرجوع إليه بما يتناسب مع الآفاق والابتكارات التكنولوجية الجديدة والتي تمهد لثورة صناعية جديدة يتربع هذا العلم على عرشها والتي بتنا نراها بوضوح في الأعوام الأخيرة. ونأمل من القارئ لصفحات الكتاب أن يجد من الفائدة والحماس والمتعة ماوجدناه فيما يخص التوجهات والآفاق التكنولوجية لهذا العلم وما يكمن وراءه من نظريات ومفاهيم.

المؤلف:

المهندس رامي عبد الرزاق خليل

لبنان – صيدا
2014\12\15

الفصل الأول

لمحة عامة

Preview

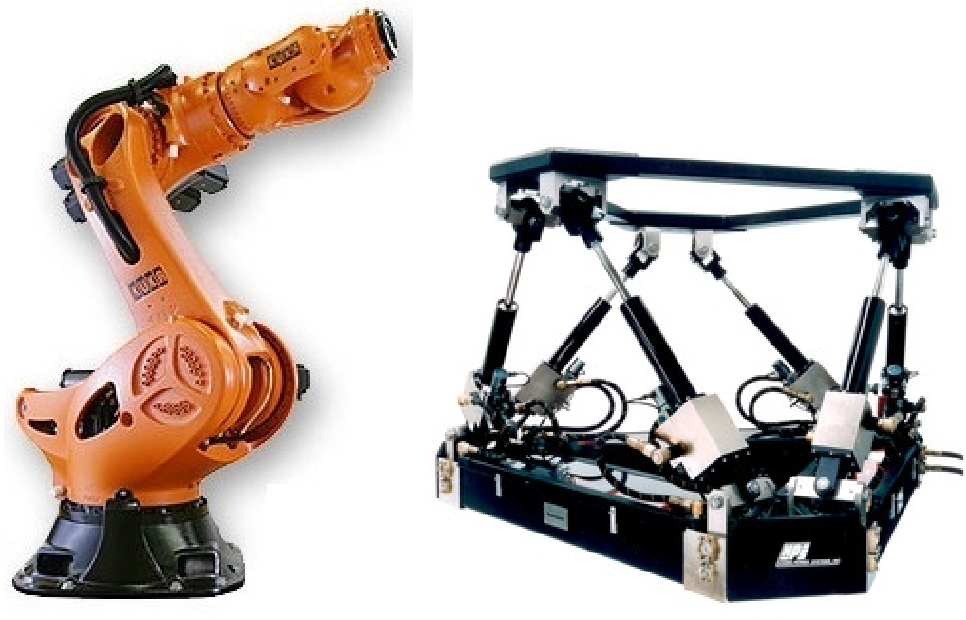
كمجال أكاديمي، يعتبر علم الروبوت (الروبوتيكس) Robotics حقلاً جديداً نسبياً من حقول العلم والذي يمتلك أهدافاً حاضرة ومستقبلية طموحة، وهو العلم المعني بإيجاد الآلات التي تتصرف وتفكر مثل الإنسان. وهذا المسعى من أجل إيجاد آلات ذكية يوجهنا بصورة طبيعية لأن نتمعن في أنفسنا أولاً. فعلى سبيل المثال، أن نتساءل لماذا أجسادنا مصممة بهذه الطريقة التي هي عليها، وكيف يتم توجيه أطرافنا، وكيف نتعلم ونكرر ونحسن حركاتنا المعقدة. ولذلك فإن المسائل الأساسية التي يتم طرحها في علم الروبوتيكس في الحقيقة ماهي إلا تساؤلات عن أنفسنا في نهاية المطاف، وهذا ما يكسب علم الروبوتيكس رونقاً وجمالاً.

وعلى النقيض من الأهداف المستقبلية السامية التي وضعها الباحثون في علم الروبوتيكس، فإن ما يقدمه هذا الكتاب من الفوائد يعتبر جزءاً بسيطاً من المطلوب. وفي هذا الكتاب، سيكون تركيزنا على الدراسة الميكانيكية لميكانيزمات الروبوتات، والتخطيط والتحليل الرياضي لها، والتحكم بها. ومن الأمثلة الشائعة عن الروبوتات هي الأذرع الروبوتية. وبشكل عام، فإن ميكانيزم الروبوت يتم بناؤه عن طريق ربط أجسام صلبة تدعى الوصلات Links مع بعضها بوساطة المفاصل Joints، بحيث يمكن تحقيق حركات نسبية بين الوصلات المتجاورة. وتفعيل أو تشغيل هذه المفاصل Actuation، والذي يتم عادة بوساطة محركات كهربائية، سيجعل الروبوت قادراً على الحركة وقادراً على تطبيق القوى وفقاً للطريقة المطلوبة.

يمكن لوصلات ميكانيزم الروبوت أن ترتب بشكل متسلسل، كذراع الروبوت ذي السلسة التسلسلية Serial Chain المبين في الشكل (1.1 (a)). ويمكن لميكانيزمات الروبوتات أن تمتلك حلقات مغلقة Closed Loops، وكمثال على ذلك منصة ستيوارت – جوف Stewart – Gough الموضحة في الشكل (1.1 (b)). في حالة الروبوتات ذات السلاسل التسلسلية، تكون جميع المفاصل فيها مُفعَّلة (مزودة بمحركات)، بينما في حالة الروبوتات التي تشكل ميكانيزماتها حلقات مغلقة، فإن مجموعة جزئية من مجموع المفاصل الكلي يكون مُفعَّلاً.

لنقم بإلقاء الضوء أكثر على التكنولوجيا الحالية المستخدمة في بناء ميكانيزمات الروبوتات. إن الوصلات يتم تحريكها بوساطة المُفعِّلات Actuator (سنطلق على هذه المُفعِّلات اسم المحركات كتعبير مجازي)، والتي عادة ما تتم قيادتها كهربائياً (على سبيل المثال، محركات السيرفو Servo التي تعمل بالتيار المستمر Direct Current – DC أو بالتيار المتناوب Alternative Current – AC، والمحركات الخطوية Stepper Motors)، أو عن طريق أسطوانات نيوماتيكية Pneumatic أو هيدروليكية Hydraulic، أو عن طريق محركات الاحتراق الداخلي Internal Combustion Engines. وفي حال استخدام المحركات الكهربائية الدوارة في عملية القيادة، فإنه ينبغي أن تكون خفيفة الوزن، وأن تؤمن سرعات دوران منخفضة نسبياً (مثلاً،

يجب أن يكون المعدل هو بضعة مئات من RPM) وأن تكون قادرة على توليد قوى وعزوم دوران كبيرة. وبما معظم المحركات المتوافرة حالياً تعمل بمعدل عدد دورات في الدقيقة RPM قد يصل إلى عدة آلاف، فإنه يتم استخدام أجهزة تخفيض للسرعة تكون فيها الانزلاقات Slippage والخلوصات الإجمالية Backlash منخفضة قدر المستطاع. وعادة ماتكون تكون القشط (الأحزمة) Belts و تركيبة الجنزير والنجمة Sprockets والمسننات العدلة (العادية) Spur Gears غير مناسبة نوعاً ما لهذه الغاية. فبدلاً من ذلك، فإنه يمكن استخدام مسننات تصمم بشكل خاص بحيث يكون إجمالي الخلوصات الناتجة عن تجميعها منخفضاً، كما ويمكن استخدام المحركات التوافقية Harmonic Drive وكذلك لوالب نقل القدرة Ball Screw، وكل ذلك بهدف تقليل السرعة بشكل متوازٍ مع زيادة مقدار عزم الدوران. ويمكن أن تستخدم المكابح Brakes أيضاً في ميكانيزمات الروبوتات بهدف الإيقاف السريع للروبوت أو من أجل إبقائه في وضعية ثابتة محددة.



(a) (b)

الشكل 1.1: (a) روبوت صناعي مناور ذو سلسلة مفتوحة Open Chain. (b) منصة ستيوارت – جوف Stewart – Gough إحدى أنواع الروبوتات ذات السلسلة المغلقة Closed Chain.

يتم تزويد الروبوتات بشكل عام بحساسات Sensors من أجل قياس الموقع Position والسرعة Velocity عند المفاصل. ومن أجل نوعي المفاصل الشائعي الاستخدام الدوراني Revolute والتمددي Prismatic، تستخدم مقاييس لقياس عدد الدورات (الخطوة) Encoders لقياس الانتقالات أو الانزياحات، في حين تستخدام مقاييس سرعة الدوران (التاكومتر) Tachometer لقياس السرعة لهذين المفصلين. ويمكن قياس القوى المؤثرة على الوصلات أو على النهاية العاملة للروبوت End Effetor باستخدام العديد من حساسات القوى والعزوم. كما يمكن استخدام حساسات إضافية وذلك تبعاً لطبيعة المهمة المطلوبة من الروبوت، كالكاميرات وأجهزة

التتبع الصوتية Sonar والليزرية Laser بهدف الكشف عن الأجسام وتحديد مواقعها واتجاهاتها Orientation.

وسيكون موضوع هذا الكتاب حول الدراسة الميكانيكية لمثل هذه الروبوتات، والتخطيط والتحليل الرياضي لها، وكذلك دراسة سبل التحكم بها. وسنقوم فيما يلي بإلقاء نظرة عامة على فصول هذا الكتاب.

الفصل الثاني

فضاء الهيئة

Configuration Space

من حيث المبدأ الأساسي، يمكن القول بأن الروبوت يتألف من أجسام صلبة متصلة مع بعضها البعض عن طريق المفاصل، ويكون كل أو بعض هذه المفاصل مقاداً بوساطة محركات. وفي الواقع، يمكن أن لا تكون وصلات الروبوت صلبة بشكل تام، والمفاصل يمكن أن تكون متأثرة ببعض العوامل كالمرونة Elasticity، ومجموع الخلوصات الإجمالي Backlash، والاحتكاك Friction، والتباطؤ Hysteresis (أي التأخر في الاستجابة). وفي هذا الكتاب، سنهمل هذه التأثيرات في كثير من الأقسام، وسنفترض أن الوصلات صلبة بشكل تام. إن من أكثر المفاصل الموجود شيوعاً في عالم الروبوتات هي المفاصل الدورانية Revolute Joints (والتي تسمح بالدوران حول محور المفصل)، والمفاصل التمددية Prismatic Joints (والتي تسمح بالانسحاب الخطي Linear Translation على طول محور المفصل). وتمتلك المفاصل الدورانية والمفاصل التمددية درجة حرية واحدة (دورانية أو انسحابية). وهناك مفاصل أخرى شائعة الاستخدام أيضاً كالمفاصل الكروية Spherical Joints (وتسمى أيضاً بمفصل الكرة والمضجع Ball-Socket Joint)، وتمتلك هذه المفاصل درجات أعلى من الحرية.

في الروبوتات ذات السلاسل المفتوحة (التسلسلية) كالروبوت المناور المبين في الشكل (1.1 (a))، تكون جميع المفاصل مقادة (مُفعَّلة) بشكل مستقل بوساطة محركات. وهذه هي الفكرة الأساسية وراء مفهوم درجة الحرية Degrees Of Freedom لروبوت: وهي عبارة عن مجموع درجات الحرية للمفاصل والمُفعَّلة بشكل مستقل. ففي الروبوتات ذات السلاسل التسلسلية، فإنه يمكن القول وببساطة أن درجة الحرية يمكن الحصول عليها عن طريق جمع كل درجات الحرية الموافقة لكل مفصل.

أما في الروبوتات ذات السلاسل المغلقة كمنصة ستيوارت – جوف Stewart – Gough المبينة في الشكل (1.1 (b))، فإن الحالة تكون معقدة نوعاً ما لأمرين: الأول، هو أن المفاصل ذات العدد المضاعف من درجات الحرية عادة ما تكون هي المستخدمة، كالمفاصل الكروية. الثاني: هو أنه في أغلب الأحيان يكون من الصعب أو المستحيل تفعيل (تشغيل) جميع المفاصل بشكل مستقل (وفي هذه الحالة، يمكن تثبيت مجموعة محددة من المفاصل من أجل معرفة قيم Values المفاصل المتبقية). وعندما تكون الروبوتات ذات السلاسل المغلقة على درجة كبيرة من التعقيد

بحيث تحتوي الكثير من الحلقات المغلقة وأنواعاً مختلفة من المفاصل، فإن تحديد درجة الحرية لهذه الروبوتات قد لا يكون أمراً سهلاً ابداً.

وهناك تعريف آخر مكافئ لمفهوم درجة الحرية لروبوت ينطلق من مفهوم ما يسمى بفضاء الهيئة Configuration Space: حيث هيئة الروبوت هي عبارة عن التوصيف الكامل للموقع والاتجاه لكل وصلة من وصلات الروبوت، أما فضاء الهيئة فهو عبارة عن مجموعة الهيئات الممكنة للروبوت. وبالتالي يمكن تعريف درجة الحرية على أنها العدد الأصغري للبارامترات المستقلة التي تلزم من أجل وصف موقع واتجاه كل وصلة من وصلات الروبوت. واعتماداً على هذا التعريف، فإننا نحصل على صغية جروبلر Grubler والتي تحدد العلاقة بين عدد الوصلات وعدد المفاصل (متضمنة عدد درجات الحرية لكل مفصل) الموجودة في الروبوت مع درجة الحرية الكلي لهذا الروبوت.

وكل من دراسة تخطيط الحركة للروبوت Motion Planning والتحكم به Robot Control يبدآن باختيار مجموعة الإحداثيات التي تشخص فضاء الهيئة للروبوت. وعادة ما تكون هذه الإحداثيات المختارة عبارة عن متغيرات المفاصل Joint Variables، وفضاء الهيئة بالتالي يمكن تشخيصه بشكل مباشر أو غير مباشر بدلالة متغيرات المفاصل هذه. ومن أجل مسك Grasp جسم ما ونقله أو التعامل معه، فإنه يتم تجهيز الروبوت بصورة عامة بنهاية عاملة End Effector، وعلى سبيل المثال يكمن أن تكون يداً ميكانيكية أو نوعاً من أنواع اللواقط Grippers. ومن هنا يمكن تعريف ما يسمى فضاء المهمة Task Space أو فضاء (مجال) العمل Workspace، والذي يمثل فضاء الهيئة للنهاية العاملة للروبوت. وفي هذا الفصل سوف نناقش الطرائق المختلفة التي يمكن من خلالها توصيف الهيئة وفضاءات المهمة للروبوت.

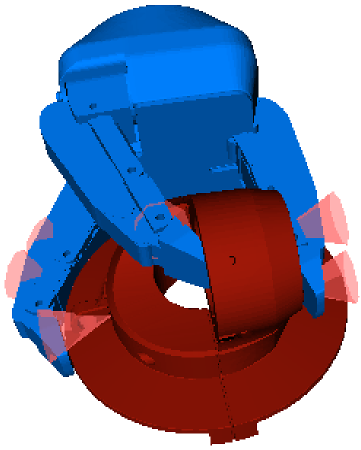
الفصل الثالث

التحليل الستاتيكي للمسك

Grasp Statics

إن إحدى الطرق للتعامل مع مسألة المسك Grasping لجسم ما بوساطة يد الروبوت المتعددة الأصابع المبينة في الشكل (1.2)، هي تحديد عدد ومكان نقاط تماس أطراف الأصابع مع الجسم بحيث يصبح الجسم المراد مسكه ثابتاً وغير قادر على الحركة بشكل تام Immobilization. وفي هذا الفصل سوف ندرس المسألة المتعلقة بكيفية شل حركة جسم صلب باستخدام عدد محدد من نقاط التلامس. ويمكن لمسألة تثبيت القطعة المشغلة Workpiece أن تعالج بنفس الطريقة باستخدام عدد محدد من نقاط التلامس لشل حركتها أثناء التشغيل. ومن البديهي أن نقول بأن الاحتكاك الحاصل عند مناطق التماس يعد أمراً مهماً في حل هذه المسألة. وفي هذا الفصل، سوف ندرس مناطق التماس بوجود تأثير الاحتكاك أو بدون وجوده. وعندما يكون الجسم ثابتاً وغير قادر على الحركة تحت تأثير عدد ثابت من نقاط التماس، فإنه يمكن القول أن الجسم واقع في حالة إغلاق Form Closure. وحتى لو لم يكن الجسم واقعاً في حالة إغلاق، فإذا كانت القوةى المطبقة على نقاط التماس تلغي تأثير القوى والعزوم المطبقة على الجسم (كأن يتم حمل جسم ما بصورة محكمة بحيث يتم التغلب على قوى الجاذبية)، فإنه يمكن القول أن الجسم واقع

تحت تأثير قوى إغلاق Force Closure. وفي هذا الفصل سنناقش هاتين الحالتين من أجل عمليات المسك المستوية Planner Grasps وعمليات المسك الفضائية[1] Spatial Grasps.



الشكل 1.2: يد روبوت متعددة الأصابع تقوم بمسك جسم ما.

الفصل الرابع

حركات الجسم الصلب

Rigid Body Motions

في هذا الفصل سنناقش الموضوع المتعلق بكيفية التوصيف الرياضي لحركة الجسم الصلب والذي يتحرك في فضاء فيزيائي ثلاثي الأبعاد. وإحدى السبل المتبعة في هذا الصدد هي أن نقوم بربط جملة محاور مرجعية بالجسم الصلب، ومن ثم نقوم بإيجاد الطريقة التي من خلالها يتم التعبير كمياً عن موقع واتجاه جملة المحاور هذه أثناء حركتها (أي أثناء حركة الجسم). وكخطوة أولى، سنقوم بدراسة بعض المفاهيم المتعلقة بتحليل سرعات الأجسام وتسارعاتها بالنسبة لجمل المحاور المتحركة، ومن ثم سنقوم بدراسة التمثيل المصفوفي Matrix Representation ثلاثي الأبعاد 3×3 الذي يصف اتجاهات جملة المحاور، ومثل هذه المصفوفة يطلق عليها اسم مصفوفة الدوران Rotation Matrix. وهنا، ستيم الحديث عن تمثيلين ثلاثيي البارامترات يستخدمان مع مفهوم مصفوفة الدوران، هما زوايا أويلر Euler و زوايا الالتفاف - الانحدار - الانعراج Roll – Pitch – Yaw.

وبعد ذلك سوف نقوم بمناقشة التمثيل الأسي Exponential Representation للدورانات. وهذا التمثيل (والذي يمكن تعريفه على أنه تمثيل زاوية المحور Angle-Axis للدورانات) يمكن استنتاجه بطريقة ملتوية نوعاً ما كحل لمعادلة شعاعية تفاضلية خطية محددة. إن الاستنتاج بهذه الطريقة سيسمح لنا بالوصول مباشرة إلى التوصيف الأسي لحركات الأجسام الصلبة بشكل عام،

[1] في هذا الكتاب، كلمة "فضاء" ستطلق على كل فراغ بعدي مكون من ثلاثة أبعاد أو أكثر. فعلى سبيل المثال، سيمر معنا كثيراً مفهوم السرعة الفضائية Spatial Velocity وهو عبارة مفهوم جديد للسرعة يختلف عن المفهوم التقليدي، حيث سيتم تمثيل السرعة الخطية Linear Velocity والسرعة الزاوية Angular Velocity مع بعضهما كشعاع واحد في فضاء سداسي الأبعاد من أجل تسهيل الكثير من العمليات الحسابية كما سنرى لاحقاً.

والذي سيكون بمثابة حجر الأساس عند دراسة التحليل الكينماتيكي Kinematic Analysis للروبوتات.

إن التوصيف الأسي لحركات الجسم الصلب يمكن إيجاده أيضاً من خلال نظرية الحركة اللولبية التقليدية Classical Screw Theory. فبالإضافة إلى القواعد الأساسية المستخدمة في التمثيل المصفوفي ومعالجة حركات الجسم الصلب، فإننا سنتطرق أيضاً إلى دراسة البنية الخطية الجبرية لنظرية الحركة اللولبية بالتفصيل، بما في ذلك التوصيف الموحد للسرعات الخطية Linear Velocities والسرعات الزاوية Angular Velocities على شكل سرعات فضائية Spatial Velocities سداسية الأبعاد. وقياساً على ذلك، فإنه من الطبيعي أيضاً أن ندمج القوى الثلاثية الأبعاد مع العزوم الناتجة منها على شكل قوى فضائية Spatial Forces سداسية الأبعاد.

الفصل الخامس

التحليل الكينماتيكي الأمامي لروبوتات السلسلة المفتوحة

Forward Kinematics of Open Chain Robots

في الروبوتات ذات السلسلة المفتوحة، يمكن إيجاد الموقع والاتجاه للنهاية العاملة بشكل محدد وفريد Uniquely انطلاقاً من معرفة قيم متغيرات المفاصل. وبتعبير أدق، فإن هذا الأمر يمثل مسألة التحليل الكينماتيكي الأمامي Forward Kinematics للروبوت والتي يمكن تلخيصها كالتالي: إذا كان معلوماً لدينا قيم مدخلات المفاصل، فالمطلوب هو إيجاد موقع واتجاه جملة المحاور المرجعية المرتبطة بالنهاية العاملة للروبوت. وفي هذا الفصل، سوف ندرس طريقتين لتوصيف التحليل الكينماتيكي لروبوتات السلاسل المفتوحة. الطريقة الأولى عن طريق استخدام تمثيل دينافيت – هارتنبرغ (D-H) Denavit – Hartenberg، والطريقة الثانية عن طريق استخدام صيغة جداء الأسيات Product of Exponentials (PoE). في طريقة تمثيل (D-H) يتم استخدام عدد أقل من البارامترا، ولكنها تتطلب ربط جمل محاور مرجعية مع كل وصلة وفق قواعد معينة. أما طريقة التمثيل باستخدام صيغة جداء الأسيات PoE فإنها تتطلب بارامترات أكثر، وفي المقابل، ليس هناك أي حاجة لربط جمل محاور مرجعية مع كل وصلة. وبدلاً من ذلك، فإنها تعتمد على المعلومات المتعلقة بموقع محور كل مفصل. وهذه السهولة في المعالجة تجعل طريقة التمثيل الكينماتيكي الأمامي باستخدام صيغة جداء الأسيات هي الأفضل من أجل دراستنا وتحليلنا لبقية فصول الكتاب.

الفصل السادس

التحليل الكينماتيكي للسرعة والتحليل الستاتيكي للروبوت

Velocity Kinematics and Statics

إن مفهوم التحليل الكينماتيكي للسرعة Velocity Kinematics يشير إلى العلاقة بين معدلات تغير قيم المفاصل Joints Rates والسرعة الخطية والزاوية لجملة محاور النهاية العاملة

للروبوت. إن النقطة المركزية عند التحليل الكينماتيكي للسرعة هي ما تسمى بمصفوفة اليعقوبي Jacobian Matrix للتمثيل الكينماتيكي الأمامي. فبجداء شعاع معدلات التغير للمفاصل بهذه المصفوفة، فإننا نحصل على السرعة الزاوية والخطية لجملة محاور النهاية العاملة للروبوت عند أي هيئة معطاة له. ومن المواضيع المهمة التي ستتم مناقشتها في هذا الفصل هو موضوع القصور (الشذوذ) الحركي للروبوت Kinematic Singularities، وهو يشمل الهيئات التي تخسر فيها النهاية العاملة للروبوت القدرة على الحركة أو الدوران في اتجاه واحد أو أكثر(بالإمكان تخيل ذلك من خلال طرح مثال الميكانيزم المستوي ثنائي الوصلات، بحيث تكون الوصلتين ممتدين على طولهما)، ووفقاً لهذه الهيئات، فإن مصفوفة اليعقوبي تفشل في الوصول إلى رتبتها الأعظمية Maximal Rank. وأحد المفاهيم المتعلقة بهذا الموضوع هو مفهوم إهليلج (قطع ناقص) قابلية المناورة Manipulability Ellipsoid، حيث إن شكل هذا الإهليلج يحدد التوضع الأفضل للروبوت بحيث يستطيع التحرك في كل الاتجاهات. وإهليلج قابلية المناورة هذا يمكن استنتاجه من خلال مصفوفة اليعقوبي.

وأخيراً، تعتبر مصفوفة اليعقوبي نقطة مركزية أيضاً في التحليل الستاتيكي للقوى. ففي مسألة التوازن الستاتيكي Static Equilibrium، تستخدم مصفوفة اليعقوبي من أجل تحديد القوى وعزوم الدوران اللازم تطبيقها كمدخلات على المفاصل لجعل النهاية العاملة للروبوت تقوم بتطبيق قوة أو عزم معين في اتجاه محدد. وفي هذا الفصل سندرس كيفية الحصول على مصفوفة اليعقوبي بشكل عام لجميع الروبوتات ذات السلاسل التسلسلية، والتي يمكن استخدامها في مواقع خاصة خلال دراستنا في الفصول اللاحقة.

الفصل السابع

التحليل الكينماتيكي الخلفي لروبوتات السلسلة المفتوحة

Inverse Kinematics of Open Chain Robots

في مسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي Inverse Kinematics، يكون الموقع والاتجاه للنهاية العاملة للروبوت معلومين لدينا كمعطيات، ويكون الهدف هو تحديد وإيجاد قيم مجموعة متغيرات المفاصل والتي تحقق الهيئة المطلوبة للنهاية العاملة. وفي روبوتات السلسلة المفتوحة، يكون التحليل الكينماتيكي الخلفي أكثر تعقيداً من التحليل الكينماتيكي الأمامي، فمن أجل قيم معطاة لمجموعة متغيرات المفاصل، يكون هناك عادة حل وحيد وفريد يحدد موقع النهاية العاملة للروبوت واتجاهها، ولكن في حال كان معلوماً لدينا موقع واتجاه النهاية العاملة، فإنه من الممكن أن يكون هناك حلول متعددة لقيم متغيرات المفاصل، وقد لا يكون هناك أية حلول إطلاقاً.

وفي هذا الفصل سوف نقوم بدراسة نوع خاص من روبوتات السلسلة المفتوحة والتي تمتلك ست درجات من الحرية بحيث تسمح البنية الهيكلة لهذا النوع بالوصول إلى صيغة تقاربية (مغلقة) Closed Form تمكننا بدورها من الوصول إلى الحل بصورة تحليلية Analytic Solution. وبعد ذلك سنكون قادرين على استنتاج الخوارزميات Alghorithims الرياضية التكرارية من أجل إيجاد الحلول لمسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي لروبوتات السلاسل المفتوحة ذات الست درجات من الحرية بشكل عام. وسوف نقوم أيضاً بمناقشة التحليل الكينماتيكي الخلفي من أجل

روبوتات السلاسل المفتوحة الفائضة Redundant (والتي تمتلك أكثر من سبع درجات من الحرية) من خلال دراسة طريقة تتبع المسار Trajectory المطلوب للنهاية العاملة، حيث سنستعرض منهجاً للحل من أجل الحصول على مدخلات معدلات التغير للمفاصل وذلك انطلاقاً من إيجاد معكوس Inverse مصفوفة اليعقوبي الناتجة من التحليل الكينماتيكي الأمامي بشكل عام.

الفصل الثامن

التحليل الكينماتيكي لروبوتات السلسلة المغلقة

Kinematics of Closed Chain Robots

في حين أن روبوتات السلاسل المفتوحة تمتلك حلاً وحيداً وفريداً لمسألة التحليل الكينماتيكي الأمامي، فإننا سنجد أن هناك حلولاً متعددة لمسألة التحليل الكينماتيكي الأمامي فيما يخص ربوتات السلاسل المغلقة، وسنجد أيضاً أنه يمكن أن يكون هناك حلولاً متعددة عند معالجة مسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي لهذه الروبوتات. وبسبب أن الروبوتات ذات السلاسل المغلقة تمتلك نوعي المفاصل المُفعّل Actuated Joints والغير مُفعّل Passive Joints، فإن تحليل حالات القصور (الشذوذ) الحركي لهذه الروبوتات سيكشف لنا عن أنواع من القصور الحركي غير معهودة عند روبوتات السلاسل المفتوحة. وفي هذا الفصل، سوف ندرس المبادئ الأساسية والأدوات المستخدمة عند إجراء التحليل الكينماتيكي لروبوتات السلاسل المغلقة. وسوف نبدأ بدراسة مفصلة لبعض الميكانيزمات مثل الميكانيزم الخماسي الوصلات المستوي Planner Five Bars Linkage ومنصة ستيورات – جوف Stewart – Gough. والنتائج التي سوف نحصل عليها من دراسة هذين الميكانيزمين سنقوم بتعميمها من أجل الحصول على طريقة ممنهجة تمكننا من إجراء التحليل الكينماتيكي لروبوتات السلاسل المغلقة بشكل أوسع وأعم.

الفصل التاسع

التحليل الديناميكي لروبوتات السلسلة المفتوحة

Dynamics of Open Chain Robots

في هذا الفصل، سنقوم باستنتاج المعادلات الديناميكية لروبوتات السلاسل المفتوحة. وكخطوة أولى، فإننا سنقوم باستنتاج المعادلات الديناميكية للجسم الصلب بدلالة كل من السرعات والتسارعات والقوى الفضائية. وبعد ذلك فإن معادلات التمثيل الديناميكي لروبوت ذي سلسلة مفتوحة يمكن استنتاجها من خلال تطبيق المعادلات الديناميكية للجسم الصلب على كل وصلة من وصلات الروبوت. وبشكل مماثل لمفهومي التحليل الكينماتيكي الأمامي والخلفي، فإن مسألة التحليل الديناميكي الأمامي تعنى بإيجاد مسار المفاصل Joint Trajectory الناتج عن البيانات المدخلة لعزوم دوران المفاصل. وفي المقابل،فإن مسألة التحليل الديناميكي الخلفي تعنى بإيجاد قيم مدخلات عزوم الدوران للمفاصل والتي تحقق مسار المفاصل المطلوب. والنتائج الرئيسية التي سنتوصل إليها في هذا الفصل هي عبارة عن من مجموعة من الخوارزميات التكرارية

اللازمة في مسألتي التحليل الديناميكي الأمامي والخلفي. وعلى خلاف الطرائق التقليدية والتي تعتمد على التحليل المنفصل لكل من المركبات الخطية والزاوية للمعادلات الديناميكية، فإن هذه الخوارزميات تمت صياغتها بشكل تام بدلالة مقادير كميات فضائية سداسية الأبعاد، وتستند إلى التمثيل الكينماتيكي لروبوتات السلاسل المفتوحة باستخدام صيغة جداء الأسيات.

الفصل العاشر

التحكم بالروبوت

Robot Control

يمكن لذراع الروبوت أن يبدي عدداً من السلوكيات Behaviors المختلفة اعتماداً على طبيعة المهمة الموكلة إليه وعلى البيئة المحيطة به. فقد يلعب الروبوت دوراً كمصدر للحركات المبرمجة لبعض المهمات كنقل جسم ما من مكان لآخر، أو أن يقوم بعمليات تتبع للمسار في بعض التطبيقات الصناعية. ويمكن للروبوت أيضاً أن يلعب دروا كمصدر للقوى، على سبيل المثال في عمليات جلخ Grinding و صقل Polishing القطعة المشغلة. وفي بعض المهمات كالكتابة على لوح الطبشور مثلاً، فإنه يجب التحكم بالقوى في بعض الاتجاهات المحددة (القوة تضغط الطبشورة على اللوح)، وبالحركات في بعض الاتجاهات الأخرى (الحركة في مستوي اللوح). وفي بعض التطبيقات الخاصة، على سبيل المثال تلك التطبيقات التي تتطلب قدرات لمسية للروبوت، قد يكون المطلوب أن يقوم الروبوت بدور النابض Spring أو المخمد Damper أو الكتلة Mass بحيث يتم التحكم بالموقع والسرعة والتسارع كاستجابة للقوى المطبقة عليه.

وفي جميع هذه الحلات، تكون مهمة المتحكم بالروبوت Robot Controller هي تحويل مواصفات المهمة Task Specifications إلى قوى وعزوم دوران يجب أن تطبق من قبل المحركات. وتعرف استراتيجيات التحكم المتبعة من أجل تحقيق هذه السلوكيات المذكروة أعلاه بالتحكم بالحركة (أو الموقع) Motion Control، والتحكم بالقوة Force Control، والتحكم الهجين بالقوة والحركة Hybird Motion-Force Control، والتحكم بالمقاومة Impedance Control. ومعرفة أي من هذه السلوكيات أو هذه الاستراتيجيات هو الأنسب تتعلق بنوع المهمة المطلوبة من الروبوت وبطبيعة البيئة التي يتواجد فيها. فعلى سبيل المثال، يكون التحكم بالقوة مفيداً ويحقق الغاية المرجوة منه في حال كانت النهاية العاملة للروبوت على تماس مع شيء ما، ولكنه يصبح غير فعالاً عندما تتحرك النهاية العاملة بحرية في الفضاء. وتجدر الإشارة إلى أنه في عمليات التحكم بالروبوتات غالباً ما تصادفنا مجموعة من القيود التي تفرض علينا من الناحية الميكانيكية، فبغض النظر عن التأثيرات البيئية، فإنه لايمكن أن نتحكم بالحركة والقوة بشكل مستقل عن الآخر إذا كانا في نفس الاتجاه. فإذا كان الروبوت يطبق حركة ما، فإن البيئة المحيطة به تحدد مقدار القوة الواجب تطبيقها، والعكس بالعكس.

إن معظم الروبوتات تتم قيادتها عن طريق جملة من المحركات والتي تقوم بتطبيق قوى وعزوم دوران على كل مفصل. ومنه، ومن أجل التحكم الدقيق بروبوت ما فإن ذلك يقتضي أن نفهم العلاقة بين قوى وعزوم الدوران عند المفاصل وحركة الروبوت. وهنا يكمن تأثير التمثيل

الديناميكي للروبوت. فحتى في حالات الروبوتات البسيطة، عادة ما تكون المعادلات الديناميكية لها على درجة عالية من التعقيد. وإضافة إلى ذلك، فإن الاستنتاج الدقيق للتمثيل الديناميكي للروبوت يتطلب منا المعرفة الدقيقة بكل من الكتلة والعطالة Inertia لكل وصلة، والتي قد لا تكون متاحة لنا بسهولة. وحتى لو أتيح لنا ذلك، تبقى المعادلات الديناميكية لا تستطيع تمثيل بعض الظواهر الفيزيائية بشكل دقيق كالاحتكاك وإجمالي الخلوصات والمرونة والتباطؤ في الاستجابة، الأمر الذي يؤدي إلى نشوء بعض الأخطاء في التمثيل الديناميكي للروبوت.

وفي معظم التطبيقات العملية، فإن المنهجية المتبعة من أجل تعويض هذه الأخطاء تتم باستخدام التحكم عن طريق التغذية الراجعة (أو الخلفية) Feedback Control. ومن إحدى الطرائق الفعالة من أجل التحكم بالروبوتات الصناعية هي أن نقوم بإهمال التمثيل الديناميكي للروبوت، وبدلاً من ذلك نقوم بنمذجة ديناميكية كل محرك على شكل جملة معادلات خطية من الدرجة الثانية. ولذلك فإنه يجب علينا أولاً أن ندرس المفاهيم الأساسية للتحكم الخطي Linear Control، ومن ثم سندرس كيفية استخدام هذه المفاهيم بشكل فعال من أجل التحكم بالروبوتات المعقدة التي تمتلك عدد كبير من درجات الحرية.

وفي هذا الفصل، سندرس أيضاً بعض التقنيات الأساسية للتحكم بالروبوتات، كتلك التي تفترض أن النموذج الديناميكي للروبوت متوفر لدينا، وطريقة التحكم هذه تسمى بالتحكم عن طريق التغذية الأمامية Feedforward Control، والتي تستخدم النموذج الديناميكي للروبوت وللبيئة المحيطة به من أجل تحديد وإيجاد قيم مدخلات التحكم بالمحركات بغية تنفيذ المهمة المطلوبة. وبسبب وجود بعض الأخطاء في النمذجة وغير ذلك من الأخطاء، فإن التحكم عن طريق التغذية الأمامية نادراً ما يستخدم لوحده، ولكنه غالباً ما يستخدم بشكل مقترن مع التحكم عن طريق التغذية الراجعة. وبعد دراسة استراتيجيات التحكم سواء كان عن طريق التغذية الأمامية أو عن طريق التغذية الخلفية، فإننا سنتطرق بعد ذلك لدراسة سبل التحكم بالقوة، والتحكم الهجين بالقوة والحركة، والتحكم بالمقاومة.

الفصل الثاني

فضاء الهيئة

Configuration Space

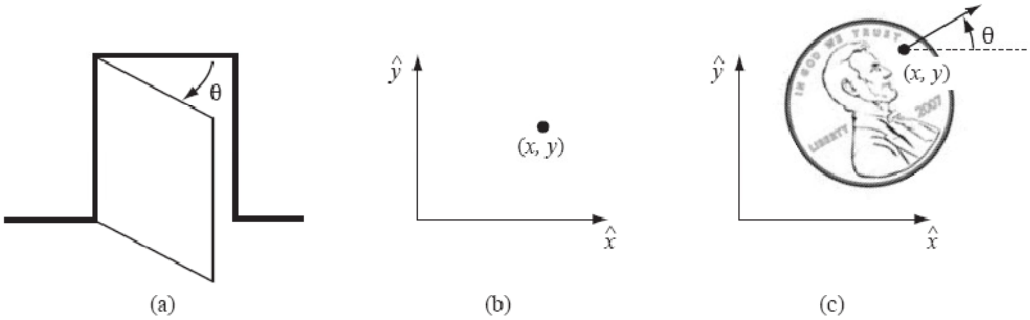
الروبوت ميكانيكياً وبشكل عام مكون من عدد من الأجسام أو الوصلات Links التي ترتبط ببعضها بوساطة أنواع مختلفة من المفاصل Joints. إن الروبوت يقوم بالحركة عندما تقاد مجموعة محددة من المفاصل عن طريق عناصر محركة Actuators (كالمحركات الكهربائية مثلاً) والتي تقوم بإيصال القوى والعزوم لهذه المفاصل. وعادة تكون النهاية العاملة End Effector والتي تكون على هيئة لاقط أو يد من أجل مسك ونقل الأجسام متصلة مع وصلة ما من الروبوت. وجميع الروبوتات في هذا الكتاب يمكن اعتبارها تمتلك وصلات بحيث يمكن نمذجتها على أنها أجسام صلبة Rigid Bodies.

لنفترض أنه لدينا روبوتاً ما، فربما يكون السؤال الرئيسي الذي يمكن لأحدهم أن يسأله "أين هو الروبوت؟" والجواب على هذا السؤال هو "هيئة الروبوت"[2]، والتي تعبر عن سمات التموضع لجميع نقاط الروبوت. وبسبب كون وصلات الروبوت صلبة ومعروفة الشكل، فإنه تلزمنا فقط أعداد قليلة من القيم لتمثيل هيئة الروبوت[3]. على سبيل المثال، من أجل تمثيل هيئة باب ما، فإننا نحتاج فقط لقيمة واحدة ، وهي الزاوية θ والتي يدورها الباب حول مفاصله. إن هيئة نقطة موجودة في مستوٍ يمكن أن توصف عن طريق إحداثيين (x,y). ومن أجل تمثيل هيئة قطعة نقدية موجودة على طاولة مسطحة، فنحن نحتاج إلى ثلاثة إحداثيات: إحداثيين من أجل تحديد المكان (x,y) على الطاولة لنقطة من هذه القطعة النقدية ، وواحدة من أجل تحديد اتجاه هذه القطعة ، θ. (انظر الشكل 2.1).

العدد الأصغري للإحداثيات ذات القيم الحقيقة والتي تلزم لتمثيل الهيئة تسمى بدرجة الحرية Degree of Freedom (dof) للروبوت. وبذلك فإن القطعة النقدية والموجودة على الطاولة تمتلك ثلاثة درجات من الحرية. حتى ولو كانت للقطعة النقدية القابلية على أن تكون على أحد وجهيها (وجه الرسمة ووجه الكتابة)، فإن فضاء الهيئة لها لا يزال يمتلك ثلاثة درجات من الحرية ، وهذا بسبب أن المتغير الرابع والذي يمثل الوجه الذي يمكن للقطعة النقدية أن تتواجد فيه يمكنه فقط أن يأخذ قيماً من المجموعة الغير عددية {وجه الرسم، وجه الكتابة}، بالتالي فهو لا يأخذ قيماً من مجال مستمر من القيم الحقيقية كما هو مطلوب من خلال التعريف.

تعريف 2.1. هيئة الروبوت هي عبارة عن الوصف الكامل للتموضع لكل نقطة من نقاط الروبوت. والعدد الأصغري n للإحداثيات ذات القيمة الحقيقية التي تلزم لتمثيل الهيئة هو درجة الحرية dof للروبوت. والفضاء البعدي من المرتبة n والذي يضم كل الهيئات الممكنة للروبوت يسمى فضاء الهيئة Configuration Space.

[2] صيغة أخرى من السؤال "ماهي وضعية وصلات الروبوت؟"
[3] بالمقارنة مع محاولة تمثيل هيئة وسادة ما.



الشكل (2.1): (a) هيئة الباب يمكن التعبير عنها من خلال الزاوية θ، (b) هيئة نقطة في سطح مستوٍ يمكن التعبير عنها بالإحداثيات (x,y). (c) هيئة القطعة النقدية على الطاولة يمكن التعبير عنها بالإحداثيات (x,y,θ).

في هذا الفصل سوف ندرس فضاء الهيئة ودرجة الحرية للروبوتات بشكل عام. وبما أن الروبوتات تتألف من أجسام صلبة، فإننا أولاً سنقوم بدراسة فضاء الهيئة ودرجة الحرية للأجسام الصلبة، وبعد ذلك سوف ندرس هاتين الفكرتين فيما يتعلق بالروبوتات. وهذا الفصل سيدور أيضاً حول مناقشة فضاء الهيئة للنهاية العاملة للروبوت أو ما يسمى مجال المهمة أو مجال العمل Task Space. وفي الفصل القادم سندرس بشكل مفصل التمثيلات الرياضية المختلفة لفضاء الهيئة للأجسام الصلبة.

2.1. فضاء الهيئة للجسم الصلب:

بالبقاء مع المثال السابق المتعلق بقطعة النقود الموجودة على سطح الطاولة، لنقم باختيار ثلاث نقاط A, B و C مثبتة على قطعة النقود (الشكل 2.2 (a)). وبالتالي فإن موضع هذه النقاط في المستوي يمكن أن يكتب بالشكل (x_a,y_a)، (x_b,y_b) و (x_c,y_c). وإذا كانت هذه النقاط تتوضع بشكل مستقل في أي مكان في المستوي، فإنه سوف ينتج لدينا ست درجات من الحرية، درجتي حرية لكل نقطة من النقاط الثلاث. ونحن نعلم أن الجسم يكون صلباً إذا كانت جميع أبعاد نقاط الجسم فيما بينها ثابتة، أي أن الأبعاد:

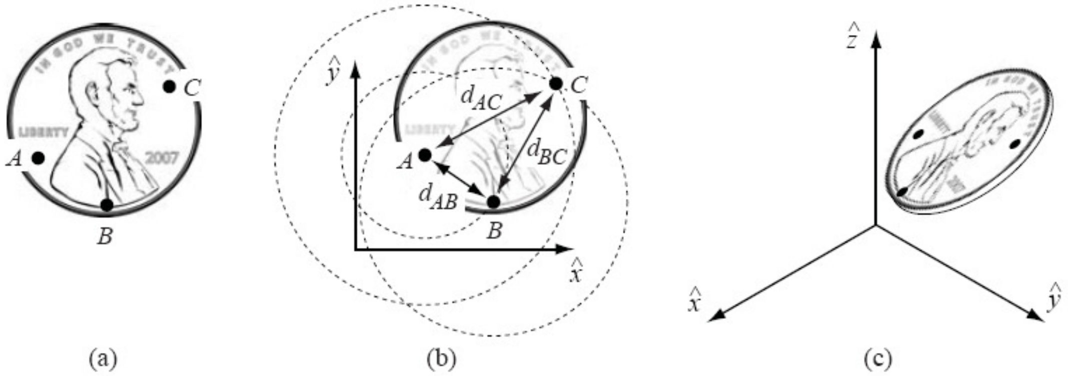
$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(x_B - x_c)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

لا يمكن لها أن تتغير مهما تحركت قطعة النقود. ولنسمي هذه الأبعاد الثابتة d_{BC}, d_{AB} و d_{AC}. فلتحديد درجة الحرية لقطعة النقود، نختار أولاً موقعاً للنقطة A في المستوي (الشكل 2.2 (b)). ويمكن أن نختارها كيفما نشاء، بالتالي سيكون لدينا درجتي حرية لتحديد هذه النقطة، (x_A,y_A). وعند تحديد هذه النقطة، فإن القيد $d(A,B) = d_{AB}$ سيحدد الخيار لـ (x_B,y_B) بتلك النقاط من الدائرة ذات نصف القطر d_{AB} والتي مركزها A. وبهذا فإن درجتي الحرية الناتجتين (x_B و y_B)

يمكن دمجها بدرجة حرية واحدة تختزل جميع الاحتمالات الفعلية الأخرى لموقع النقطة B. ودرجة الحرية هذه هي الزاوية التي تصف موقع النقطة B على الدائرة التي مركزها A، ولتكن هذه الزاوية هي ϕ_{AB}، ويمكن تعريفها بأنها الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overrightarrow{AB}$ والمحور x.



الشكل 2.2: (a) اختيار ثلاثة نقاط مثبتة على قطعة النقود. (b) عندما يتم اختيار موقع النقطة A، فإن النقطة B ستكون واقعة على دائرة نصف قطرها d_{AB} ومركزها النقطة A. وعند تحديد موقع النقطة B، فإن النقطة C يجب أن تكون أحد نقطتي تقاطع الدائرتين اللتين مركزيهما A و B. فقط نقطة واحدة من نقاط التقاطع تعبر عن هيئة "وجه الرسمة". (c) هيئة قطعة النقود في فضاء ثلاثي الأبعاد يعطى من خلال ثلاثة إحداثيات للنقطة A، زاويتين من أجل النقطة B الموجودة على سطح كرة نصف قطرها d_{AB} ومركزها النقطة A، وزاوية واحدة للنقطة C على دائرة تكون ناتجة من تقاطع الكرتين اللتين مزكزيهما A و B.

أخيراً، عندما نختار موقع النقطة B، فإن درجتي الحرية لتحديد موقع النقطة C (x_C,y_C) سوف تنعدم بسبب المحددين $d(A,C) = d_{AC}$ و $d(B,C) = d_{BC}$. وبعبارة أخرى، فإنه عندما يتم تحديد موقع النقتطين A و B، فإن موقع النقطة C سيصبح ثابتاً ومحدداً. وبالتالي فإن قطعة النقود تملك حقيقة ثلاثة درجات من الحرية في المستوي، والتي يمكن تحديدها بـ (x_A,y_A,ϕ_{AB}).

لنفترض أننا قمنا باختيار نقطة إضافية على قطعة النقود، D، وبهذا سينتج لدينا ثلاثة قيود إضافية جديدة: $d(A,D) = d_{AD}$، $d(B,D) = d_{BD}$ و $d(C,D) = d_{CD}$. وعلى الرغم من أن هذه القيود قد تبدو مستقلة، إلا إنها في الحقيقة فائضة Redundant، فقط إثنان من هذه الثلاث قيود هي مستقلة، والسبب في هذا أن القيد $d(A,D) = d_{AD}$ يحدد النقطة D بحيث تقع على دائرة قطرها d_{AD} ومركزها النقطة A. وبشكل مشابه، فإن القيد $d(B,D) = d_{BD}$ يحدد النقطة D لتقع على دائرة قطرها d_{BD} ومركزها النقطة B. هذان القيدان مع بعضهما يحددان النقطة D لتكون نقطة التقاطع بين الدائرتين السابقتين. لذلك فإن القيد الثالث $d(C,D) = d_{CD}$ غير ضروري، والنقاط C,D وجميع النقاط الأخرى على قطعة النقود في الواقع لا تضيف أية درجة حرية أخرى أو مقيد آخر لقطعة النقود من أجل توصيف فضاء الهيئة.

ويمكن لنا أن نطبق هذه القاعدة العامة من أجل تحديد درجة الحرية لنظام ما:

درجة الحرية dof = (عدد درجات الحرية للنقاط) – (عدد القيود المستقلة) (2.1)

وهذه القاعدة يمكن أن يتم التعبير عنها بوساطة عدد المتغيرات وعدد المعادلات المستقلة التي تصف النظام:

$$\text{درجة الحرية dof} = (\text{عدد المتغيرات}) - (\text{عدد المعادلات المستقلة}) \qquad (2.2)$$

ويمكننا أن نستخدم هذه القاعدة العامة لتحدد عدد درجات الحرية لجسم صلب في فضاء ثلاثي الأبعاد. فعلى سبيل المثال، لنفرض أن قطعة النقود التي لدينا ليس لها أي ارتباط بالطاولة (الشكل 2.2 (c)). في هذه الحالة فإن النقاط A,B و C يمكن أن تعرّف بالشكل (x_A,y_A,z_A)، (x_B,y_B,z_B) و (x_C,y_C,z_C). النقطة A يمكن تحديد موقعها بكل حرية (ثلاثة درجات من الحرية). وموقع النقطة B هو متعلق بالقيد $d(A,B) = d_{AB}$، بمعنى أنها يجب أن تكون موجودة على الكرة التي قطرها d_{AB} ومركزها A. وبذلك يكون لدينا $3 - 1 = 2$ درجتي حرية لتحديد هذه النقطة، بحيث يمكن أن توصفا بخط الطول وخط العرض لهذه النقطة على سطح الكرة. أخيراً، موقع النقطة C يجب أن يكون في مكان تقاطع الكرتين اللتين مركزيهما A و B و أنصاف أقطارهما d_{AC} و d_{BC} بالترتيب. وتقاطع هاتين الكرتين هو دائرة، وبهذا فإن موقع النقطة C يمكن أن يحدد عن طريق الزاوية التي تصف مسار الدائرة. ولهذا فإن النقطة C تضيف $3 - 2 = 1$ درجة واحدة من الحرية. وعندما يتم تحديد النقطة C، فإن القطعة النقدية ستصبح محددة في الفضاء.

وكنتيجة، فإن الجسم الصلب في فضاء ثلاثي الأبعاد يمتلك ست درجات حرية، والتي يمكن التعبير عنها عن طريق ثلاثة إحداثيات تصف النقطة A، وزاويتن تصف النقطة B، وزاوية واحدة تصف النقطة C. والتمثيل باستخدام ثلاثة متحولات أو برامترات لجسم صلب يمتلك ستة درجات حرية سوف تتم مناقشتها في الفصل القادم.

من السابق يمكن أن نستخلص أن الجسم الصلب الذي يتحرك في فضاء ثلاثي الأبعاد، والذي يمكن أن نطلق عليه اسم الجسم الصلب الفضائي Spatial Rigid Body، يمتلك ستة درجات من الحرية، ثلاثة منها خطية والثلاثة الباقية زاوية. وبشكل مشابه، فإن الجسم الصلب الذي يتحرك في مستوي ثنائي الأبعاد، والذي يمكن أن نطلق عليه اسم الجسم الصلب المستوي Planar Rigid Body، يمتلك درجتي حرية خطية ودرجة حرية زاوية. وهذه النتيجة يمكن الحصول عليها باعتبار أن الجسم الصلب في المستوي يمكن تمثيله بصورة جسم صلب في الفضاء بستة درجات حرية، ولكن بثلاثة قيود مستقلة $z_A= z_B= z_C = 0$.

ولأن الروبوتات مكونة من أجسام صلبة، نستطيع التعبير عن المعادلة (2.1) كالتالي:

$$\text{درجة الحرية dof} = (\text{عدد درجات الحرية للأجسام}) - (\text{عدد القيود المستقلة}) \qquad (2.3)$$

المعادلة (2.3) تشكل الأساس الذي من خلاله يتم تحديد درجة الحرية للروبوتات بشكل عام الذي هو موضوع الفقرة القادمة.

2.2. فضاء الهيئة لروبوت ما:

بالعودة إلى مثال الباب في الشكل ((2.1 (a))، وعلى اعتبار أن هذا الباب هو جسم صلب واحد متصل بالحائط بفصّالات Hinges. من الفقرة السابقة كنا قد علمنا أن هذا الباب يمتلك درجة حرية واحدة معبر عنها بزاوية وصلة الفصّالة θ. والسبب في ذلك هو التالي: بدون وجود الفصّالة، فإن الباب يكون حر الحركة في فضاء ثلاثي الأبعاد ويمتلك ست درجات من الحرية. وبربط الباب مع الحائط باستخدام وصلة الفصّالة، فإن خمسة قيود مستقلة سوف تؤثر على حركة الباب، ومن المعادلة (2.3) نستنتج أن الباب يتمتلك درجة حرية واحدة. وبدلاً من ذلك يمكننا النظر إلى الباب من الأعلى وعد المسألة كمسألة جسم صلب في مستوٍ والذي يمتلك ثلاثة درجات من الحرية. وصلة الفصّالة في هذه الحالة سوف تفرض قيدين مستقلين، ومرة أخرى وعن طريق المعادلة (2.3) نستنتج أن الباب يمتلك درجة حرية واحدة. وفضاء الهيئة للباب يمكن أن يوصف بمجال ضمن $[0,2\pi]$ بحيث يمكن للزاوية θ أن تتراوح فيه.

في كلا الحالتين نلاحظ أن المفاصل تمتلك قدرة التأثير على تقييد حركة الجسم الصلب، ولهذا تقل درجة الحرية الكلي له. ويبدو أنه من المقنع إلى حد ما أنه يمكن الحصول على معادلة تحدد درجة الحرية لروبوت ببساطة من خلال إحصاء عدد الأجسام الصلبة والمفاصل. وعلى هذا النحو وفي هذه الفقرة سوف نستنتج معادلة جروبلر Grubler لتحديد درجة الحرية للروبوتات المستوية و الفضائية. وبعدها سوف نناقش التمثيل الرياضي لفضاء الهيئة لروبوت ما.

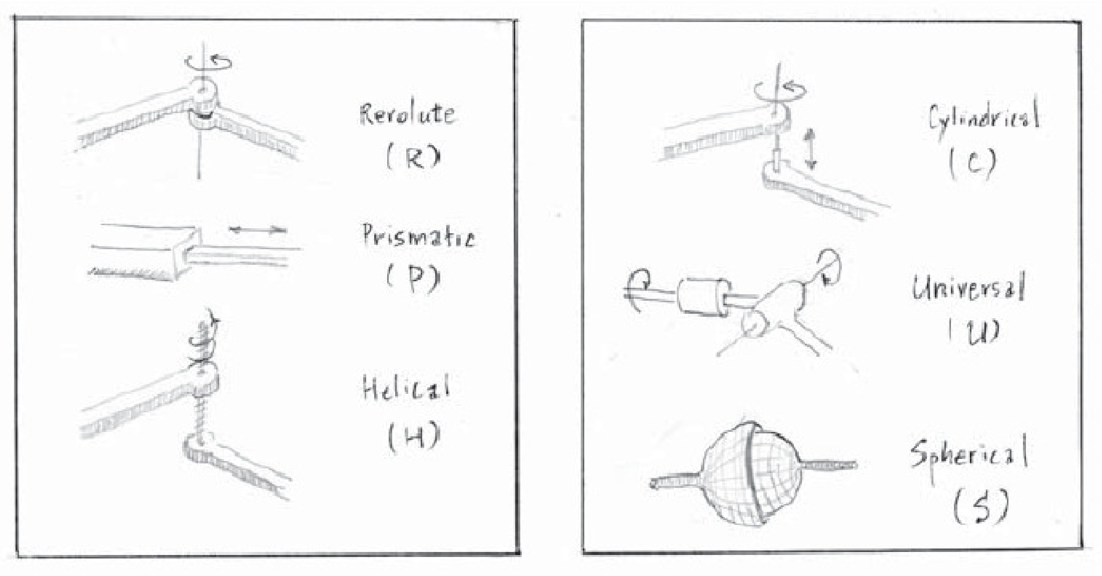
2.2.1. درجة الحرية لروبوت ما:

مفاصل الروبوت:

الشكل (2.3) يوضح المفاصل الرئيسية التي يمكن أن تتواجد في الروبوتات بشكل عام. إن كل مفصل يصل بين وصلتين فقط لاغير، ولن نقبل بوجود المفاصل التي تصل في نفس الوقت بين ثلاثة وصلات وسنعمد إلى تحليل كل منها إلى مفصلين. إن المفصل الدوراني Revolute Joint ويرمز له بـ (R)، ويسمى أيضاً مفصل الفصّالة، يسمح بالحركة الدورانية حول محور المفصل. والمفصل التمددي Prismatic Joint ويرمز له بـ (P)، ويسمى أيضاً المفصل الانسحابي أو المفصل الخطي، يسمح بالحركة الانتقالية على طول اتجاه محور المفصل. كلا المفصلين الدوراني والتمددي هما مفاصل بدرجة حرية واحدة، فبالنسبة للمفصل الدوراني، فإن درجة الحرية الخاصة به يكمن توصيفها عن طريق زاوية الدوران حول محور المفصل، بينما في المفصل التمددي، فإن درجة الحرية الخاصة به يمكن توصيفها من خلال مسافة الانتقال على طول محور المفصل. والمفصل اللولبي Screw Joint ويرمز له بـ (H)، ويسمى أيضاً بالمفصل الحلزوني، هو أيضاً مفصل بدرجة حرية واحدة حيث أن حركته مكونة من حركتين انتقالية ودورانية في نفس الوقت.

المفاصل أيضاً يمكن أن تمتلك أعداداً أكبر من درجات الحرية. فالمفصل الأسطواني Cylindrical Joint ويرمز له بـ (C) هو مفصل بدرجتي حرية، حيث يسمح بالحركة المستقلة للانتقال والدوران كلاً على حدى حول وباتجاه محور المفصل. والمفصل العام Universal Joint ويرمز له بـ (U) هو نوع آخر من المفاصل التي تمتلك درجتي حرية، وهو مكون من

ربط زوج من المفاصل الدورانية بحيث تكون محاورهما متعامدة مع بعضهما. والمفصل الكروي Spherical Joint ويرمز له بـ (S)، ويسمى أيضا بمفصل الكرة والمضجع Ball and Socket، يمتلك ثلاثة درجات من الحرية ووظيفته تشبه كثيراً مفصل الكتف عند الإنسان.



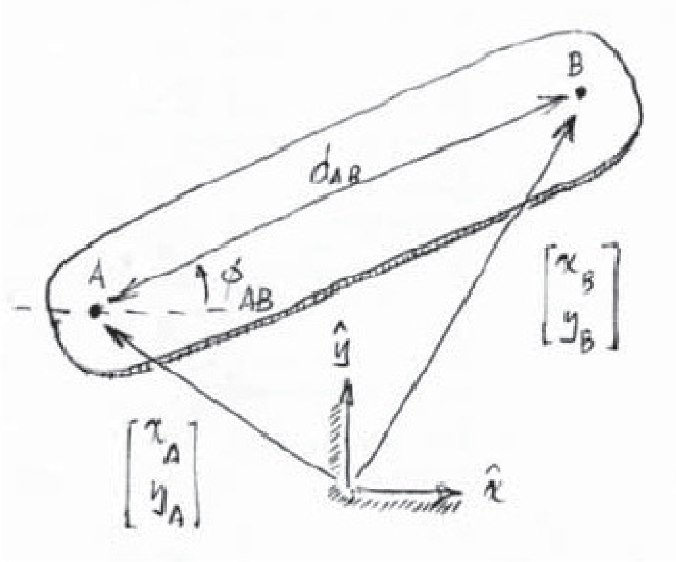
الشكل (2.3): الأنواع العامة لمفاصل الروبوتات.

صيغة جروبلر Grubler للروبوتات المستوية:

إن صيغة جروبلر Grubler تسمح بحساب حركية Mobility (درجة الحرية) لروبوت اعتماداً على عدد الوصلا وعدد ونوع المفاصل. إن الصيغة في الحقيقة هي ذات تعبير رياضي عام، وفي هذا الفصل سوف نوظف هذه الصيغة لدراسة الروبوتات المستوية، كالروبوتات التي تكون فيها جميع الوصلات تتحرك في مستوٍ ثابت. بداية ليكن لدينا جسماً صلباً واحداً في مستوٍ كما في الشكل (2.4). لنختر من هذا الجسم نقطتين A و B بحيث تكون إحداثياتهما (x,y) مأخوذة نسبة لجملة محاور إحداثية ثابتة (x_A,y_A) و (x_B,y_B) بالترتيب. من هذه الأربعة إحداثيات نحن نعلم أن ثلاثة منها فقط يمكن أن يتم اختيارها بشكل مستقل، وذلك بسبب أن قيد الجسم الصلب هو أن تكون المسافة بين النقطتين A و B هي محدد وثابتة، أي أن المسافة:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \qquad (2.4)$$

هي ثابتة. وبتعريف الزاوية ϕ_{AB} بحيث تكون الزاوية بين المحور x لجملة المحاور الإحداثية الثابتة والشعاع $\overrightarrow{AB}$. فإن الإحداثيات (x_A, y_A, ϕ_{AB}) هي عبارة عن مجموعة إحداثيات مستقلة والتي بإمكانها توصيف هيئة الجسم الصلب المستوي.



الشكل (2.4): الإحداثيات من أجل جسم صلب مستوٍ.

في الواقع، إن الإحداثيات (x_B,y_b) يمكن تحديدها كالتالي:

$$x_B = x_A + d_{AB}\cos\phi_{AB}$$

$$y_B = y_A + d_{AB}\sin\phi_{AB}$$

لنعتبر الآن وجود نقطتين أيضاً على الجسم الصلب هما C و D. ولتكن إحداثياتهما نسبة لنفس جملة المحاور الإحداثية الثابتة (x_C,y_C) و (x_D,y_D) بالترتيب، وبالتالي فإن القيد المعبر عنه بالمسافة:

$$d_{CD} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} \qquad (2.5)$$

هو ثابت. وبتعريف الزاوية ϕ_{CD} بنفس الطريقة السابقة فإننا نجد:

$$x_D = x_C + d_{CD}\cos\phi_{CD}$$

$$y_D = y_C + d_{CD}\sin\phi_{CD}$$

وبفرض أن النقطة B من الجسم الأول والنقطة C من الجسم الثاني قد تم وصلهما باستخدام مفصل دوراني، فإنه بالإضافة إلى قيد المسافة (2.4) و (2.5)، فإن المفصل الدوراني الواصل بين الجسمين سوف يفرض قيدين مستقلين إضافيين هما:

$$x_B = x_C \qquad (2.6)$$

$$y_B = y_C \qquad (2.7)$$

وبذلك نجد أنه لدينا ثمانية إحداثيات $(x_A,y_A,\ldots..x_D,y_D)$ وأربع معادلات للقيود، مما يقود إلى أن النظام يمتلك 4 = 4 – 8 درجات حرية. وإذا عرفنا زاوية المفصل الدوراني على أنها θ حيث

$\theta = \phi_{CD} - \phi_{AB}$، بالتالي فإن $(x_A,y_A,\phi_{AB},\theta)$ يمكن أن تمثل أربع إحداثيات مستقلة تستطيع وصف فضاء الهيئة لهذا النظام.

وإذا كانت النقطتين B و C متصلتين مع بعضهما باستخدام مفصل تمددي بحيث يسمح بالانتقال في اتجاه محدد (t_x,t_y) ، فإن القيدين المعبر عنهما في المعادلات (2.6) و (2.7) سوف يتم التعبير عنهما بالشكل الآتي:

$$x_C = x_B + dt_x \qquad (2.8)$$

$$y_C = y_B + dt_y \qquad (2.9)$$

حيث أن العدد d يمثل مسافة الانتقال وفقاً للاتجاه (t_x,t_y). ومرة أخرى سيكون لدينا أربعة قيود مفروضة على ثماني متغيرات، مما يقود إلى أن النظام يمتلك $8 - 4 = 4$ درجات حرية.ومنه فإن الإحداثيات (x_A,y_A,ϕ_{AB},d) تمثل أربع إحداثيات مستقلة تستطيع توصيف فضاء الهيئة لهذا النظام.

لنفترض الآن أن الجسمين السابقين يتصلان ببعضهما عن طريق مفصل ذي درجتي حرية، ويمكن الحصول على هذا المفصل مثلاً من خلال ربط تسلسلي للمفصلين السابقين الدوراني والتمددي. في هذه الحالة، فإن استنتاج القيد الإضافي الذي يؤثر على إحداثيات النقاط الثمانية $\{(x_A,y_A),\ldots,(x_D,y_D)\}$ ليس بهذه البساطة كما في الحالتين السابقتين. هذه الحالة تبين، على سبيل المثال، أن القيد سوف يكون متعلقاً بترتيب اتصال المفصلين الدوراني والتمددي فيما إذا كان المفصل الناشئ هو عبارة عن اتحاد مفصل دوراني يليه مفصل تمددي أو مفصل تمددي يليه مفصل دوراني. لكن من الواضح، على أية حال، أن معرفة قيم المفصلين θ و d ستصف بشكل كامل الإحداثيات (x_C,y_C) و (x_D,y_D) على الجسم الثاني. وبشكل مكافئ، فإن الإحداثيات الثمانية للنقاط $\{A, B, C, D\}$ يمكن أن يتم تحديدها بشكل تام بمعرفة المتغيرات $(x_A,y_A,\phi_{AB},\theta,d)$. وهكذا فإنه يمكن القول أن المفصل الذي يمتلك درجتي حرية سيفرض قيداً وحيداً على المتغيرات المستقلة الستة $(x_A,y_A,\phi_{AB},x_C,y_C,\phi_{CD})$، مما يجعلنا نقول أن هذا النظام يمتلك خمسة درجات من الحرية.

كنتيجة عامة، يمكن أن نستنتج أن أي مفصل يمتلك درجة حرية واحدة سوف يقلل من درجات الحرية للنظام بمقدار درجتين، بينما أي مفصل يمتلك درجتي حرية سيقلل درجات الحرية لهذا النظام بمقدار درجة واحدة. وهذا ما تم ملاحظته في الحقيقة في التعبير الوارد بالمعادلة (2.3). وبالتالي فإننا نستطيع الآن أن نستنتج صيغة جروبلر Grubler للروبوتات المستوية:

القاعدة 2.1. لنفترض أنه لدينا روبوتاً مستوياً مكون من N وصلة (حيث تعد الأرض كوصلة)، وليكن J هو العدد الكلي للمفاصل، وليكن f_i هو درجة الحرية للوصلة رقم i. بالتالي فإن درجة الحرية dof لميكانيزم الروبوت يمكن تقديرها من الصيغة التالية:

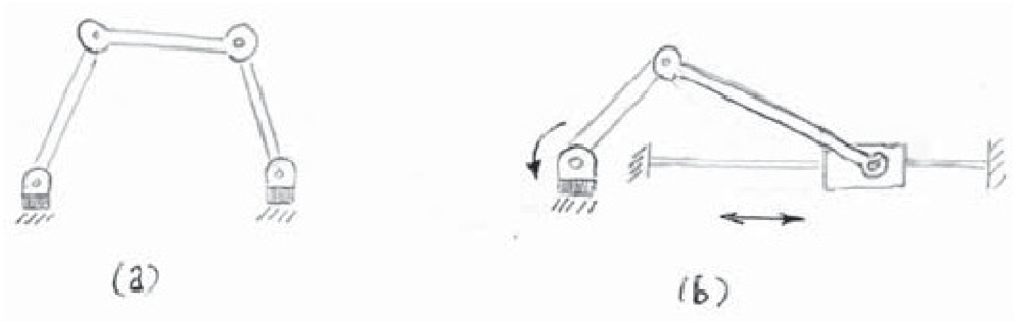
$$dof = 3(N-1) - \sum_{i=1}^{J}(3 - f_i)$$

$$dof = 3(N-1-J) + \sum_{i=1}^{J} f_i \qquad (2.10)$$

المثال 2.1. ميكانيزم الوصلات الرباعي وميكانيزم المنزلقة والمرفق:

ليكن لدينا ميكانيزم الوصلات الرباعي المبين في الشكل (2.5 (a)). هذا الميكانيزم المستوي مكون من أربع وصلات (واحدة منها هي الأرض) متصلة فيما بينها مشكلة حلقة مغلقة مفردة بوساطة أربعة مفاصل دورانية. بتعويض $J = 4$, $N = 4$ و $f_i = 1$ حيث $i = 1,\dots,4$ في صيغة جروبلر Grubler المستوية نجد أن ميكانيزم الوصلات الرباعي يمتلك درجة حرية واحدة فقط.

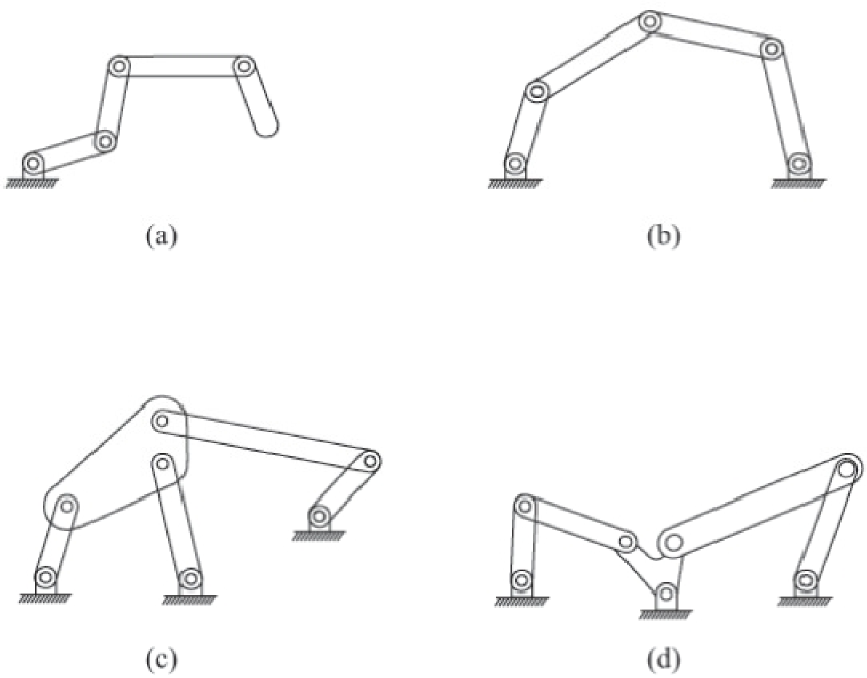
ميكانيزم المنزلقة والمرفق المبين في الشكل (2.5 (b)) يمكن تحليله بطريقتين: (1) الميكانيزم مؤلف من ثلاثة مفاصل دورانية ومفصل واحد تمددي ($J = 4$ وكل منها ذات درجة حرية واحدة $f_i = 1$)، وأربع وصلات ($N = 4$ متضمنة الأرض كوصلة). أو (2) أن الميكانيزم مؤلف من مفصلين دورانيين ($f_i = 1$) ومفصل مركب RP ($f_i = 2$) حيث المفصل RP هو تركيب بين مفصل دوراني وآخر تمددي، وثلاث وصلات ($N = 3$ مع الأخذ بالاعتبار أن المفصل يصل بين جسمين فقط). في كلا الحالتين فإن الميكانيزم يملك درجة حرية واحدة.



الشكل 2.5: (a) ميكانيزم الوصلات الرباعي (b) ميكانيزم المنزلقة والمرفق.

المثال 2.2. بعض الميكانيزمات المستوية التقليدية:

لنحاول الآن تطبيق صيغة جروبلر Grubler المستوية على العديد من الميكانيزمات المستوية التقليدية المبية بالشكل (2.6).



الشكل 2.6: (a) سلسلة وصلات تسلسلية عددها k. (b) ميكانيزم الوصلات الخماسي. (c) ميكانيزم الوصلات السداسي Stephenson. (d) ميكانيزك الوصلات السداسي Watt.

من أجل سلسلة الوصلات المستوية التسلسلية ذات العدد k في الشكل (a)، ($N = k + 1$) وهو عدد الوصلات بالأخذ وذلك باعتبار الأرض كوصلة)، $J = 4$، ولأن كل المفاصل هي مفاصل دورانية، بالتالي فإن كل $f_i = 1$. وبذلك يكون:

$$dof = 3((k+1) - 1 - k) + k = k$$

وبالنسبة لميكانيزم الوصلات الخماسي كما في الشكل (b)، $N = 5$ (أربع وصلات مع الأرض)، $J = 5$، وبما أن جميع المفاصل هي دورانية فإن كل $f_i = 1$، ومنه:

$$dof = 3(5 - 1 - 5) + 5 = 2$$

ومن أجل ميكانيزم Stephenson السداسي الوصلات كما في الشكل (c)، لدينا $N = 6$، $J = 7$ و $f_i = 1$ لجميع الوصلات، وبالتالي:

$$dof = 3(6 - 1 - 7) + 7 = 1$$

وأخيراً، من أجل ميكانيزم Watt السداسي الوصلات كما في الشكل (d)، لدينا $N = 6$، $J = 7$ و $f_i = 1$ من أجل جميع الوصلات، فنلاحظ أنه يشبه ميكانيزم Stephenson ومنه:

$$dof = 3(6 - 1 - 7) + 7 = 1$$

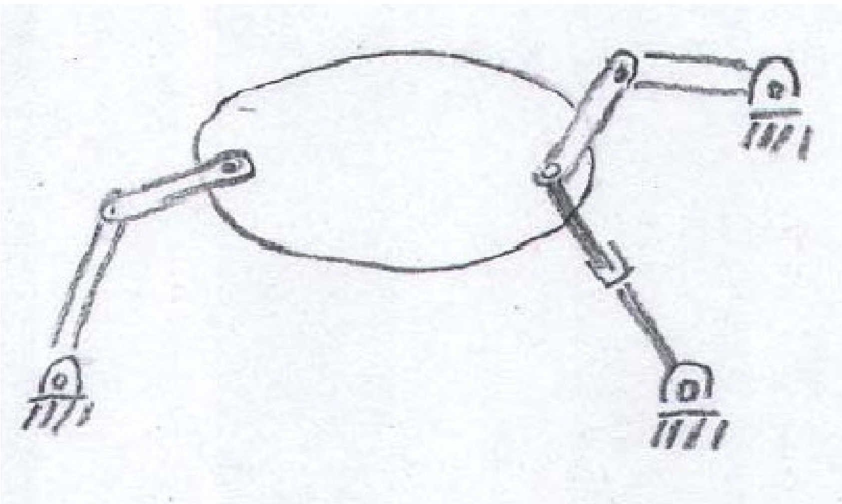
المثال 2.3. ميكانيزم مستوٍ يمتلك مفاصل مركبة Overlapping Joints:

ليكن لدينا الميكانيزم المستوي الموضح بالشكل (2.7). ونلاحظ هنا أن هناك عدد من الطرق يمكن أن تقودنا لمعرفة حركية الميكانيزم باستخدام صيغة جروبلر Grubler. فإذا أمكن اعتبار جميع المفاصل على أنها إما أن تكون دورانية أو تمددية، عندها فإن الميكانيزم يتكون من سبع وصلات ($N = 7$)، وثمان مفاصل دورانية، ومفصل واحد تمددي. ونلاحظ أن هناك ثلاثة أجسام تتقابل في نقطة واحدة على اليمين. ويجب التذكير هنا أن المفصل يصل بين جسمين فقط لاغير، وبالتالي فإن المفصل عند نقطة التقاطع هذه هو ليس مفصل دوراني واحد، ولكن في الحقيقة هو عبارة عن مفصلين دورانيين متراكبين على بعضهما البعض. وبالتعويض في صيغة جروبلر Grubler:

$$dof = 3(8 - 1 - 9) = 9(1) = 3$$

وبدلاً من ذلك، فإنه يمكن النظر إلى زوج المفاصل الدوراني التمددي المتصل مع نقطة التقاطع تلك على أنه مفصل واحد بدرجتي حرية. وفي هذه الحالة فإن عدد الوصلات هو $N = 7$، مع ست مفاصل دورانية ومفصل وحيد ذي درجتي حرية دورانية وتمددية، وحسب صيغة جروبلر Grubler مرة أخرى نجد:

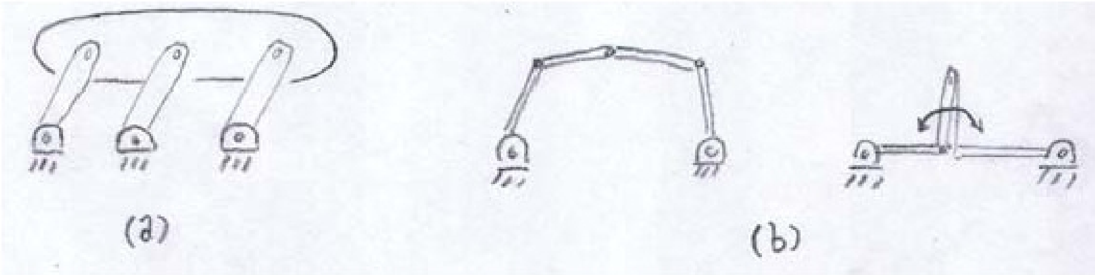
$$dof = 3(7 - 1 - 9) + 6(1) + 1(2) = 3$$



الشكل 2.7: ميكانيزم مستوٍ مع مفصلين مركبين.

المثال 2.4. صيغة جروبلر Grubler والحالات الشاذة Singularities:

ليكن لدينا ميكانيزم الوصلات المتوازي الأضلاع Parallelogram المبين في الشكل (2.8 (a)). وهنا لدينا $N = 5$، $J = 6$ و $f_i = 1$ لجميع الوصلات، وبحسب صيغة جروبلر Grubler فإن درجة الحرية لهذا الميكانيزم تحسب بالشكل $3(5-1-6)+6 = 0$. ومن المعلوم فإن أي ميكانيزم يمتلك درجة حرية معدومة يمكن اعتباره جسماً جاسئاً. ولكن في حال كانت الوصلات المتوازية في هذا الميكانيزم لها نفس الطول، وبحيث يكون صفا المفاصل كل منهما على خط واحد كما هو موضح بالشكل، فإن الميكانيزم في الحقيقة يستطيع التحرك بدرجة حرية واحدة.



الشكل 2.8: (a) ميكانيزم الوصلات المتوازي الأضلاع (b) ميكانيزم الوصلات الخماسي بهيئتين نظامية وشاذة.

وفي حالة مماثلة تحدث في ميكانيزم الوصلات الخماسي المبين في الشكل (2.8 (b)). إذا كان المفصلين المتصلين بالأرض ثابتين، فإن الميكانيزم الخماسي الوصلات والذي كان يسمح بدرجتي حرية سوف يصبح كجسم أو هيكل جاسئ. ولكن يجب الملاحظة أنه إذا كانت الوصلتين في المنتصف متراكبيتن على بعضهما البعض كما هو في الشكل، فإن هذه الوصلات قادرة على الحركة الدورانية بحرية حول المفصلين المتراكبين الناتجين. وبالطبع، طول الوصلات يجب أن يتم اختياره بطريقة تسمح بوجود الميكانيزم على هيئة ما أمراً ممكنا. وإذا تم تثبيت زوج آخر من المفاصل فإن الميكانيزم سيصبح هيكلاً جاسئاً كما هو متوقع.

وبالتالي فإن صيغة جروبلر Grubler لا تستطيع تمييز الحالات الشاذة كهاتين الحالتين التي تم توضيحهما. وهاتان الظاهرتان هما من الأمثلة على الحالات الشاذة لفضاء الهيئة الناشة في ميكانيزمات السلاسل المغلقة، والتي سيتم الحديث عنها فيما بعد بشكل مفصل.

صيغة جروبلر Grubler للروبوتات الفضائية:

كلنا نعلم أن ست متحولات مستقلة تلزم من أجل وصف الموقع والاتجاه لجسم صلب موجود في الفراغ، وكنا فيما مضى قد عالجنا صيغة جروبلر Grubler من أجل الميكانيزمات المستوية. الآن إذا كان لدينا جسمين صلبين فراغيين متصلين مع بعضهما بمفصل يمتلك k درجة حرية، بالتالي فإن 6+k = (6-k)-12 من البارامترات المستقلة تكون مطلوبة من أجل توصيف فضاء الهيئة. واعتماداً على هذه الملاحظة، فإن صيغة جروبلر Grubler من أجل الروبوتات الفضائية يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

القاعدة 2.2. بفرض أن لدينا روبوتاً فضائياً مكوناً من N وصلة (متضمنة الأرض)، J مفصل (مرقمة من 1 إلى J) حيث f_i هي درجة الحرية للمفصل i. فإن درجة الحرية للروبوت يمكن أن تقدر بالاعتماد على الصيغة الآتية:

$$dof = 6(N-1) - \sum_{i=1}^{J}(6-f_i)$$

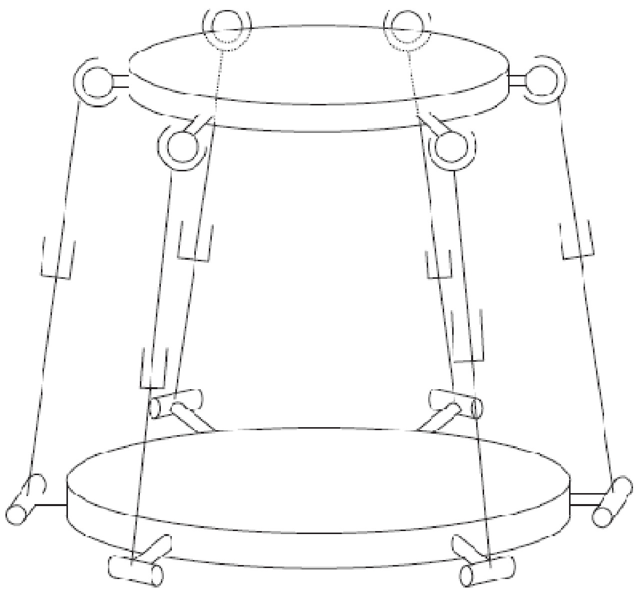
$$dof = 6(N - 1 - J) + \sum_{i=1}^{J} f_i \qquad (2.11)$$

ويجب أن ننوه أن صيغة جروبلر Grubler للميكانيزمات الفضائية أو الفراغية يجب أن لا يتم استخدامها على الميكانيزمات المستوية، والعكس بالعكس. وسوف نناقش فيما يلي بعض الأمثلة عن الروبوتات الفضائية.

المثال 2.5. منصة ستيوارت – جوف Stewart – Gough:

هذه المنصة الموضحة بالشكل (2.9) مكونة من قاعدتين، القاعدة السفلية ثابتة غير قابلة للحركة، والعلوية متحركة ومتصلة بست أذرع ذات بنية تسلسلية وتسمى كل واحدة منها ساقاً. وكل ساق تتكون من مفصل عام ومفصل تمددي ومفصل كروي (UPS) مرتبة على هذا النسق. إن العدد الكلي للوصلات (بمافي ذلك القاعدة السفلية والتي تعتبر كأنها وصلة الأرض) هو $N = 14$. في هذه المنصة هناك ست مفاصل عامة (كل منها يمتلك درجتي حرية $f_i = 2$)، وست مفاصل تمددية (كل منها يمتلك درجة حرية واحدة $f_i = 1$)، وست مفاصل كروية (كل منها يمتلك ثلاث درجات من الحرية $f_i = 3$). وعدد المفاصل الكلي هو $J = 18$. بتعويض هذه القيم في صيغة جروبلر Grubler الفضائية نجد:

$$dof = 6(14 - 1 - 18) + 6(1) + 6(2) + 6(3) = 6$$



الشكل 2.9: منصة ستيوارت – جوف Stewart – Gough.

في بعض نماذج منصة ستيوارت جوف Stewart – Gough فإن المفاصل الستة العامة يمكن الاستعاضة عنها بست مفاصل كروية. وصيغة جروبلر Grubler في هذه الحالة تشير إلى أن الميكانيزم سوف يمتلك 12 درجة حرية. وهذه النتيجة ربما تكون مفاجئة لكنها صحيحة. حيث إن تبديل المفاصل العامة واستخدام المفاصل الكروية عوضاً عنها سيؤدي إلى زيادة في الحركية

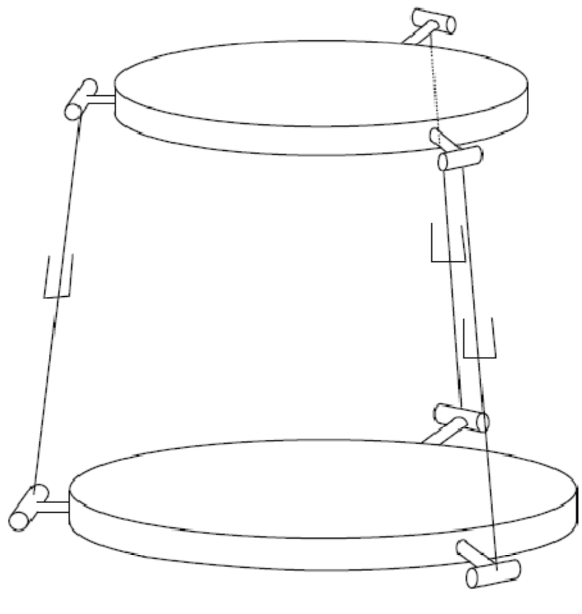
لكل ساق عن طريق السماح للدوران الالتوائي Torsional Rotation حول محور الساق. وعلى الرغم من وجود هذا الدوران الالتوائي إلا أنه لا يؤثر على حركة القاعدة العلوية المتحركة.

المثال 2.6. منصة 3×UPU:

إن هذا المثال المبين في الشكل (2.10) له أيضاً بنية المنصة التي ناقشناها في المثال السابق، حيث هناك قاعديتن متصلتين ببعضهما ولكن باستخدام ثلاثة مفاصل UPU على هيئة بنية تسلسلية لتشكل ذراعاً. إن العدد الكلي للوصلات هو $N = 8$. وهناك ست مفاصل عامة، وثلاث مفاصل تمددية بحيث يكون العدد الكلي للمفاصل هو $J = 9$. وبالتعويض في صيغة جروبلر Grubler نجد:

$$dof = 6(8 - 1 - 9) + 3(1) + 6(2) = 3$$

وبالتالي فإنهذا الميكانيزم يمتلك ثلاث درجات من الحرية وفقاً لصيغة جروبلر Grubler، لكن النموذج المُنشأ لهذا الميكانيزم يكشف عن وجود درجات حرية إضافية لم تتمكن صيغة جروبلر Grubler من التنبؤ بها. وسنناقش مثل هذه الحالات فيما بعد.



الشكل 2.10: منصة 3×UPU.

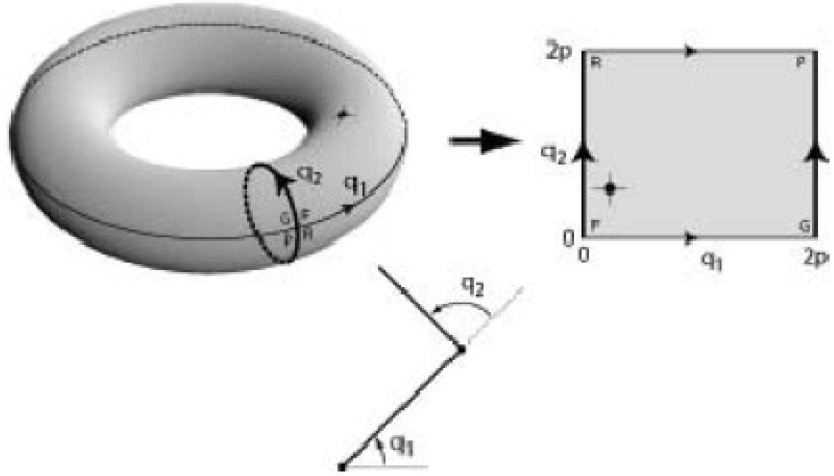
2.2.2. توصيف فضاء الهيئة:

لنتذكر أن تعريف هيئة الروبوت هو عبارة عن التوصيف الكامل لموقع كل نقاط الروبوت، ومجموعة الهيئات لروبوت تشكل ما يسمى بفضاء الهيئة. فمن أجل جسم صلب مستوٍ وحيد، فإن هيئته يمكن أن تشخص بشكل كامل عن طريق تحديد ثلاثة إحداثيات مستقلة (x,y,θ)، حيث $(x,y) \in R$ و $\theta \in [0,2\pi]$. ففضاء الهيئة يكون بالنتيجة ثلاثي الأبعاد، والإحداثيات (x,y,θ) هي برامترات توصيف واضحة ومحددة Explicit. وبدلاً من ذلك، يمكننا من أجل توصيف هيئة

الجسم أن نختار إحداثيات لنقطتين منه مثل A و B، بحيث تكون الإحداثيات (x_A,y_A) و (x_B,y_B) على الترتيب. وبالتالي فإن القيد لهذا الجسم الصلب سيكون:

$$\sqrt{(x_A + x_B)^2 + (y_A + y_B)^2} = d_{AB} \qquad (2.12)$$

حيث أن البعد d_{AB} هو ثابت، وهذا يعني أن الأربعة إحداثيات السابقة ليست مستقلة. وبهذا فإن المعادلة (2.12) هي توصيف ضمني Implicit لفضاء الهيئة. إن فضاء الهيئة للروبوتات بشكل عام عادة تسمح بوجود كلا التوصيفين، المحدد الواضح والضمني. في حالة السلاسل المفتوحة، فإن بارامترات التوصيف المحددة والواضحة من أجل فضاء الهيئة تعطى عن طريق متغيرات المفاصل. فمن أجل سلسلة مفتوحة مستوية من نوع 2R (تمتلك مفصلين دورانيين) كما في الشكل (2.11)، فإن قيم المفاصل الدورانية (q_1,q_2) تحدد بشكل كامل الموقع و الاتجاه للوصلتين. وفضاء الهيئة في هذه الحالة هو $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$، والذي يمكن أن يظهر على طارة Torus ثنائية البعد (شطيرة الدونات Doughnut لكن بشكل مسطح) والمبينة في الشكل (2.11). ونلاحظ أنه عند قطع الطارة على طول الخطين الغامقين الموضحين في الشكل، فإنه بإمكاننا فرد (كتعبير مجازي) هذه الطارة على هيئة مستطيل (يسمى بـ"الطارة المسطحة").



الشكل 2.11: فضاء الهيئة لميكانيزم متسلسل يمتلك مفصلين دورانيين 2R.

ومن أجل السلاسل المغلقة (وهي الروبوتات المحتوية على حلقة مغلقة أو أكثر)، فإنه عادة مايتم الحصول على البرامترات الضمنية بشكل أسهل، أما الحصول على البرامترات الواضحة المحددة لها يتطلب حل مجموعة من المعادلات غير الخطية. وكمثال على ذلك لندرس ميكانيزم الوصلات الرباعي المبين في الشكل (2.12)، والذي يمتلك درجة حرية واحدة. وفي الحقيقة، إن ميكانيزم الوصلات الرباعي دائماً يشكل حلقة مغلقة يمكن التعبير عنها على شكل ثلاثة معادلات كالتالي:

$$L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \cdots + L_4 \cos(\theta_1 + \cdots + \theta_4) = 0$$

$$L_1 + \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \cdots + L_4 \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_4) = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \pi = 0$$

وهذه المعادلات يمكن الحصول عليها بالنظر إلى ميكانيزم الوصلات الرباعي على أنه ميكانيزم تسلسلي بأربعة مفاصل دورانية، حيث: (i) نهاية الوصلة L_4 هي دائماً منطبقة على المبدأ، (ii) اتجاه الوصلة L_4 هو دائماً أفقي.

وتسمى هذه المعادلات بشكل عام في ميكانيزمات السلاسل المغلقة بمعادلات الحلقة المغلقة. فمن أجل ميكانيزم الوصلات الرباعي هذا فهي تعطى بمجموعة من ثلاثة معادلات وبأربعة مجاهيل. ومجموعة الحلول هنا تشكل منحنياً في فضاء بعدي رباعي (تبعاً لعدد المفاصل) موصف بالبرامترات $(\theta_1,\ldots,\theta_4)$، وتشكل فضاء الهيئة لهذا الميكانيزم.

وللروبوتات بشكل عام والمحتوية على حلقة مغلقة أو أكثر، فإن فضاء الهيئة يمكن أن يتم توصيفه ضمنياً بمعادلات الحلقة المغلقة ذات الشكل:

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} g_1(\theta_1, \ldots, \theta_n) \\ \vdots \\ g_k(\theta_1, \ldots, \theta_n) \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.13)$$

حيث أن $\theta \in R^n$، وهذه التشكيلة من المعادلات لهذه الميكانيزمات المغلقة تعبر عن شعاع المتغيرات للمفاصل، و $g : R^n \to R^k$ وهي مجموعة تتألف من معادلات مستقلة عددها k، حيث $k \le n$. مثل هذه القيود تسمى قيوداً هولونومية Holonomic (أي قيوداً تامة). وفضاء الهيئة هنا يمكن بذلك أن ينظر له على شكل سطح متعدد الأبعاد من المرتبة n-k ضمن المجال R^n.

2.2.3. القيود البفافيانية Pfaffian Constrains:

لنفترض أن لدينا روبوتاً ذي سلسلة مغلقة Closed Chain له جملة معادلات الحلقة المغلقة $g(\theta) = 0$، حيث $g : R^n \to R^k$، ولنفترض أن هذا الروبوت في حالة حركة تابعة للزمن، أي أن $\theta(t)$. ومنه وباشتقاق طرفي المعادلة $g(\theta(t)) = 0$ بالنسبة لـ t نجد:

$$\frac{d}{dt} g\big(\theta(t)\big) = \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{d\theta_1}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots + \frac{dg_1}{d\theta_n}(\theta)\dot{\theta}_n \\ \vdots \\ \frac{dg_k}{d\theta_1}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots + \frac{dg_k}{d\theta_n}(\theta)\dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{d\theta_1}(\theta) & \cdots & \frac{dg_1}{d\theta_n}(\theta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dg_k}{d\theta_1}(\theta) & \cdots & \frac{dg_k}{d\theta_n}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} = \frac{dg}{d\theta}(\theta)\dot{\theta} = 0 \qquad (2.14)$$

حيث $\dot{\theta}_i$ تشير إلى المشتق بالنسبة للزمن t لـ θ_i، و $dg/d\theta(\theta) \in R^{k\times n}$، و $\theta, \dot{\theta} \in R^n$. ومن المعادلة أعلاه نجد أن شعاع السرعة للمفصل $\dot{\theta} \in R^n$ لايمكن أن يكون اعتباطياً، ولكن يجب أن يحقق المعادلة:

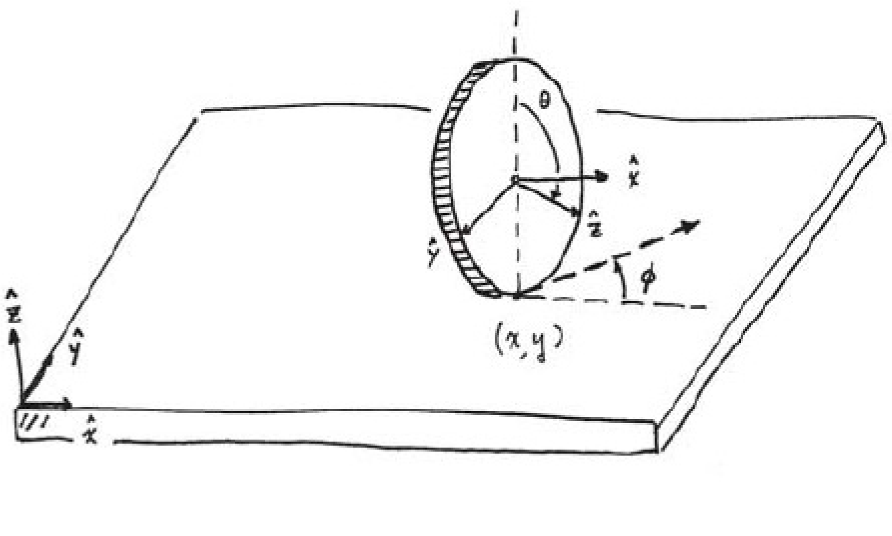
$$\frac{dg}{d\theta}(\theta)\dot{\theta} = 0 \qquad (2.15)$$

والقيود على $\dot{\theta}$ سوف تأخذ الشكل:

$$A(\theta)\dot{\theta} = 0 \qquad (2.16)$$

حيث $A(\theta) \in R^{k\times n}$ تسمى بالقيود البفافيانية Pfaffian Constrains. ورأينا سابقاً أن اشتقاق معادلة الحلقة المغلقة بالنسبة للزمن t هو $g(\theta(t)) = 0$ يقودنا إلى مثل هذه القيود. وبصورة معاكسة يمكن لأحدنا أن ينظر للتابع $g(\theta)$ على أنه تكامل $dg/d\theta(\theta)$، ولهذا السبب فإن القيود من هذا الشكل $g(\theta) = 0$ تسمى القيود المتكاملة Integrable Constraints أو يمكن تسميتها بالقيود التامة Holonomic Constraints.

لنعرض الآن نمطاً آخر للقيود البفافيانية والتي تختلف بشكل أساسي عن النوع التام. ولنقم بتوضيح ذلك من خلال مثال، لنفترض أن لدينا قطعة نقود لها نصف قطر r تتدحرج على سطح مستوٍ كما في الشكل (2.13).



الشكل 2.13: قطعة نقود تدحرج على سطح مستوٍ بدون انزلاق.

ولنفترض وجود جملة محاور إحداثية مثبتة في مركز القطعة النقدية، بحيث يكون محور الدوران دائماً متجهاً باتجاه المحور x . ولأن جملة المحاور الإحداثية مثبتة على قطعة النقود، فإن المحور y و المحور z يدوران حول المحور x بنفس المعدل حيث يشكلان فيما بينهما قطاعاً وهذا القطاع يدور بنفس المعدل أيضاً. وسنفترض أن قطعة النقود تبقى دائماً عمودية على السطح المستوي (حيث أن المحور x للقطعة النقدية لجملة المحاور الإحداثية المتعلقة بالجسم هي دائماً موازية للسطح).

ضمن هذه الفرضيات، فإننا هنا نحتاج على الأقل إلى أربع بارامترات لنصف بشكل كامل هيئة القطعة النقدية. وهذه البارامترات هي إحداثيات نقطة التلامس مع السطح (x,y)، وزاوية الاتجاه ϕ، وزاوية الدوران θ (انظر الشكل (2.13)). وفضاء الهيئة لقطعة النقود هذه بالتالي هي عبارة عن $R^2\times T^2$، حيث T^2 هو عبارة عن طارة ثنائية الأبعاد يتم توصيفها من خلال الزوايا ϕ وθ. وفضاء الهيئة هذا هو رباعي الأبعاد.

لنقم الآن بالتعبير بشكل رياضي عن حقيقة كون قطعة النقود تتدحرج بدون وجود انزلاق. قطعة النقود يجب أن تتدحرج دائماً في الاتجاه المحدد بـ $(\cos\phi, \sin\phi)$، بسرعة نحو الأمام تقدر تعطى بالمقدار $r\dot{\theta}$:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = r\dot{\theta}\begin{bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

وبجمع جميع إحداثيات فضاء الهيئة بصيغة شعاع وحيد $q=(x,y,\phi\theta) \in R^2\times T^2$، فإن قيد عدم الانزلاق في المعادلة أعلاه يمكن التعبير عنه بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -r\cos q_3\\ 0 & 1 & 0 & -r\sin q_3\end{bmatrix}\dot{q} = 0 \qquad (2.18)$$

وهو أيضاً قيد مشتق من الشكل $A(q)\,\dot{q} = 0$، $A(q) \in R^{2\times 4}$.

إن هذا القيد ليس متكاملاً، ذلك لأنه من أجل $A(q)$ المعطاة بالمعادلة (2.18)، ليس هناك أي قابلية لاشتقاق $g : R^2 \to R^4$ بحيث يكون $dg/q=A(q)$. ولنعرف السبب، فإنه يجب أن يكون هناك وجود لتابع قابل للاشتقاق $q_1(q)$ بحيث يحقق التالي:

$$\frac{dg_1}{dq_1} = 1 \to g_1(q) = q_1 + h_1(q_2, q_3, q_4)$$

$$\frac{dg_1}{dq_2} = 0 \to g_1(q) = h_2(q_1, q_3, q_4)$$

$$\frac{dg_1}{dq_3} = 0 \to g_1(q) = h_3(q_1, q_2, q_4)$$

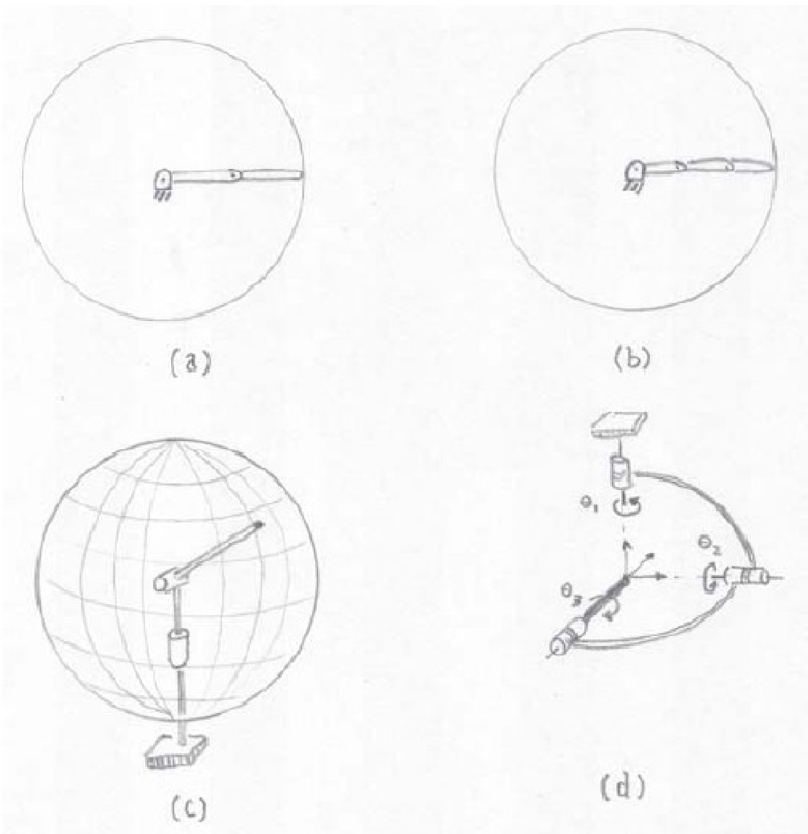
$$\frac{dg_1}{dq_4} = -r\cos q_3 \to g_1(q) = -rq_4\cos q_3 + h_4(q_1, q_2, q_3)$$

وذلك من أجل أي تابع h_i حيث $i=1,\dots,4$ قابل للاشتقاق بالنسبة لأي من متغيراتها، وسنجد بعد التمحيص أنه ليس للتابع $g_1(q)$ وجود بحيث يحقق الاشتقاق ذاك. وبطريقة مماثلة نجد أن $g_2(q)$ غير موجود أيضاً، بالتالي فإن القيد الموجود في المعادلة (2.18) هو غير قابل للتكامل. إن القيد البفافياني الغير قابل للتكامل يدعى أيضاً بالقيد غير التام nonholonomic Constaint. ومثل هذه القيود تظهر عند دراسة عدد من الروبوتات التي تدور حول إمكانية التدحرج بدون إنزلاق، ومثال على ذلك دراسة التحليل الكينماتيكي لعربة ذات عجلات.

2.2.4. فضاء المهمة Task Space:

سندرس في مايلي نوعاً آخر من الاصطلاح عن طريق مثال يدور حول ميكانيزم روبوت ذي سلسلة مفتوحة مكون من مفصلين دورانين 2R (انظر الشكل (2.14 (a)). ولنفترض أن النهاية العاملة End Effector هي نقطة الطرف من هذا الميكانيزم. إن المنطقة ضمن المستوي والتي يستطيع هذا الطرف الوصول إليها تسمى فضاء أو مجال المهمة Task Space، أو تسمى فضاء العمل Workspace، لميكانيزم السلسلة المفتوحة. إن فضاء المهمة يمكن عده على أنه فضاء الهيئة بالنسبة للنهاية العاملة. وهو يتميز عن فضاء الهيئة للروبوت حيث أن أي نقطة من فضاء المهمة هي غير مطلوبة لتحديد الهيئة الكاملة للروبوت، وهنالك عدد كبير جداً أو غير منتهٍ من هيئات الروبوت التي تشكل وترسم نفس فضاء المهمة.

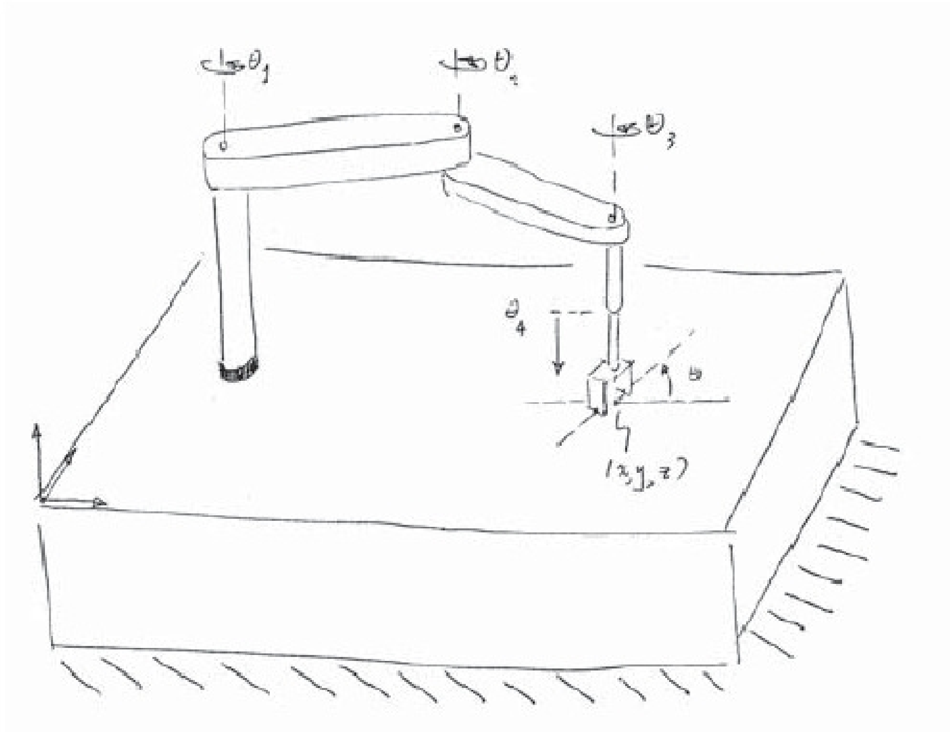
ويمكن لميكانزمين لهما فضاء هيئة مختلف عن الآخر أن يكون لهما نفس فضاء المهمة. وكمثال على ذلك، لنفترض أن طرف الميكانيزم هو عبارة عن النهاية العاملة للروبوت ولنقم بإهمال اتجاهاتها Orientatios، فسنلاحظ أنه بالنسبة لميكانزم مستوٍ ذي سلسلة مفتوحة له مفصلين دورانيين 2R ووصلتين بطول يساوي 3، ولميكانيزم مستوٍآخر ذي سلسلة مفتوحة له ثلاثة مفاصل دورانية 3R وله ثلاث وصلات بطول يساوي 2 (انظر الشكل (2.14 (b))، نلاحظ أنهما يملكان نفس فضاء المهمة على الرغم من الاختلاف فيما بينهما من حيث فضاء الهيئة.



الشكل 2.14: أمثلة عن فضاءات المهمة لروبوتات متنوعة: (a) روبوت مستوٍ ذو سلسلة مفتوحة مكون من مفصلين دورانيين 2R (b) روبوت مستوٍ ذو سلسلة مفتوحة مكون من ثلاث مفاصل دورانية 3R (c) روبوت فضائي مكون من مفصلين دورانيين 2R (d) ميكانيزم التوجيه (المعصم) المكون من ثلاثة مفاصل دورانية 3R.

ويمكننا القول أيضاً أن أي ميكانزمين لهما نفس فضاء الهيئة يمكن أن يكون لهما فضائي مهمة مختلفين. فعلى سبيل المثال، لنفترض أن نقطة الطرف هي النهاية العاملة ولنهمل الاتجاهات لها، فسنلاحظ أن ميكانيزم السلسة المفتوحة المكون من مفصلين دورانيين 2R والموضح في الشكل (2.14 (a)) يمتلك فضاء مهمة على هيئة قرص مستوٍ، في حين أن ميكانيزم السلسلة المفتوحة الذي يحتوي أيضاً مفصلين دورانيين 2R والموضح في الشكل (2.14 (c)) يمتلك فضاء مهمة على شكل كرة. وبطريقة مماثلة، فإن ميكانيزم السلسلة المفتوحة المحتوي على ثلاثة مفاصل دورانية 3R كما في الشكل (2.14 (b)) يمتلك فضاء مهمة على شكل قرص مستوٍ، في حين أن ميكانيزم السلسلة المفتوحة الذي يحتوي على ثلاثة مفاصل دورانية 3R والمبين في الشكل (2.14 (d)) يمتلك فضاء مهمة يشمل كل الاتجاهات الممكنة في الفضاء.

المثال 2.7. روبوت SCARA المبين في الشكل (2.15):



الشكل 2.15: روبوت SCARA

وهو روبوت ذو سلسلة مفتوحة مكون من ثلاثة مفاصل دورانية ومفصل تمددي واحد RRRP والمستخدم بشكل واسع كوسيلة لقط ونقل. إن هيئة النهاية العاملة لهذا الروبوت يمكن أن توصف بشكل كامل عن طريق البارامترات الأربعة (x,y,z,ϕ)، حيث (x,y,z) تشير إلى الإحداثيات الديكارتية لموقع نقطة المركز للنهاية العاملة، و ϕ تشير إلى اتجاه النهاية العاملة للروبوت في المستوي x-y. ومنه فإن فضاء المهمة له هو $R^3\times[0,2\pi]$.

المثال 2.8. روبوت صناعي مناور Manipulator قياسي ذو ست مفاصل دورانية 6R:

هذا الروبوت يمكن أن يوظف في تطبيقات عمليات الدهان بالبخ كما هو مبين بالشكل (2.16). تكون فوهة بخ الدهان مربوطة بطرف الروبوت ويمكن اعتبارها النهاية العاملة له. إن الذي يهم

في هذا الروبوت هو معرفة الإحداثيات الديكارتية لفوهة البخ بالإضافة إلى معرفة الاتجاه الذي يتم فيه البخ، أما الدورانات حول محور الفوهة فهي غير مهمة. لذلك يمكن توصيف هيئة الفوهة باستخدام خمسة إحداثيات (x,y,z) من أجل تحديد الموقع الديكارتي للفوهة، والإحداثيات الكروية (θ,ϕ) من أجل وصف الاتجاه الذي تقوم به الفوهة بالبخ. وحيث أن الإحداثيات (θ,ϕ) توصف الكرة الواحدية Unit Sphere ضمن المجال R^3، فإن توصيف فضاء المهمة يمكن أن يعطى بالمجال $R^3\times S^2$، حيث S^2 تشير إلى الكرة الواحدية ثنائية البعد ضمن المجال R^2.

الشكل 2.16: ربوت من أجل الدهان بالبخ

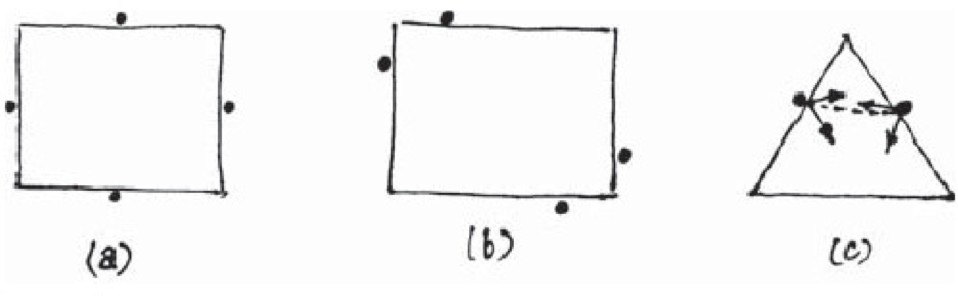
الفصل الثالث

التحليل الستاتيكي للمسك

Grasp Statics

الشكل (3.1) يظهر جسماً صلباً مستوياً مقيداً بجموعة من أربعة تماسات نقطية. ويمكننا أن نتخيل أن هذه التماسات النقطية الأربعة على أنها اطراف أصابع اليد والتي تقوم بمسك الجسم، مثل هذا التصور يمكن أن نطلق عليه اسم المسك Grasp. ولنقم الآن بطرح السؤال التالي: من الطريقتين المبينتين في الشكل (3.1 (a) و (b)) لمسك الجسم باستخدام أربعة تماسات نقطية، أي منهما هو الأكثر استقراراً من حيث قابلية مقاومة إي قوى وعزوم خارجية اعتباطية يمكن أن تطبق على الجسم الممسوك؟

ومن الواضح أنه في حال وجود تأثير الاحتكاك Friction والذي يظهر في مناطق التماسات، فإن ذلك يمكن أن يساعد على جعل الموضوع أكثر وضوحاً. ومن البديهي القول أنه من الممكن أن نمنع حركة الجسم Immobilizing باستخدام نقاط تماس عديمة الاحتكاك Frictionless متوفرة لدينا بعدد كافٍ ومتوضعة بالشكل المناسب. وسنقوم الآن الحالة عديمة الاحتكاك بعناية أكثر. ففي المسك المبين في الشكل (a)، إن أي عزم مطبق حول مركز الجسم يمكن أن يسبب دوران متناهٍ في الصغر Infinitesimal في المستوي. من جهة أخرى، فإن المسك المبين في الشكل (b)، يبدو أفضل من حيث قابلية تحمل أية قوى وعزوم خارجية. وإذا تخيلنا الأمر على أنه تم تثبيت التماسات بحيث تتوضع مع وجود بعض الخلوصات الصغيرة بينها وبين الجسم بحيث تسمح للجسم بالترنح wiggle قليلاً، فإن المسك في الشكل (a) سيبدو أكثر حساسية للعزوم والقوى الخارجية، ولهذا سيكون أكثر عرضة للإزاحات Displacement الغير مرغوب فيها للجسم بالمقارنة مع المسك في الشكل (b).



الشكل 3.1: (a) و (b) جسم صلب مستوٍ مقيد بأربعة قيود تماسية عديمة الاحتكاك. (c) جسم صلب مقيد بنقطتي تماس مع وجود الاحتكاك. تؤثر الجاذبية باتجاه الأسفل.

والآن لنفترض أن هذه التماسات هي بمثابة أطراف أصابع اليد التي تمسك جسماً، فإذا لم يكن هناك وجود للاحتكاك في كل نقطة تماس، فإن أطراف الأصابع يمكنها أن تطبق قوى دفع بحيث تكون عمودية على أسطح الجسم في نقاط التماس. أما إذا كان الاحتكاك موجوداً، فإن أطراف

الأصابع يمكنها الآن أن تطبق قوى في اتجاه غير عمودي على الأسطح ضمن حدود زاوية محدد مقاسة من الناظم العمود على السطح في نقطة التماس (مقدار هذه الزاوية يعتمد كمية الاحتكاك الحاصل، فكلما كان الاحتكاك الحاصل أكبر، كلما كانت هذه الزاوية أكبر). وإذا كانت أطراف الأصابع قادرة على توليد قوى في أماكن التماس تستطيع مقاومة القوى أو العزوم الخارجية المطبقة على الجسم، فإننا نستطيع أن نقول أن الجسم واقع تحت تأثير قوى إغلاق Force Closure، وعملية المسك هذه هي عبارة عن مسك بقوى الإغلاق Force Closure Grasp. وإذا كانت نقاط التماس متوضعة بحيث تجعل أية أمكانية لحركة الجسم مستحيلة، فإننا نقول أن الجسم يقع في حالة إغلاق Form Closure.

إن كل حالات الإغلاق في عملية المسك هي في الحقيقة تعتبر واقعة تحت تأثير قوى الإغلاق، لكن العكس ليس صحيحاً دائماً، على سبيل المثال، في الشكل (3.1)، فإن إصبعين مع نقاط تماس بوجود احتكاك تستطيع أن تمسك الجسم المستطيل بوجود تأثير الجاذبية (تأثيرها نحو الأسفل)، بمعنى آخر، لو أن المحركات المسؤولة عن توليد القوى في الأصابع لم تقدم القدر الكافي من القوة، فإن الجسم المستطيل يمكن أن يسقط على الرغم من أن المسك يحدث تحت تأثير قوى إغلاق.

وفي هذا الفصل سوف نبحث في الطرق التي تحدد فيما إذا كانت عملية المسك هي فعلاً تشكل قوى إغلاق على الجسم أم لا. ويجب علينا أن نأخذ بعين الاعتبار أن الأجسام التي نريد مسكها يجب أن يتم احتسابها على أنها أجسام صلبة، وفقط عمليات المسك التي يمكن نمذجتها على أنها مجموعة من نقاط التماس سوف تؤخذ بعين الاعتبار. وقد يبدو هذا للوهلة الأولى تقييداً أو حصراً للدراسة، فبعض أنواع التماسات (مثل التماسات الخطية أو السطحية) يمكن عدها في بعض التطبيقات على أنها مجموعة من نقاط التماس.

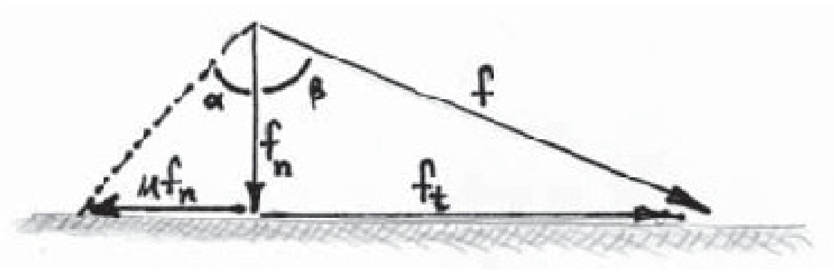
إن الشروط التي تحقق تأثير قوى الإغلاق تتبع بشكل مباشر إلى معادلات التوازن الستاتيكي للقوى والعزوم. وتحليل قوى الإغلاق في نهاية الأمر يتخلص بالسؤال عن وجود حلول للمعادلة الخطية من النمط $Ax = b$، مع عدم إهمال أي تأثير للدوران (الناشئ من العزم) مهما كان صغيراً. وما سيتم الوصول له بصورة رئيسية في هذا الفصل هو عبارة عن مجموعة من الإجراءات الحسابية و الهندسية لتحديد فيما إذا كانت عملية المسك تقع تحت تأثير قوى إغلاق أم لا. وسنبدأ هذا الفصل بدراسة نماذج التماس متبوعة بتحليل عمليات المسك عديمة الاحتكاك وعمليات المسك بوجود الاحتكاك.

3.1. نماذج التماسات:

سوف نفرض هنا أن جميع الأجسام هي أجسام صلبة، وسنعتمد على قانون كولوم[4] Coulomb في الاحتكاك لنمذجة التماس في حالة الاحتكاك. لنفرض أن القوة f مطبقة على نقطة ما كما في الشكل (3.2). فإذا لم هناك وجود للانزلاق عند نقطة التماس، فإن قانون كولوم Coulomb ينص على أن المركبة المماسية للقوة والمشار إليها بـ f_t، ستكون متعلقة بالمركبة الناظمية المشار إليها بـ f_n بالعلاقة التالية:

[4] ينص قانون كولوم في الاحتكاك الجاف على أن الاحتكاك في حالة الحركة ليس له علاقة بسرعة الانزلاق.

$$|f_t| \leq \mu |f_n| \qquad (3.1)$$



الشكل 3.2: المركبتين المماسية والناظمية للقوة المطبقة. لمنع حدوث الانزلاق، الزاوية β يجب أن لا تكون أكبر من الزاوية α.

حيث μ هو عامل الاحتكاك Coefficient of Friction. ومعامل الاحتكاك μ هو برامتر غير بعدي يتعلق بمادة سطحي التماس. وعندما يكون $\mu = 0$ فإن هذا يدل على عدم وجود تأثير للاحتكاك، ولكن أي قيمة أكبر من ذلك لـ μ تدل على وجود الاحتكاك وبازدياد هذه القيمة يزداد تأثير الاحتكاك. قيمة معامل الاحتكاك μ بصورة عامة من أجل بعض المواد تتراوح بين 0.1 و 1. وحادثة الانزلاق تحدث عندما يكون $|f_t| > \mu|f_n|$، حيث قوة الاحتكاك μf_n تتجه بعكس اتجاه الحركة.

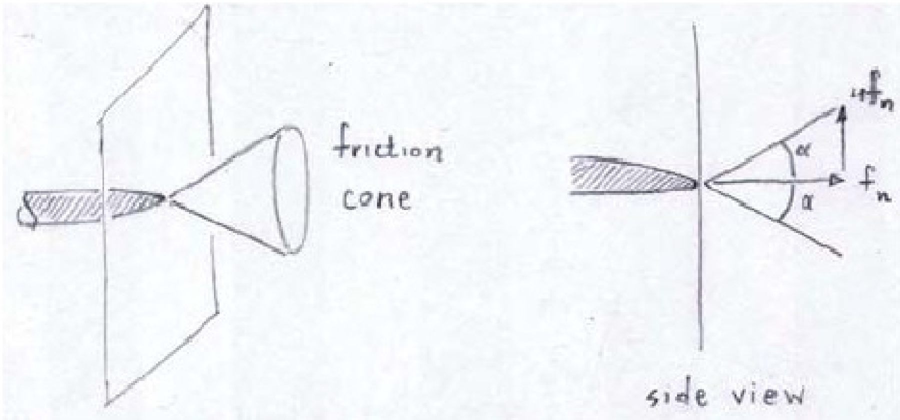
وهناك ظاهرة أخرى يجب أن تكون مألوفة تحدث حالما يبدأ الانزلاق، وهي أن قوة الاحتكاك المقاومة للحركة والتي تميل إلى التقليل من تأثير مقاومة الاحتكاك عادة ما تكون ذات قيمة أكبر قبل حدوث الانزلاق. وبأخذ هذا الاختلاف في الحسبان، فإنه أحياناً يستخدم معاملان للاحتكاك: معامل الاحتكاك الستاتيكي (السكوني) Static Friction Coefficient μ_s وذلك عندما يكون الجسم ثابتاً، ومعامل الاحتكاك الكينماتيكي (الحركي) Kinematic Friction Coefficient μ_k وذلك عندما يتحرك الجسم، حيث $\mu_k \leq \mu_s$.

إن الآلية التي تتم بها عملية الاحتكاك، والتي تتميز بطبيعة مايكروسكوبية، هي في غاية التعقيد ومن الصعب نمذجتها. وهناك نماذج مطورة لآلية الاحتكاك تأخذ في الحسبان عدة عوامل كسرعة الانزلاق، أو مدة البقاء في وضع التماس الستاتيكي قبل البدء بالانزلاق. وفي هذا الفصل لن نتطرق لهذه النماذج المطورة، وبدلاً من ذلك سنعمل على دراسة معامل احتكاك وحيد هو معامل الاحتكاك الستاتيكي ذي الرمز μ، والذي يفي بغرض الفصل هذا بشكل جيد من أجل المواد الصلبة والجافة والتي تشكل بشكل عام التكوين الأساسي للجسم الصلب.

إن شرط عدم الانزلاق $|f_t| \leq \mu|f_n|$ يمكن يلاحظ بشكل هندسي. بالعودة إلى الشكل (3.2)، فلمنع قيمة القوة المماسية f_t من الزيادة بحيث لا تتجاوز مقدار قوة الاحتكاك $\mu|f_n|$، فإن الزاوية β يجب أن تكون أكبر من الزاوية α. وبعبارة أخرى، يمكن القول أن القوة المطبقة يجب أن تكون واقعة ضمن مخروط زاويته 2α، حيث α تعطى بالعلاقة:

$$\alpha = \tan^{-1} \mu \qquad (3.2)$$

وبدلاً من تشخيص الاحتكاك بالاعتماد على معامل الاحتكاك μ، فإننا في هذا الفصل سوف نلجأ لتشخيص الاحتكاك عن طريق مخروط الاحتكاك. ومخروط الاحتكاك بالنسبة للجسم الصلب الفراغي (الفضائي) موضح بالشكل (3.3).



الشكل 3.3: مخروط الاحتكاك في حالة التماس النقطي للجسم الفضائي.

واعتماداً على ماسبق، نستطيع الآن شرح الثلاث نماذج الرئيسة للتماسات:

- **نقطة التماس عديمة الاحتكاك** وذلك عندما لا يكون هناك أي احتكاك بين طرف الأَصبع والجسم. وفي هذه الحالة يكون $\mu = 0$، والقوى يمكن أن تطبق فقط في اتجاه عمودي على سطح الجسم.
- وفي حالة **نقطة التماس مع وجود الاحتكاك**، فإن أية قوى تماس تقع ضمن مخروط الاحتكاك لن تتسبب في حدوث الانزلاق عند نقطة التماس. فإذا افترضنا أن المحور $\hat{z}$ لجملة المحاور الإحداثية المرجعية هو باتجاه الناظم على سطح التماس، فإنه يمكن التعبير عن قوة التماس في جملة المحاور هذه بـ $f = (f_x, f_y, f_z)$، ومخروط الاحتكاك في هذه الحالة يمكن التعبير عنه بالتالي:

$$\left\{f \in R^3 \middle| \sqrt{f_x^2 + f_y^2} < |\mu f_z|\right\} \qquad (3.3)$$

- في حالة نموذج **تماس الإصبع الناعم**، فليس المسموح فقط هو أن تطبق القوى ضمن مخروط الاحتكاك، وإنما أيضاً يسمح للعزوم أن تطبق حول ناظم سطح التماس. وهذا مشابه لحالة إصبع الإنسان، حيث إن سطح صغير من طرف الإصبع يكون في حالة تماس مع الجسم مما يسمح بتطبيق عزم τ حول ناظم سطح التماس. وبشكل مماثل لنموذج كولوم Coulomb للاحتكاك، فإن نموذجاً لعزم الاحتكاك يمكن أن يتم الحصول عليه باستخدام معامل الاحتكاك الالتوائي Torsional Friction Coefficient γ. وفي هذه الحالة فإن مخروط الاحتكاك يعبر عنه بالعلاقة:

$$\left\{f \in R^3 \text{ and } \tau \in R\text{: } \sqrt{f_x^2 + f_y^2} < \mu|f_z| \text{ and } |\tau| \leq \gamma\, |f_z|\right\} \qquad (3.4)$$

حيث $f = (f_x,f_y,f_z)$ معرفة في نفس جملة المحاور الإحداثية المستخدمة سابقاً. وعلى الرغم من أننا لن نتطرق لهذا النموذج للإصبع الناعم في هذا الفصل، لكننا ذكرناه هنا من إجل إكمال الموضوع.

3.2. المسك عديم الاحتكاك:

3.2.1. التوازن الستاتيكي وتأثير قوى الأغلاق:

لنفرض أن لدينا جسماً صلباً بحيث يكون على تماس مع عدد n من التماسات الثابتة عديمة الاحتكاك. فإذا تم تطبيق قوة ما على الجسم، فإن نقاط التماس سوف تبذل ردة فعل ما على الجسم. ولأن نقاط التماس هي عديمة الاحتكاك، فإن أي رد الفعل سوف يتم بذله باتجاه الناظم على سطح الجسم (وهنا لا حاجة للقول بأن القوة المتولدة هي قوة دفع، لأن قوة السحب غير مسموحة).

ويمكننا القول بشكل أدق أنه إذ اخترنا جملة محاور إحداثية مثبتة في جسم ما، واعتبرنا أن القوة $f_{ext} \in R^3$ والعزم $m_{ext} \in R^3$ هما عبارة عن القوة واالعزم الخارجي المطبقان على الجسم بالترتيب. وإذا اعتبرنا أن $r_i \in R^3$ تشير إل الشعاع من مبدأ جملة المحاور الإحداثية الثابتة إلى التماس i. وأيضاً إذا اعتبرنا أن $\hat{n}_I \in R^3$ هو عبارة عن شعاع الواحدة للناظم على السطح والذي يشير إلى اتجاه القوى التي يتم تطبيقها على التماس i، حيث $i=1,..., n$، فإن كل قوة f_i يمكن التعبير عنها بالشكل $f_i = x_i\hat{n}_i$، حيث x_i هو عدد غير سالب يصف مقدار القوة المطبقة على التماس i. بالتالي فإن الجسم الصلب يكون تحت تأثير قوى إغلاق إذا كانت هناك مجموعة من قوى التماس الناظمية تحقق التوازن الستاتيكي. أي أنه يجب أن يكون هناك عدد n من مقادير القوى (غير السالبة) $x_1,\dots,x_2$ بحيث يتم تحقيق معادلات التوازن التالية:

$$f_{ext} + \sum_{i=1}^{n} x_i\hat{n}_i = 0 \qquad (3.5)$$

$$m_{ext} + \sum_{i=1}^{n} x_i(r_i \times \hat{n}_i) = 0 \qquad (3.6)$$

وهذه المعادلات يجب أن تتحقق من أجل أية قوى وعزوم خارجية f_{ext} و m_{ext}. فإذا كان هناك مثل مجموعة قوى التماس تلك، فإن الجسم يمكنه بالتالي تحمل أية قوى وعزوم خارجية، وسيكون في حالة توازن ستاتيكي.

وإذا كان الجسم مقيداً بشكل كامل بحيث يكون غير قادراً على الحركة بوساطة نقاط التماس وبغض النظر عن قوى التماس، حينها يمكننا القول أن الجسم يقع في حالة إغلاق Form Closure. وكل عملية مسك تكون واقعة في حالة إغلاق هي في الحقيقة واقعة أيضاً تحت تأثير قوى إغلاق Force Closure، ولكن بالمقابل، فإن عملية المسك الواقعة تحت تاثير قوى إغلاق ليست بالضرورة أن تكون واقعة في حالة إغلاق. وسنرى لاحقاً أنه من أجل عمليات المسك، حيث تكون جميع نقاط التلامس غير احتكاكية، والتي تكون واقعة تحت تأثير قوى إغلاق يمكن لها أن تكون واقعة في حالة إغلاق.

3.2.2. مثال توضيحي لحالة مستوية:

إلى الآن قمنا بتحديد خصائص التوصيف الرياضي لحالة تأثير قوى الإغلاق دون وجود الاحتكاك اعتماداً على معادلات التوازن الستايكي للقوى والعزوم، ولكن دون أن نتطرق إلى الإجراء الحسابي من أجل تحديد فيما لو كانت عملية المسك بدون وجود الاحتكاك واقعة تحت تأثير قوى إغلاق أو لا. وكخطوة وسيطة تمكننا من الوصول إلى صيغة أو إجراء عام، فلنحاول أن نحدد فيما إذا كان الجسم المستطيل المستوي المبين بالشكل (3.4) ،والواقع ضمن أربع نقاط تماس عديمة الاحتكاك، خاضع لعملية مسك تحت تأثير قوى إغلاق. باختيار جملة محاور إحداثية ثابتة كماهو مبين في الشكل، فإنه يمكن لمركبات كل قوة رد فعل عند نقطة التماس $f_i \in R^2$, i=1,…,4، أن تكتب بالشكل التالي:

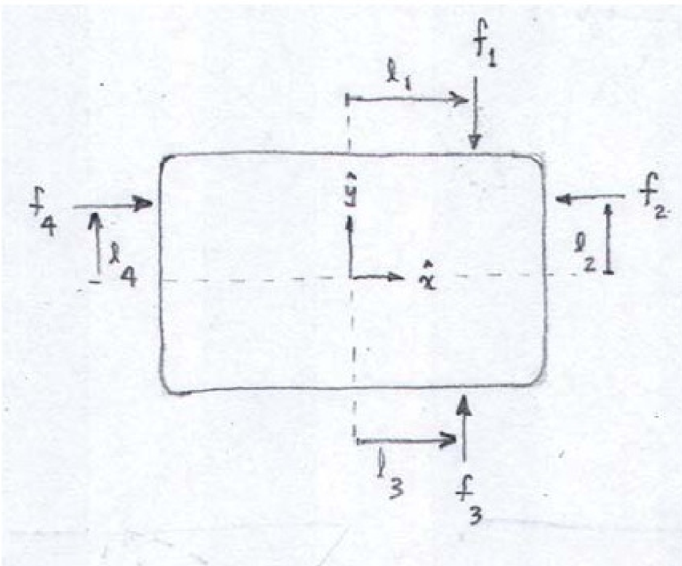
$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_1,\ \ f_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2,\ \ f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ \ f_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 \qquad (3.7)$$

حيث $x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4$ هي قيم غير سالبة وذلك لأن قوة الدفع هي فقط التي يتم تطبيقها. والقوى الناتجة المطبقة على الجسم هي بالتالي:

$$\sum_{i=1}^{4} f_i = \begin{bmatrix} x_4 - x_2 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

في حين أن العزم الناتج المطبق على الجسم هو:

$$\sum_{i=1}^{4} r_i \times f_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_1 l_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 l_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_4 l_4 \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$



الشكل 3.4: جسم صلب على شكل مستطيل مقيد بوساطة أربع نقاط تماس عديمة الاحتكاك.

وبسبب كون المركبة على المحور z لشعاع العزم الناتج هي المركبة الوحيدة الغير معدومة، فإننا من الآن وصاعداً سوف نكتب معادلات العزوم بالنسبة لحالات المسك المستوية على شكل معادلة عددية.

والآن، لكي يكون الجسم الصلب تحت تأثير قوى إغلاق، فإن محصلة القوى والعزوم الناتجة يجب أن تقاوم أي قوة أو عزم خارجي مطبق على الجسم. وهذا يعني أنه يجب أن يكون هناك قيم عددية غير سالبة $x_1,\ldots,x_4 \geq 0$ بحيث محصلة هذه القوى في المعادلة (3.8) تفني أي قوة خارجية مطبقة $f_e \in R^2$. والعزم المحصل الناتج في المعادلة (3.9) أيضاً يفني أي عزم خارجي مطبق $m_e \in R$. وبتعريف الشعاع b حيث $b = (-f_e,-m_e) \in R^3$، فإن إحداثيات القوى التي تسبب تأثير الأغلاق يمكن أن تكتب بشكل خطي من النمط $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & l_2 & l_3 & -l_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

فإذا كان الحل الغيرالسالب $x \in R^4$ موجوداً لجميع قيم $b \in R^3$، عندها يمكننا القول أن المسك يقع تحت تأثير قوى إغلاق.

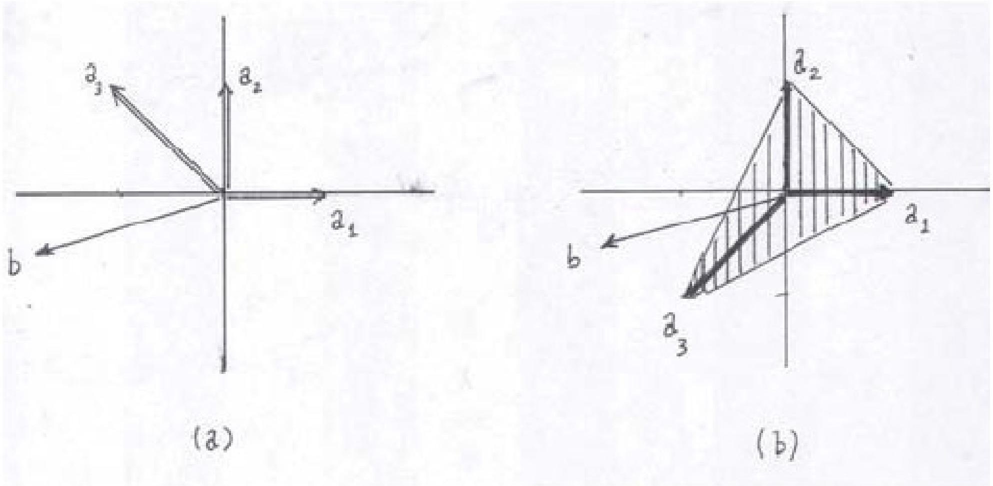
ويمكن بدلاً من إيجاد قيمة $x \geq 0$، فإنه بكل بساطة يمكن تحديد فيما إذا الحل للمعادلة $Ax = b$ موجوداً من أجل جميع قيم b، حيث يكفي أن نتحقق من أن جميع أعمدة المصفوفة A تشمل كامل المجال R^3، أو بصورة مكافئة، أن نتحقق أن المصفوفة A تمتلك الرتبة الأعظمية (في هذه الحالة هي 3). وعلى كل حال فإن السؤال المتعلق بوجود مجموعة الحلول يصبح أقل سهولة عندما يكون قيد عدم السلبية $x \geq 0$ مفروضاً.

وبغية إيجاد الجواب للسؤال حول إمكانية وجود مجموعة الحلول، لنفترض أن لدينا نفس المسألة لكن بشكل أخفض من حيث مرتبة الأبعاد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

حيث $A \in R^{2\times 3}$ و $x \in R^3$ و $b \in R^2$. وبتسمية الأعمدة الثلاثة للمصفوفة A بـ $a_1,a_2,a_3 \in R^2$، فإن المعادلة (3.11) يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \qquad (3.12)$$



الشكل 3.5: مثال مبسط: (a) من أجل b المعطاة في هذا الشكل، فإنه ليس هناك وجود لحل غير سالب $x \in R^3$، (b) يوجد حل غير سالب $x \in R^3$ موجود من أجل أي $b \in R^2$.

فإذا أفترضنا الشعاع b كما هو مبين في الشكل (3.5 (a))، فمن الواضح لنا أنه ليس هناك حل غير سالب $x \in R^3$ موجود، حيث أن الشعاع b يقع خارج الحيز المحصور بين التراكيب الخطية غير السالبة للأعمدة $\{a_1,a_2,a_3\}$ (نعني بالتركيبة الخطية غير السالبة أن جميع أوزان x_i في المعادلة (3.12) ليست سالبة). ولكن من جهة أخرى، إذا قمنا باستبدال العمود الثالث في المصفوفة a_3 ووضعنا بدلاً منه (1-,1-) (انظر الشكل (3.5 (b)))، فمن الواضح أن مجموعة التراكيب الخطية غير السالبة لـ $\{a_1,a_2,a_3\}$ هي فعلاً تشغل كامل المجال R^2. في هذه الحالة، فإنه من الممكن دائماً أن نجد من أجل جميع $b \in R^2$ حلاً غير سالباً $x \geq 0$ بحيث تتحقق المعادلة Ax=b.

وهناك طريقة هندسية أخرى من أجل تشخيص هذا الشرط عن طريق مثلث رؤوسه تعطى من خلال الأعمدة $\{a_1,a_2,a_3\}$ (انظر الشكل (3.5)). حيث ليس من الصعب أن نستنتج أن الحل الغير السالب المعطى بـ $x \in R^2$ موجود إذا وفقط إذا كان مبدأ الأحداثيات يقع ضمن المثلث (ويجب أن ننتبه أنه يجب أن يقع داخل المثلث وليس على محيطه).

بالعودة إلى مثالنا الأصلي الذي يدور حول الجسم مستطيل الشكل، وبالقياس نسبة للسابق، يمكننا أن نخمن منطقياً أنه وفقاً لعملية المسك في الشكل (3.4) فإن هذا المسك يمكن عده أنه واقع تحت تأثير قوى إغلاق إذا كانت التراكيب الخطية الغير سالبة لأعمدة المصفوفة $A \in R^{3\times4}$ في المعادلة (3.10) تشمل كامل الحيز الفراغي R^3. وبشكل مكافئ يمكن القول، أن رباعي الوجوه Tetrahedron في المجال R^3 والذي رؤوسه معطاة بأعمدة المصفوفة A يجب أن يضم بشكل كامل مبدأ المحاور الإحداثية، أي أن مبدأ الإحداثيات يجب أن يقع داخل رباعي الوجوه. وواحدة من أهم النتائج التي يمكن أن نستخلصها من هذا التشخيص أنه يلزمنا على الأقل أربع نقاط تلامس عديمة الاحتكاك من أجل دراسة الحالة المستوية لتأثير قوى الإغلاق.

وبالمتابعة في نفس المثال للجسم المستطيل السابق، ففي حال كون الأبعاد $l_1,\ldots,l_4$ موجبة، فإنه بإمكاننا أن نرسم رباعي الوجوه المتشكل من أعمدة المصفوفة A وأن نتحقق أن مبدأ الإحداثيات

يقع فعلاً في داخله. وإذا كانت الأبعاد السابقة مساوية للصفر، عندها فإن المصفوفة A ستكون في هذه الحالة:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

وهنا نلاحظ أن رباعي الوجوه السابق، ينقلب إلى مضلع مستوٍ محدد بالقمم التالية { ,(1,0) (0,1), (-1,0), (0,-1)}. وبسبب أن رباعي الوجوه لم يعد ثلاثي الأبعاد، فإنه لا يمكن عد مركز الإحداثيات واقعاً ضمنه. والمعنى الفيزيائي لذلك، أن الجسم سوف يكون غير قادراً على مقاومة أي عزم مطبق على الجسم.

3.2.3. اختبار الغلاف المحدب Convex Hull لتأثير قوى الإغلاق:

رأينا في الفقرة السابقة أنه من أجل الأجسام الصلبة في الحالة المستوية، فإنه يلزمنا على الأقل أربع نقاط تماس عديمة الاحتكاك من أجل الوصول بالجسم لحالة يمكن أن نقول خلالها أنه واقع تحت تأثير قوى إغلاق. ولنقم الآن بصياغة الشرط الذي يتحقق فيه تأثير قوى الإغلاق وذلك من أجل الأجسام الصلبة في الحالة الفضائية بشكل عام. إن الجواب على السؤال فيما إذا كانت عملية المسك تقع تحت تأثير قوى إغلاق يمكن يتحول إلى مسألة معادلة خطية $Ax = b$، وذلك من أجل أية قيمة لـ b. ولهذا الصدد، سو نبدأ ببعض النتائج المتعلقة بهذا السؤال. فإذا كانت لدينا المعادلة $Ax = b$ حيث يكون فيها $x \in R^n$ و $A \in R^{m\times n}$ حيث $m < n$ و $b \in R^m$. فإن السؤال الدقيق الذي نريد البحث عن جوابه هو: ماهي الشروط التي يجب على المصفوفة A أن تحققها بحيث يكون هناك حلولاً غير سالبة من أجل أي قيمة لـ b.

والجواب على هذا السؤال هو أن التراكيب الخطيبة غير السالبة الناشئة من أعمدة المصفوفة A يجب أن تشمل كامل الحيز R^m. وذلك من أجل أي قيمة لـ $b \in R^m$، أي أنه يجب أن يكون هناك أوزان عددية غير سالبة $x_1,x_2,\ldots,x_n \geq 0$ بحيث يكون:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (3.14)$$

حيث أن كل $a_i \in R^m, i = 1,\ldots,n$، تشير إلى العمود ذي الرقم i من المصفوفة A. ولن نقوم برهان رياضي دقيق لهذه النتيجة، ولكن يمكننا أن نرى بكل وضوح أن النتائج التي حصلنا عليها سابقاً في الحالة المستوية يمكن أن تقودنا إلى هذه النتيجة مباشرة. وأيضاً، وكما في المثال في الحالة المستوية، فإن الجواب للسؤال المطروح يمكن أن يشخص بشكل هندسي عن طريق معرفة إذا كان مبدأ الإحداثيات يقع داخل متعدد وجوه Polyhedron في الحيز R^n.

ولإقرار هذا الشرط الهندسي المكافئ وبشكل دقيق، سوف نحتاج أولاً لتعريف مفهوم الغلاف المحدب Convex Hull. فإذا كان لدينا مجموعة S مكونة من n شعاعاً في المجال R^m بحيث:

$$S = \{a_1, \ldots, a_n\}, \quad a_i \in R^m, i = 1, \ldots, n \qquad (3.15)$$

فإن الغلاف المحدب للمجموعة S هو عبارة عن مجموعة من التركيبات المحدبة لـ $\{a_1,\ldots,a_n\}$، أي:

$$\text{Convex Hull of } S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} w_i a_i : \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i \geq 0 \text{ for all } i \right\} \qquad (3.16)$$

الشكل (3.6) يوضح الغلاف المحدب لمجموعات متنوعة من النقاط في المجال R^2. والمطلب الذي يتعلق بالتركيبات الخطية الغير السالبة لأعمدة المصفوفة A بحيث تشمل المجال R^m يمكن الآن إقراره بالشكل التالي: في مجال بعدي من المرتبة m، يجب أن تكون هناك كرة في المجال R^m بحيث يكون مركزها هو مبدأ الإحداثيات وتقع داخل الغلاف المحدب المتكون من أعمدة المصفوفة A.

لنعد الآن إلى السؤال الأساسي المطروح في بداية هذه الفقرة. ليكن لدينا جسماً صلباً في المجال R^3 مقيد عن طريق عدد n من نقاط التماس عديمة الاحتكاك. وليكن $r_i \in R^3$ يدل على الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور إلى لنقطة التماس i، ومعبراً عنه في جملة المحاور الإحداثية الثابتة، وليكن لدينا $\hat{n}_I \in R^3$ يشير إلى الشعاع الناظم على سطح الجسم في نقطة التماس i، ويكون متجهاً نحو داخل الجسم. وبافتراض أن الجسم واقع في حالة توازن ستاتيكي، وأنه واقع تحت تأثير قوة خارجية ما $m_{ext} \in R^3$ و عزم خارجي ما $f_{ext} \in R^2$ بحيث ينتج منهما مجموعة من قوى التماس عند كل نقطة تماس، ولتكن $f_i \in R^3$ تشير قوة التماس عند التماس i، وبسبب أن نقطة التماس يمكن أن يتولد فيها قوى بحيث تكون متجهة فقط إلى داخل الجسم، فإن كل f_i يمكن كتابتها بالشكل:

$$f_i = \hat{n}_i x_i \qquad (3.17)$$

حيث كل $x_i \geq 0$ هو مقدار عددي غير سالب. ومعادلة التوازن الستاتيكي (3.5) و (3.6) يمكن كتابتها بالتالي بالشكل:

$$\begin{bmatrix} n_1 & \cdots & n_n \\ r_1 \times n_1 & \cdots & r_n \times n_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_e \\ -m_e \end{bmatrix} \qquad (3.18)$$

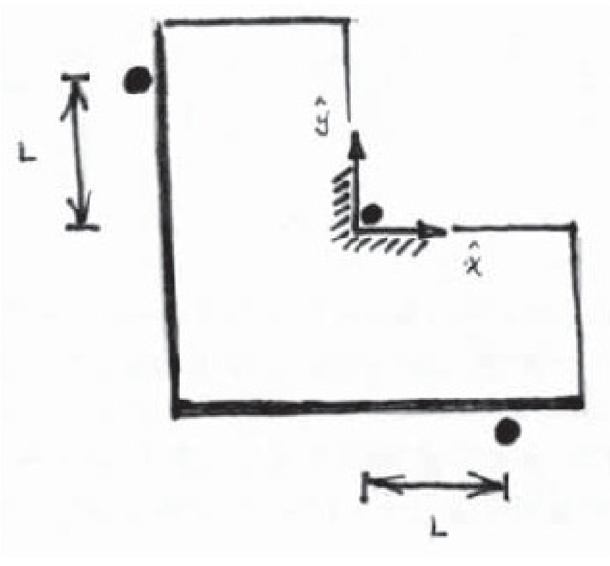
الشكل 3.6: الغلاف المحدب لمجموعات من النقاط في المجال R^2.

المعادلات في الأعلى هي من النمط $Ax = b$، حيث $A \in R^{6\times n}$ و $x \in R^n$ و $b \in R^6$. وعملية المسك تكون واقعة تحت تأثير قوى إغلاق إذا كانت هناك من أجل أي قيمة لـ b قيم غير سالبة لـ $x \in R^n$ بحيث تحقق المعادلة $Ax = b$. وبشكل هندسي، يمكن القول أن عملية المسك واقعة تحت تأثير قوى إغلاق إذا وفقط إذا كانت هناك كرة موجودة في المجال البعدي من المرتبة السادسة بحيث يكون مركزها مبدأ الإحداثيات وتكون واقعة داخل الغلاف المحدب المتشكل من أعمدة المصفوفة A. وكلا الحالتين تعدان شرطاً ضرورورياً وكافياً من أجل حالة التأثير بقوى الإغلاق. وكنتيجة مباشرة لهذا التشخيص الهندسي في حالة الأجسام الصلبة الفضائية ، فإنه يلزمنا على الأقل سبعة نقاط تلامس غير احتكاكية (أي $n = 7$) حتى نتسطيع أن نقول أن المسك يمكن أن يقع تحت تأثير قوى إغلاق.

ومن الواضح أنه ليس أمراً سهلاً أن نرى فيما إذا كانت الكرة تقع داخل الغلاف المحدب أو لا حتى في حال كون $n = 3$، فيكف إذا كانت $n = 6$. في الفقرة التالية سوف نناقش الإجراء الحسابي من أجل ذلك.

3.2.4. الاختبار الحسابي لحالة تأثير قوى الإغلاق:

كما هو ملاحظ من السابق، فإن الاختبار الرياضي من أجل تحديد حالة تأثير قوى الإغلاق يمكن أن يتحول إلى سؤال عن الجبر الخطي فيما إذا كان هناك من أجل أي قيمة لـ $b \in R^m$، حل غير سالب حيث $x \geq 0, x \in R^n$، للمعادلة الخطية $Ax = b$، حيث $A \in R^{m\times n}, m \leq n$. ففي الحالة التي يكون فيها $n = m+1$ على سبيل المثال، كحالة الجسم المستطيل المستوي مثلاً، يمكن أن نجد أن $m = 3$ في حين أن عدد التماسات هو $n = 4$، ومن أجل الوصول إلى الحل لهذه الحالة، فإن الحذف على طريقة غاوس – جوردان Gauss – Jordan (اختزال Gauss – Jordan) سيكون مفيداً، وهي طريقة واسعة الانتشار من أجل إيجاد الحلول للمعادلات الخطية من النمط $Ax = b$ بدون وجود أية قيود على x.



الشكل 3.7: جسم متسوٍ مقيد بثلاثة نقاط تماس عديمة الاحتكاك.

وسنقوم بتوضيح طريقة الاختزال التي اعتمدها غاوس – جوردان Gauss – Jordan عن طريق مثال. لنفترض أن لدينا عملية المسك الموضحة في الشكل (3.7) والتي فيها يكون الجسم الذي على شكل حرف L مقيداً بثلاثة نقاط تماس عديمة الاحتكاك. وسنقوم بتثبيت جملة محاور إحداثية كما هو مبين في الشكل عند الزاوية الداخلية للجسم. ويمكن أن نلاحظ أن نقطة التماس المتوضعة عند الزاوية الداخلية تستطيع أن تطبق قوى ردود أفعال في كلا الاتجاهين $\hat{x}$ و $\hat{y}$، ولنقم بتسمية ردود الأفعال هذه f_1 و f_2، وردود الأفعال بالنسبة للتماسين الآخرين هما f_3 و f_4. ووفقاً لجملة المحاور الإحداثية المثبتة المختارة يمكن أن نكتب:

$$f_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1, \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_2, \qquad f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3,$$
$$f_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \qquad (3.19)$$

حيث كل $x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,4$. وليكن لدينا $f_{ext} \in R^2$ للدلالة على القوة الخارجية، و $m_{ext} \in R$ للدلالة على العزم الخارجي. بالتالي فإن تأثير قوى الإغلاق يمكن أن يتم تحديده عن طريق البحث عن وجود حلول غير سالبة $x \in R^4$ للمعادلة الخطية التالية:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{ext,x} \\ -f_{ext,y} \\ -m_{ext,z} \end{bmatrix} \qquad (3.20)$$

وذلك من أجل أي قيم لـ $(f_{ext,x},\ f_{ext,y},\ m_{ext,z})$. وبإجراء بعض العمليات الأولية على عناصر صفوف وأعمدة المصفوفات في المعادلة أعلاه، فإن المعادلة يمكن اختزالها إلى أحد أنماط المصفوفات النموذجية echelon المعروفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{ext,x} \\ -f_{ext,y} \\ m_{ext,z}/L \end{bmatrix} \qquad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ext,x} + m_{ext,z}/L \\ f_{ext,y} \\ m_{ext,z}/L \end{bmatrix} \qquad (3.22$$

وللتذكير فإنه في طريقة اختزال غاوس جوردان Gauss – Jordan، فإن الأصفار تتوضع أعلى وأسفل القطر في المصفوفة، في حين أنه اختزال غاوس فقط فإن الأصفار تكون موجودة

فقط أسفل القطر وليس في أعلاه (ويمكن العودة إلى أي مرجع في الجبر الخطي من أجل تفاصيل أكثر عن هاتين الخوارزميتين). إن المصفوفة A تم تحويليها بالاختزل إلى نمط نموذجي معروف ولكنها تبقى تعطي نفس الحلول. أي أن أي حل للمعادلة (3.20) هو نفسه يعتبر حلاً للمعادلة (3.22)، والعكس بالعكس. والعمود الرابع في المصفوفة المختزلة جميع عناصرها تمتلك قيماً سالبة، والذي يضمن أن الحلول غير السالبة $x \geq 0$ سوف تكون موجودة من أجل أي قيم معطاة للقوى و العزوم الخارجية. الأمر الذي يجعلنا نقر من ناحية أخرى، أن التراكيب الخطية غير السالبة للعمود الرابع من المصفوفة المختزلة سوف تشمل المجال R^3، ولهذا يمكننا الجزم أن عملية المسك تتم تحت تأثير قوى إغلاق.

في المثال السابق، المصفوفة $A \in R^{m\times n}$ كانت أبعادها هي $m = 3$ و $n = 4$. ونلاحظ أنه في حال كانت $n > m+1$، فإن الأمور تبدو حينها أكثر تعقيداً. لنفترض أن المصفوفة $A \in R^{m\times n}$ بحيث يكون $n > m+1$، هي عبارة عن مصفوفة من المرتبة m، ويمكن اختزالها إلى شكل من أشكال المصفوفات النموذجية عن طريق اختزل غاوس – جوردان Gauss – Jordan:

$$[I \quad S] \qquad (3.23)$$

حيث $I \in R^{m\times m}$ هي المصفوفة الواحدية $m\times m$، و $S \in R^{m\times(n-m)}$. وفي هذه الحالة، فإن المسك يمكن أن يكون واقعاً تحت تأثير قوة إغلاق إذا كان هناك وجود لتركيبات خطية موجبة من أعمدة المصفوفة S بحيث تكون جميعا عناصرها سالبة القيمة. أي أنه إذا وجد $\omega \geq 0$, $\omega \in R^{n-m}$ حيث $v = S\omega$ تكون جميع عناصره سالبة، عندها يمكن القول أن المسك يتم تحت تأثير قوى إغلاق.

واستناداً إلى السابق، فإن إحدى الطرق لتحديد فيما إذا كان المسك يتم تحت تأثير قوى إغلاق هو تحويل المسألة لمسألة الحل الأمثل:

$$\min_{\omega,\mu} \mu \qquad (3.24)$$

والمتعلقة بالمقيدات الخطية الغير متساوية $\omega \geq 0$ و $S\omega < \mu.1$، حيث 1 هي المصفوفة ذات البعد m والتي كل عناصرها مساوية للـ 1. وبسبب كون التابع الهدف (أي التابع الذي تتم دراسته وفي حالتنا هو μ) والمقيدات هي عبارة عن توابع خطية، فإن المسألة هنا والمتعلقة بإيجاد الحل الأمثل تدعى بمسألة برمجة خطية. وتفاصيل هذا النوع من المسائل هو خارج نطاق هذا الكتاب.

وبهذا نكون قد حددنا الإجراء الحسابي من أجل تحديد فيما إذا كانت عملية المسك من دون احتكاك واقعة تحت تأثير قوى إغلاق أم لا.

الخوارزمية الحسابية لدراسة تأثير قوى الإغلاق في الحالة الفضائية:

- **المعطيات**: لدينا جسم صلب في الحالة الفضائية (الفراغية) مقيد بـ n نقطة تماس عديمة الاحتكاك، حيث $n \geq 7$، نختار جملة محاور إحداثية مرجعية، ولتكن $r_i \in R^3$ هي الشعاع من مبدأ الإحداثيات في الجملة الثابتة إلى نقطة التماس i حيث $i = 1,\ldots,n$.

- **التهيئة**: ليكن $\hat{n}_I \in R^3$ هو الشعاع الناظم على سطح الجسم عند التماس i بحيث يكون متجهاً نحو داخل الجسم. وبالتالي نستطيع الآن إنشاء المصفوفة $A \in R^{6\times n}$ التالية:

$$A = \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \cdots & \hat{n}_n \\ r_1 \times \hat{n}_1 & \cdots & r_n \times \hat{n}_n \end{bmatrix} \qquad (3.25)$$

- **اختبار تأثير قوى الإغلاق**: إذا كانت رتبة المصفوفة A أقل من ستة، فإن المسك ليس واقعاً تحت تأثير قوى إغلاق. وإلا، فسنقوم بتحويل المصفوفة A إلى المصفوفة النموذجية المختزلة التالية:

$$A \to [I \quad S] \qquad (3.26)$$

حيث I هي المصفوفة الواحدية ذات البعد m×m و $S \in R^{6\times(n-6)}$.

- نقوم بحل مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\min_{\omega,\mu} \mu \qquad (3.27)$$

المتعلقة بـ $\mu \geq \mu_{min}$ و $\omega > 0$ و $S\omega < \mu.1$، حيث μ_{min} هي عبارة عن نهاية التابع التخمينية عندما تقترب μ إلى الصفر، و 1 هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها مساوية للواحد. إذا كان الحل الأمثل لـ μ أقل من الصفر، حينها نقول أن عملية المسك تتم تحت تأثير قوى إغلاق. وإذا كان الحل الأمثل لـ μ أكبر أو يساوي الصفر، عندها فإن عملية المسك لا تتم تحت تأثير قوى إغلاق.

3.2.5. حالة الإغلاق من أجل عمليات المسك عديمة الاحتكاك:

في هذه الفقرة سنرى أن عمليات المسك التي تقع تحت تأثير قوى إغلاق يمكن أن تشكل أيضاً حالة إغلاق. ويجب أن نتذكر أن المسك يكون في حالة إغلاق إذا كان تموضع نقاط التماس يجعل أي حركة محتملة للجسم مستحيلة. ولأن كل نقطة تماس تقيد بعض الحركات الممكنة للجسم، فمن إحدى الطرق لتحليل حالة الإغلاق، هي أن نقوم بتحديد مجموعة السرعات الخطية والزاوية للجسم والتي تتغلب على قيد السرعة المفروض من قبل التماسات. فإذا كانت هذه المجموعة من السرعات الخطية والزاوية هي المجموعة الصفرية، حينها يمكن القول أن الجسم ثابت وبالتالي يقع في حالة إغلاق.

سوف نخوض أولاً في تفاصيل الدراسة بالنسبة لعمليات المسك المستوية. فليكن لدينا جسم مستوٍ واقع في المستوي x-y وخاضع لمجموعة من نقاط التماس عديمة الاحتكاك عددها n، لنقم باختيار جملة محاور إحداثية مرجعية مثبة في الجسم، ولتكن $r_i = (x_i,y_i,0)$ تشير إلى إحداثيات نقطة التماس i. ولتكن $\hat{n}_i = (n_{i,x},n_{i,y},0)$ تشير إلى الشعاع الناظم على سطح الجسم عند التماس i والمتجه إلى داخل الجسم. ولنفترض أن جملة المحاور الإحداثية المثبتة في الجسم تخضع لسرعة خطية $v = (v_x,v_y,0)$ ولسرعة زاوية $\omega = (0,0,\omega_z)$. بالتالي فإن سرعة الجسم عند التماس i والمشار إليها بـ v_i سوف تعطى بـ $v_i = v+\omega\times r_i$، أو يمكن القول:

$$\begin{bmatrix} v_{i,x} \\ v_{i,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x - r_{i,y}\omega_z \\ v_y + r_{i,x}\omega_z \end{bmatrix} \qquad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} v_{i,x} \\ v_{i,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r_{i,y} \\ 0 & 1 & r_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (3.29)$$

والقيد على سرعة الجسم الخطية والزاوية والمفروض من قبل التماس i يعطى بالعلاقة:

$$v_i^T \hat{n}_i \geq 0 \qquad (3.30)$$

والذي يمكن أن يكتب بالشكل أيضاً:

$$\begin{bmatrix} n_{i,x} & n_{i,y} & r_{i,x}n_{i,y} - r_{i,y}n_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_x \\ \vartheta_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (3.31)$$

ونحن لدينا n قيد من النمط $a_i^T x \geq 0$ حيث $a_i \in R^3$ معطى لنا، و $x \in R^3$ يجب أن يتم تحديدها. ونلاحظ أن مثل هذه القيود تحدد لنا نصف الفراغ في المجال R^3 والمحدد بالمستوي $a_i^T x = 0$. وحتى يكون الجسم في حالة إغلاق، فإن جملة الحلول x بالنسبة لكل قيد يجب أن تساوي بشكل منفرد القيمة $x = 0$. وليكون هذا محققاً: (i) فإن n يجب أن تكون على الأقل مساوية لـ 4 أو أكثر، (ii) الأشعة $a_i \in R^3$ يجب أن تشمل الفراغ الموجب لكامل R^3 (ويمكن أن نقنع أنفسنا بشكل هندسي بهذه الحقيقة عن طريق تخيل ماذا يمكن أن يحدث إذا كانت a_i لم تشمل الحيز الموجب من R^3).

لنقم الآن بمقارنة هذه النتيجة مع معادلات التوازن الستاتيكي التعلقة بتأثير قوى الأغلاق. حيث قوى التماس f_i يمكن أن يعبر عنها بالشكل $f_i = x_i \hat{n}_i$، ومعادلات تأثير قوى الإغلاق في الحالة المستوية تصبح بالنتيجة:

$$\begin{bmatrix} n_{1,x} & \cdots & n_{n,x} \\ n_{1,y} & \cdots & n_{n,y} \\ r_{1,x}n_{1,y} - r_{1,y}n_{1,x} & \cdots & r_{n,x}n_{n,y} - r_{n,y}n_{n,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad (3.32)$$

إن الحل الغير السالب $x \in R^n$ للمعادلة أعلاه يجب أن يكون موجوداً لأي قيمة لـ $b \in R^3$. وهنا نلاحظ أن أعمدة المصفوفة متطابقة مع صفوف الأشعة في المعادلة (3.31). وإذا تذكرنا أيضاً شرط تأثير قوى الإغلاق - بحيث تكون أعمدة المصفوفة A تشمل بشكل موجب كامل المجال R^3- فنلاحظ أنه مماثل تماماً لشرط حالة الإغلاق التي ندرسها.

تفاصيل الدراسة من أجل حالة الإغلاق في الحالة الفضائية لعمليات المسك يمكن أن تتم عن طريق تعميم الاستنتاج السابق للحالة المستوية إلى الحالة الفضائية. وهنا سنلاحظ أن معادلات حالة الإغلاق مرتبطة تماماً بمعادلات تأثير قوى الإغلاق، ولهذا فإنه سليزم على الأقل سبعة

نقاط تماس غير احتكاكية من أجل الحصول على حالة إغلاق أو الوقوع تحت تأثير حالة إغلاق من أجل الأجسام الفضائية.

3.3. المسك بوجود الاحتكاك:

3.3.1. مثال توضيحي لحالة مستوية:

الآن سوف نقوم بدراسة عمليات المسك بالأخذ بالاعتبار وجود تأثير الاحتكاك. ولتوضيح الفكرة، لنفترض بداية أنه لدينا جسم مستوٍ مستطيل الشكل كما هو مبين في الشكل (3.8 (a))، بحيث يكون هذا الجسم مقيداً من جانبيه الشاقوليين عن طريق نقطتي تماس مع وجود لتأثير الاحتكاك. ولنتذكر من خلال مناقشتنا فيما مضى لنماذج التماسات أن عامل الاحتكاك Friction Coefficient عند نقطة التماس يمكن أن يتم تشخيصه بشكل هندسي بواسطة مخروط الاحتكاك Friction Cone، حيث أن الزاوية الداخلية للمخروط، والمشار إليها بـ 2α، متعلقة بعامل الاحتكاك μ من خلال العلاقة $\mu = \tan \alpha$. وليكن لدينا $e_1,e_2 \in R^2$ بحيث يمكن تعريفهما على أنهما الشعاعين اللذين اتجاههما ينطبق تماماً على حافتي مخروط الاحتكاك اليساري، ولنعرف $e_3,e_4 \in R^2$ بنفس الطريقة من أجل مخروط الاحتكاك اليميني. وباعتماد جملة محاور إحداثية مرجعية مثبتة في مركز الجسم كماهو موضح بالشكل، فإن اتجاهات e_i يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

الشكل 3.8: (a) جسم صلب مستوٍ مقيد بنقطتي تماس مع وجود الاحتكاك (b) مخطط تحليل القوى.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mu \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\mu \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ \mu \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

وبفرض أن قوتي التماس عند نقطتي التماس والمشار إليهما بـ f_a و f_b على الترتيب، تتوضعان داخل مخاريط الاحتكاك الخاصة بكل منهما، وبالتالي فإن f_a و f_b يمكن كتابتهما بالشكل:

$$f_a = e_1 x_1 + e_2 x_2 \qquad (3.34)$$

$$f_b = e_3 x_3 + e_4 x_4 \qquad (3.35)$$

حيث $x_1,\ldots,x_4 \geq 0$. وشرط حدوث تأثير قوى الإغلاق الآن يتبع لمعادلات التوازن الستاتيكي، فمن أجل أية قوة خارجية $f_e \in R^2$ و عزم خارجي $m_2 \in R$، فإنه يجب أن يكون هناك قوى تماس f_a و f_b بحيث يكون:

$$f_a + f_b = -f_e$$

$$m_a + m_b = -m_e$$

وهذه المعادلات يمكن أن تكتب على شكل $Ax = b$ كالتالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \mu & -\mu & -\mu & \mu \\ -\mu r & \mu r & -\mu r & \mu r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_e \\ -m_e \end{bmatrix} \qquad (3.36)$$

وشرط تأثير قوى الإغلاق يتطلب أنه من أجل أية قيمة لـ $b \in R^3$ كما هو معطى في الأعلى، يجب أن يكون هناك حلاً $x \in R^4$ بحيث تتحقق المعادلة $Ax = b$.

3.3.2. اختبار الغلاف المحدب Convex Hull لتأثير قوى الإغلاق في الحالة المستوية:

ينبغي على القارئ هنا أن يكون قادراً على استخلاص أن اختبار الغلاف المحدب الذي تمت دراسته فيما مضى يمكن له أن يطبق هنا أيضاً. وبشكل أعم أكثر، فإن تحديد فيما إذا كانت عملية المسك تقع تحت تأثير قوى إغلاق يمكن أن تختصر في نهاية الأمر إلى نفس السؤال الذي يدور حول وجود حلول غير سالبة $x \geq 0$ للمعادلة $Ax = b$ وذلك من أجل أي قيمة لـ b.

وسوف نقدم فيما يلي طريقة إجراء اختبار الغلاف المحدب لتحديد تأثير قوى الإغلاق في الحالة المستوية في عمليات المسك بوجود الاحتكاك.

خوارزمية اختبار الغلاف المحدب من أجل تقيم تأثير قوى الإغلاق في الحالة المستوية:

- **المعطيات:** ليكن لدينا جسم صلب في الحالة المستوية مقيد بـ n نقطة تماس مع وجود تأثير الاحتكاك، ولنقم باختيار جملة محاور إحداثية بحيث تكون مثبتة في الجسم، ولتكن $r_i = (r_{ix},r_{iy}) \in R^2$ وهي الشعاع الممتد من مبدأ الإحداثيات لجملة المحاور المثبت إلى نقطة التماس i حيث $i = 1,\ldots,n$. وليكن $e_{2i-1} = (e_{(2i-1)x},e_{(2i-1)y}) \in R^2$ وليكن لدينا أيضاً $e_{2i} = (e_{2ix},e_{2iy}) \in R^2$ وهما بالترتيب الاتجاهات على طول الحافتين لكل مخروط عند نقطة التماس $i=1,\ldots,n$.

- **إنشاء المصفوفة A:** لنقم بتعريف المصفوفة A بالشكل التالي:

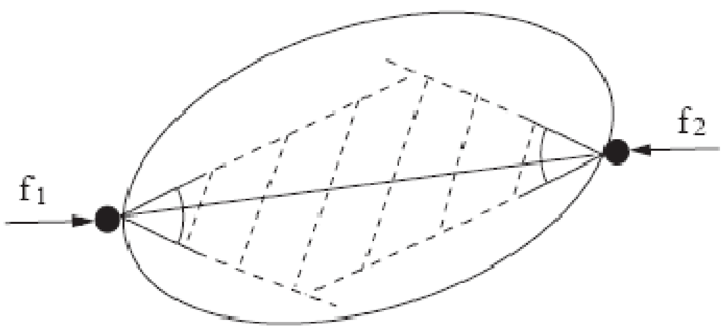
$$A = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & \cdots & \cdots & e_{(n-1)x} & e_{nx} \\ e_{1y} & e_{2y} & \cdots & \cdots & e_{(n-1)y} & e_{ny} \\ r_{1x}e_{1y} - r_{1y}e_{1x} & r_{1x}e_{2y} - r_{1y}e_{2x} & \cdots & \cdots & r_{nx}e_{(n-1)y} - r_{ny}e_{(n-1)x} & r_{nx}e_{ny} - r_{ny}e_{nx} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

- **اختبار الغلاف المحدب:** نقوم الآن بتحديد فيما إذا كان مبدأ الإحداثيات يقع داخل الغلاف المحدب المتشكل من أعمدة المصفوفة A.

وبالإضافة إلى إجراء اختبار الغلاف المحدب، يمكن أن نلجأ أيضاً إلى الإجراء الحسابي الذي تم دراسته سابقاً.

3.3.3. نظرية نوين Nguyen للحالة المستوية:

في حالة عمليات المسك المستوية الحاصلة باستخدام نقطتي تماس مع وجود تأثير الاحتكاك، فإن نظرية نوين Nguyen تقترح طريقة خاصة وبسيطة من أجل تحليل تأثير قوى الإغلاق (انظر الشكل (3.9)).



الشكل 3.9: نظرية نوين Nguyen للتماسات النقطية مع وجود الاحتكاك

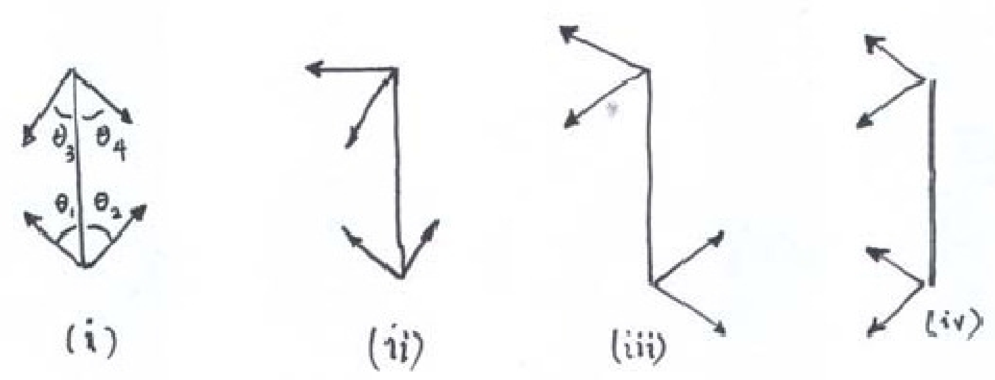
النظرية 3.1. يمكن لأي جسم صلب في الحالة المستوية ومقيد بنقطتي تماس في مع وجود تأثير الاحتكاك أن يكون تحت تأثير قوى إغلاق إذا وفقط إذا كان الخط الواصل بين نقطتي التماس واقعاً داخل مخروطي الاحتكاك معاً.

ولنرى الآن لماذا نظرية نوين Nguyen هي نظرية صحيحة. فبالنظر إلى الشكل (3.10) وباختيار جملة محاور إحداثية بحيث يكون مبدأ الإحداثيات في منتصف الخط الواصل بين نقطتي التماس، وبحيث يكون المحور $\hat{y}$ منطبقاً على هذا الخط. وبفرض أن المسافة بين نقطتي التماس هي 2. وسنأخذ بالاعتبار الحالات الأربعة الممكنة والمبينة في الشكل (3.10): (i) عندما يكون

الخط الواصل بين نقطتي التماس واقعاً ضمن كلي مخروطي الاحتكاك. (ii) عندما يكون هذا الخط واقعاً داخل مخروط احتكاك واحد فقط. (iii) عندما يكون هذا الخط واقعاً خارج كلي مخروطي الاحتكاك، ومخروطي الاحتكاك متعاكسين في الاتجاه. (iv) عندما يكون هذا الخط واقعاً خارج مخروطي الاحتكاك، وكلا المخروطان يكونان في اتجاه واحد بالنسبة لهذا الخط الواصل.

كل حالة من هذه الحالات الأربعة سوف نطبق اختبار الغلاف المحدب بالنسبة للحالة المستوية. ففي الحالة الأولى عندما يكون الخط الواصل بين التماسات يقع داخل كلي مخروطي الاحتكاك، فإن معادلات التوازن الستاتيكي ستكون بالشكل:

$$\begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & \sin\theta_2 & -\sin\theta_3 & \sin\theta_4 \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & -\cos\theta_3 & -\cos\theta_4 \\ -\sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \sin\theta_3 & -\sin\theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$



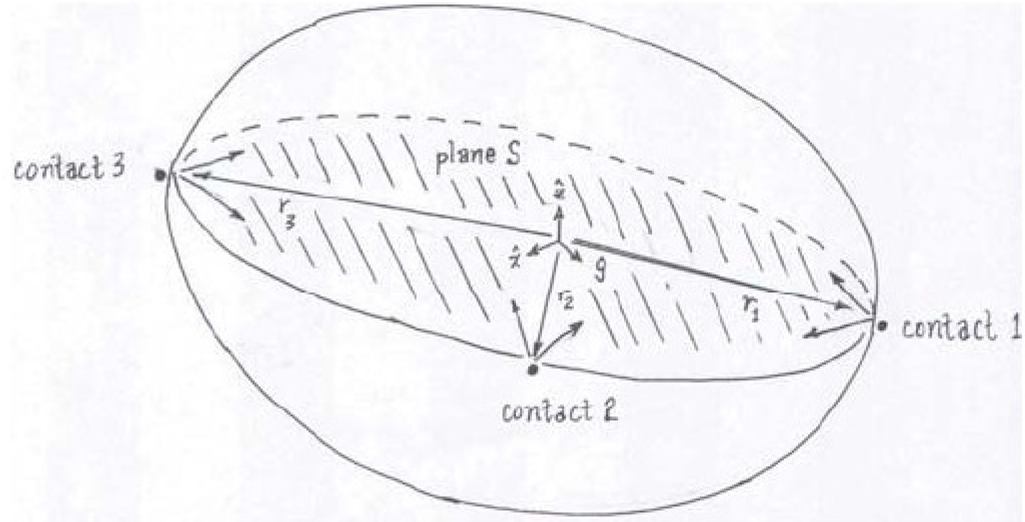
الشكل 3.10: توضيح لبرهنة نظرية نوين Nguyen

حيث θ_i تشير إلى الزاوية من الخط الواصل بين نقطتي التماس إلى حافة مخروط الاحتكاك (انظر الشكل 3.10). إن الجسم يكون تحت تأثير قوى إغلاق إذا كانت $x \geq 0$ تحقق نظرية نوين Nguyen من أجل أي قيم لـ $b \in R^3$. وبتطبيق اختبار الغلاف المحدب، يمكننا أن نتاكد أن هذه الحالة تحقق شروط تأثير قوى الإغلاق. وبطريقة مماثلة، يمكن التأكد أن بقية الحالات لا تحقق شروط تأثير قوى الإغلاق.

3.3.4. تأثير قوى الإغلاق للأجسام الصلبة الفضائية الخاضعة لثلاث نقاط تماس مع وجود الاحتكاك:

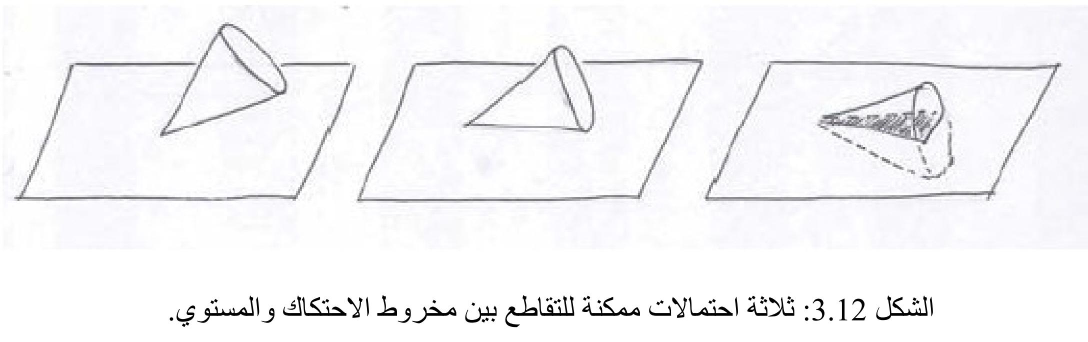
سندرس الآن تأثير قوى الإغلاق بالنسبة للأجسام الصلبة الفضائية، والسؤال الأول الذي يجب أن يسأل هو كم عدد نقاط التماس مع وجود الاحتكاك التي تلزم من أجل أن نقول أن الجسم يمكن أن يقع تحت تأثير قوى إغلاق. رأينا في حالة الأجسام الصلبة المستوية وحسب نظرية نوين Nguyen التي صرحت أن وجود نقطتي تماس يعتبر كافياً مادام الخط الواصل بين نقطتي

التماس يقع داخل مخروطي الاحتكاك لنقطتي التماس. ومن الواضح أنه من أجل الأجسام الفضائية فإن نقطتي تماس فقط ليستا كافيتين حتى لو وقع الخط الواصل بين نقطتي التماس داخل مخروطي الاحتكاك (لاحظ أنها مخاريط في المجال R^3)، لأنه ليس من الممكن مقاومة أي عزم خارجي يطبق حول الخط الواصل بين التماسين. السؤال التالي إذن، هل ثلاث نقاط تماس مع وجود الاحتكاك كافية للحصول على تأثير لقوى الإغلاق من أجل عملية المسك؟



الشكل 3.11: جسم صلب فضائي مقيد بثلاثة نقاط تماس مع وجود الاحتكاك

الجواب هو نعم. في الحقيقة، هناك نتيجة خاصة وبسيطة أوضحها بعض العلماء أمثال جيا وي لي Jia Wei Li وآخرون، حيث قاموا باختزال تحليل تأثير قوى الإغلاق في عمليات المسك الفضائية بوجود احتكاك إلى مسألة تأثير قوى إغلاق في الحالة المستوية. بالنظر إلى الشكل (3.11)، لنفترض جسماً صلباً مقيداً بثلاث نقاط تماس مع وجود الاحتكاك. فإذا كانت النقاط الثلاث متوضعة بحيث تكون على خط واحد، فإنه من الواضح أن أي عزم سيطبق حول ذاك الخط لا يمكن منعه بهذه النقاط الثلاث. ولذلك سوف نستثني هذه الحالة، وسنفترض أن هذه النقاط ليست متوضعة على خط واحد، وبهذه الحالة فإن النقاط الثلاث سوف تشكل مستوياً وحيداً S، وعند كل نقطة تماس سيكون هناك ثلاثة احتمالات ممكنة (انظر الشكل (3.12)):



الشكل 3.12: ثلاثة احتمالات ممكنة للتقاطع بين مخروط الاحتكاك والمستوي.

- مخروط الاحتكاك يتقاطع مع المستوي S بمخروط مستوٍ.
- مخروط الاحتكاك يتقاطع مع المستوي S بخط.
- مخروط الاحتكاك يتقاطع مع المستوي S ف نقطة.

إن جيا وي لي Jia Wei Li وفريقه صرحوا بأن الجسم يكون تحت تأثير قوى إغلاق إذا وفقط إذا كان كل مخروط احتكاكي يتقاطع مع المستوي S بمخروط مستوٍ، وسيكون المستوي S يكون بدوره واقعاً تحت تأثير قوى إغلاق.

النظرية 3.2. إذا كان لدينا جسماً صلباً في الحالة الفضائية مقيداً بثلاث نقاط تماس مع وجود الاحتكاك، وبفرض أن نقاط التماس الثلاث تشكل مستوياً وحيداً S، وكان كل مخروط احتكاك عند كل نقطة تماس يتقاطع مع المستوي S بمخروط مستوٍ. فإن الجسم سيكون تحت تأثير قوى إغلاق إذا وفقط إذا كان المستوي S واقعاً تحت تأثير قوى إغلاق لعملية المسك.

وسنقوم الآن برهنة هذه النتيجة. أولاً، الشرط اللازم: إذا كان الجسم الصلب الفضائي واقعاً تحت تأثير قوى إغلاق، فإن كل مخاريط الاحتكاك تتقاطع مع المستوي S بمخروط مستوٍ، والمستوي S هو أيضاً بدوره سيكون واقعا تحت تأثير قوى إغلاق. ومن السهولة بمكان أن نتحقق من هذا الشرط، فإذا كان الجسم في الحالة الفضائية واقعاً تحت تأثير قوى إغلاق، فإن S (والذي هو جزء من الجسم) لا بد أن يكون تحت تأثير قوى إغلاق في الحالة المستوية. وعلاوة على ذلك، فإذا كان هناك مخروط احتكاك واحد يتقاطع مع S بخط أو بنقطة، بالتالي يمكن أن يكون هناك عزم خارجي (مثلاً حول الخط الواصل بين نقطتي التماس الأخريتين) والذي لايمكن لعملية المسك أن تقاومه.

ولبرهنة الشرط الكافي: إذا كان كل مخروط احتكاك يقطع المستوي S بمخروط مستوٍ و S واقع تحت تأثير قوى إغلاق، فإن الجسم الصلب الفضائي سيكون بالتالي واقع تحت تأثير قوى إغلاق. فلنفترض أننا قمنا باختيار جملة محاور إحداثية مرجعية ثابتة بحيث يكون المستوي S يقع ضمن المستوي x-y، ولتكن $r_i \in R^3$ تشير إلى الشعاع من مبدأ الإحداثيات للجملة السابقة لنقطة التماس i (انظر الشكل 3.11). ولنقم بالدلالة على قوة التماس في النقطة i بـ $f_i \in R^3$، بالتالي فإن قوة التماس في الحالة الفضائية $F_i \in R^6$ هي من الشكل:

$$F_i = \begin{bmatrix} f_i \\ m_i \end{bmatrix} \qquad (3.38)$$

وهنا كل m_i تساوي $m_i = r_i \times f_i$، حيث $i = 1,2,3$. لنقم بالدلالة على القوة الخارجية الفضائية بالرمز $F_{ext} \in R^6$ بالشكل:

$$F_{ext} = \begin{bmatrix} f_{ext} \\ m_{ext} \end{bmatrix} \in R^6 \qquad (3.39)$$

بالتالي فإن تأثير قوى الإغلاق يتطلب وجود قوى تماس فضائية F_i حيث $i = 1,2,3$، تكون متوضعة داخل مخروط الاحتكاك الخاصة بتماسها، بحيث أنه من أجل أي قوة خارجية فضائية F_{ext}، فإن المعادلة التالية محققة:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_{ext} = 0 \qquad (3.40)$$

أو بشكل مكافئ:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_{ext} = 0 \qquad (3.41)$$

$$(r_1 \times f_1) + (r_2 \times f_2) + (r_3 \times f_3) + m_{ext} = 0 \qquad (3.42)$$

فإذا كانت كل من قوى وعزوم التماسات بالإضافة إلى القوة والعزم الخارجيان يمكن تحليلهما إلى مركبات متعامدة على المستوي المحدد بـ S (والواقع في المستوي x-y كما تم اختياره بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية) والفضاء الناظم N على المستوي S (والمتجه باتجاه المحور z في جملة المحاور الإحداثية المختارة)، بالتالي فإن المعادلة السابقة لتأثير قوى الإغلاق يمكن كتابتها بالشكل:

$$f_{1S} + f_{2S} + f_{3S} = -f_{ext,S} \qquad (3.43)$$

$$(r_1 \times f_{1S}) + (r_2 \times f_{2S}) + (r_3 \times f_{3S}) = -m_{ext,S} \qquad (3.44)$$

$$f_{1N} + f_{2N} + f_{3N} = -f_{ext,N} \qquad (3.45)$$

$$(r_1 \times f_{1N}) + (r_2 \times f_{2N}) + (r_3 \times f_{3N}) = -m_{ext,N} \qquad (3.46)$$

وهنا قمنا باستخدم S للدلالة على الشريحة من الجسم الصلب المعبر عنها بالمستوي x-y كما لو أنها المستوي x-y نفسه. والفضاء N سيكون دائما باتجاه المحور z.

وبمتابعة برهنة الشرط الكافي، سوف نرى الآن أنه إذا كان S هو مستوٍ واقع تحت تأثير قوى إغلاق، فإن الجسم في حالته الفضائية سيكون واقعا تحت تأثير قوى إغلاق. وفي إطار المعادلات (3.45) و (3.46)، سنعى لإثبات أنه من أجل أي قوة $f_{ext,S} \in S$ و $f_{ext,N} \in N$، ومن أجل أي عزم $m_{ext,S} \in S$ و $m_{ext,N} \in N$، فإن هناك قوى تماس $f_{iS} \in S$ و $f_{iN} \in N$، حيث $i = 1,2,3$ تحقق المعادلات (3.45) و (3.46)، وأنه لكل نقطة تماس $i = 1,2,3$، فإن القوة $f_i = f_{iS}+f_{iN}$ تقع داخل مخروط الاحتكاك i.

أولاً، لندرس معادلات تأثير قوى الإغلاق (3.45) و (3.46) في الاتجاه الناظمي N. ولتكن لدينا قوة خارجية معطاة $f_{ext,N} \in N$ و عزم خارجي $m_{ext,S} \in S$، بالتالي فإن المعادلات (3.45) و(3.46) تشكل مجموعة من ثلاثة معادلات خطية بثلاثة مجاهيل. ومن فرضياتنا أن نقاط التماس الثلاث ليس منطبقة على خط واحد، فإن المعادلات سيكون لها مجموعة حلول وحيدة $\{f'_{1N},f'_{2N},f'_{3N}\}$ في N.

وبسبب أننا نفترض أن المستوي S واقع تحت تأثير قوى إغلاق، وذلك من أجل أي قوة خارجية $f_{ext,S} \in S$ وعزم خارجي $m_{ext,N} \in N$، فإن هناك قوى تماس مستوية $f_{iS} \in S$ حيث $i = 1,2,3$، بحيث تتوضع داخل مخروط الاحتكاك حسب نقطة التماس التابعة لها، وأيضاً تحقق المعادلات (3.43) و (3.44). ومجموعة الحلول هنا ليست وحيدة، حيث يمكن لأحدهم أن يجد مجموعة من القوى الداخلية $\eta_i \in S$ حيث $i = 1,2,3$، وكل منها يقع داخل مخروط الاحتكاك المنسوب للتماس i، وتحقق المعادلات:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0 \qquad (3.47)$$

$$(r_1 \times \eta_1) + (r_2 \times \eta_2) + (r_3 \times \eta_3) = 0 \qquad (3.48)$$

ونلاحظ أن هاتين المعادلتين تشكلان ثلاث معادلات خطية مقيدة بست متغيرات، لذلك فإن هنالك فضاء خطي ثلاثي الأبعاد من الحلول لـ $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$.

والآن إذا كانت القوى $\{f_{1S},f_{2S},f_{3S}\}$ تحقق المعادلات (3.43) و (3.44)، بالتالي فإن القوى $\{f_{1S}+\eta_1,\ f_{2S}+\eta_2,\ f_{3S}+\eta_3\}$ سوف تحقق المعادلات نفسها أيضاً. والقوى الداخلية $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ يمكن بذلك أن يتم اختيارها من أجل تحقيق قيمة أكبر لقوى التماسات بحيث:

$$f_1 = f'_{1N} + f_{1S} + \eta_1 \qquad (3.49)$$

$$f_2 = f'_{2N} + f_{2S} + \eta_2 \qquad (3.50)$$

$$f_3 = f'_{3N} + f_{3S} + \eta_3 \qquad (3.51)$$

وكلها تقع داخل مخروط الاحتكاك المتعلق بنقطة التماس الخاصة بكل قوة. وهذا يكمل البرهان للشرط الكافي.

الفصل الرابع

حركات الجسم الصلب

Rigid Body Motions

فيما ما مضى، رأينا أنه يلزمنا على الأقل ستة إحداثيات لوصف الموقع والاتجاه لجسم صلب في فضاء فيزيائي ثلاثي الأبعاد. وكنا قد وصلنا إلى هذه النتيجة عن طريق اختيار ثلاثة نقاط من الجسم الصلب، ومن ثم ناقشنا أن المسافة بين أي زوج من هذه النقاط الثلاثة يجب أن تبقى ثابتة بغض النظر عن المكان الذي يتواجد فيه الجسم الصلب. وهذا قادنا إلى وجود ثلاثة قيود، والتي عندما تفرض على الإحداثيات الديكارتية التسعة – الإحداثيات (x,y,z) لكل نقطة من هذه النقاط – فإنها تؤدي بدورها إلى نتيجة مفادها أن ستة من أصل تسعة من هذه الإحداثيات يمكن أن يتم اختيارها بشكل مستقل.

في هذا الفصل سوف ندرس طريقة أكثر انتظاماً لوصف موقع واتجاه الجسم الصلب. وعوضاً عن اختيار ثلاثة نقاط من الجسم الصلب، سوف نقوم بربط جملة محارو إحداثية مرجعية بالجسم، وندرس الطرق التي تصف وتعبر عن هذه الجملة المرجعية بالنسبة لجملة محاور إحداثية يتم تثبيتها في الفضاء (ونحن نعلم بالطبع أن هذا يمكن أن يتم باستخدام عدد قليل من الإحداثيات وهو ست إحداثيات). وهذا ما يتعلق بالجانب الوصفي Descriptive لحركات الجسم الصلب.

وهناك أيضاً جانب توجيهي Prescriptive فيما يتعلق بحركات الجسم الصلب. لنفرض أن لدينا جسماً صلباً يتحرك من هيئة معينة في فضاء فيزيائي إلى هيئة أخرى. وحالما يتم اختيار جملة المحاور الإحداثية المرجعية ومقياس الطول للفضاء الفيزيائي، فإن انزياح الجسم الصلب حينها يمكن أن يوصف بانتقال من R^3 إلى R^3. وقد اتضح أن التمثيلات الرياضية يمكن نفسها أن تستخدم من أجل التحليلات الوصفية والتوجيهية لحركات الجسم الصلب.

لتوضيح الحيثيات المتزامنة معاً لعملية التوصيف والتوجيه لحركات الجسم الصلب، وأيضاً لإعطاء موجز عن الأفكار الرئيسية والأدوات التي سوف نستخدمها في هذا الفصل، سنبدأ بمثال توضيحي في الحالة المستوية. وقبل البدء بذلك، سنستذكر بعض الأمور عن مفهوم الأشعة Vectors.

مفهوم الأشعة Vectors:

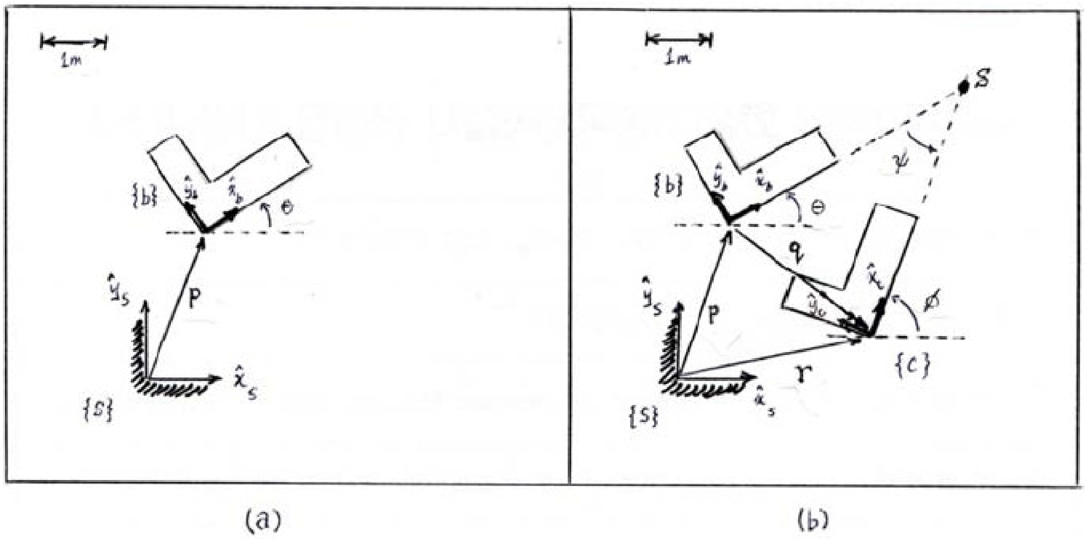
من المعلوم أن الشعاع هو مقدار هندسي له طول وله اتجاه. والشعاع يمكن أن يشار له بحرف نصي نظامي، مثلاً v. فإذا تم اختيار جملة محاور إحداثية مرجعية ومقياس طول للفضاء حيث يقع الشعاع v، عندها فإن الشعاع v يمكن أن يتم تمثيله بمصفوفة من عمود واحد وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المرجعية (يمكن تخيل ذلك بأن تقوم بتحريك قاعدة الشعاع v إلى مبدأ إحداثيات الجملة المرجعية مع الحفاظ على نفس الاتجاه، وهذا المفهوم للإشعة أحياناً يقودنا إلى ما يسمى الشعاع الحر Free Vector). إن التمثيل المصفوفي العمودي للشعاع v يشار إليه عادة

بحروف مائلة $v \in R^n$. ونلاحظ أنه إذا تم اختيار جملة محاور إحداثية مرجعية ومقياس للطول مختلفين، فإن تمثيل المصفوفي العمودي للشعاع v سوف يتغير.

ويمكن لنقطة P في فضاء فيزيائي أن يتم تمثيلها بصيغة شعاع. فإذا تم اختيار جملة محاور إحداثية مرجعية ومقياس طول للفضاء الفيزيائي، فإن النقطة P يمكن أن يتم تمثيلها على هيئة شعاع من مبدأ الاحداثيات للجملة المرجعية إلى النقطة P، والتمثيل المصفوفي العمودي للشعاع يمكن أن يشار إليه بحرف مائل $P \in R^n$. وكما ذكرنا في السابق، فإذا تم اختيار جملة محاور إحداثية مرجعية ومقياس للطول مختلفين للفضاء الفيزيائي، فإن هذا سيؤدي إلى تمثيل مصفوفي عمودي للشعاع مختلف وذلك لنفس النقطة P في الفضاء الفيزيائي.

4.1. مثال توضيحي:

لنفترض أن لدينا الجسم المستوي الموضح في الشكل ((4.1 (a))، والذي حركته تقتصر على كونها حركة في مستوٍ. ولنفرض أنه قد تم اختيار مقياس للطول وجملة محاورة إحداثية مرجعية ثابتة كما هو موضح بالشكل. وسوف نطلق على جملة المحاور هذه جملة المحاور الثابتة Fixed Frame، أو جملة محاور الفضاء Space Frame، وسنشير إليها بالرمز {S}، وسوف نرمز أشعة الواحدة لهذه الجملة بالرموز $\hat{x}_s$ و $\hat{y}_s$. وبشكل مشابه، سنربط الجسم المستوي بجملة محاور مرجعية متعلقة بالجسم وسنرمز لأشعة الواحدة فيها بالرموز $\hat{x}_b$ و $\hat{y}_b$. ولأن هذه الجملة تتحرك مع الجسم سنسميها جملة المحاور المتحركة Moving Frame، أو جملة محاور الجسم Body Frame، وسنشير إليها بالرمز {b}.



الشكل 4.1: حركة الجسم الصلب في الحالة المستوية.

ولتوصيف هيئة الجسم المستوي، فإنه فقط يلزمنا تحديد موقع واتجاه جملة محاور الجسم بالنسبة لجملة المحاور الثابتة. إن الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور الثابتة لمبدأ جملة محاور الجسم، والمشار إليها بـ p، يمكن أن يعبر عنه بالنسبة لأشعة الواحدة لجملة المحاور الثابتة كالتالي:

$$p = p_x\hat{x}_s + p_y\hat{y}_s \qquad (4.1)$$

وقد يكون من المعتاد كتابة الشعاع بشكل أكثر بساطة بالشكل (p_x,p_y)، وهذا الأمر جيد في حال لم يكن هناك أي غموض محتمل في جملة المحاور المرجعية، لكن عند التعبير عن نفس الشعاع في جمل محاور إحداثية متعددة، فإن كتابة الشعاع p كما في المعادلة (4.1) يكشف بسهولة جملة المحاور الإحداثية المرجعية والتي على أساسها تم تعريف (p_x,p_y).

إن أسهل طريقة لتوصيف اتجاه جملة محاور الجسم {b} بالنسبة لجملة المحاور الثابتة {s} هي عن طريق تحديد الزاوية θ كماهو مبين في الشكل. وهناك طريقة أخرى وذلك بتحديد اتجاهات أشعة الواحدة لجملة محاور الجسم $\hat{x}_b$ و $\hat{y}_b$، بالشكل:

$$\hat{x}_b = \cos\theta\,\hat{x}_s + \sin\theta\hat{y}_s \qquad (4.2)$$

$$\hat{y}_b = -\sin\theta\,\hat{x}_s + \cos\theta\,\hat{y}_s \qquad (4.3)$$

للوهلة الأولى هذه الطريقة تبدو غير فعالة لتمثيل اتجاهات جملة محاور الجسم. لكن تخيل أن الجسم تحرك بشكل عشوائي في الفراغ الثلاثي الأبعاد، فمن الواضح أن الزاوية θ لوحدها ليست كافية لتوصيف الاتجاه لجملة المحاور المنتقلة (الجديدة الخاصة بالجسم). وفي الحقيقة نحن بحاجة إلى ثلاثة زوايا على الرغم من أنه من غير الواضح كيفية التعريف الملائمة لمجموعة الزوايا الثلاث هذه. وبالمقابل، فإنه من البسيط التعبير عن محاور (أشعة) الواحدة لجملة المحاور المنتقلة بالنسبة لجملة المحاور الثابتة كما قمنا بالنسبة للحالة المستوية.

ولنفترض أننا اتفقنا على التعبير عن كل شيء بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية الثابتة، فإن الشعاع p في المعادلة (4.1) يمكن أن يتم تمثيله عن طريق مصفوفة عمودية $p \in \mathrm{R}^2$ من الشكل:

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

والمعادلات (4.2) و (4.3) يمكن أيضاً تجميعها في المصفوفة 2×2 ذات الرمز P:

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

ومن الواضح أن العمود الأول من P يعبر عن $\hat{x}_b$، وأن العمو الثاني يعبر عن $\hat{y}_b$. ويمكن بسهولة أن نتحقق أن $P^TP = I$، وأن $P^{-1} = P^T$. إن المصفوفة P والتي تم تشكيلها هنا هي عبارة عن مثال لمصفوفة دوران Rotation Matrix، والزوج (P,p) يقدم لنا توصيفاً لاتجاه وموقع جملة محاور الجسم بالنسبة لحملة المحاور الثابتة. من المدخلات الستة - مدخلين من أجل p وأربعة مدخلات من أجل P- فقط ثلاثة مدخلات هي التي تكون مستقلة. في الحقيقة، إن الشرط $P^TP = I$ يوضح وجود ثلاثة معادلات للقيود، ولهذا فإنه للأربع مدخلات التي تكوّن المصفوفة P، فقط مدخل واحد يمكن اختياره بشكل مستقل. وبالتالي فإن الإحداثيات الثلاث (θ,p_x,p_y) يمكن لها أن تشكل الحد الأدنى لتمثيل هئية لجسم الصلب في الحالة المستوية. وفي كل الحالات، فإن زوج

الشعاع - مصفوفة الدوران (P,p) يقدم وصفاً لهيئة الجسم الصلب كما تتم رؤيته من جملة المحاور الإحداثية الثابتة.

الآن بالنظر إلى الشكل (4.1 (b))، لنفترض أن الجسم الصلب عند {b} تم نقله إلى الهيئة {c}. وبتكرار التحليل السابق من أجل شعاع الموقع r و أشعة الواحدة لجملة المحاور {c}، يمكن أن نكتب:

$$r = r_x \hat{x}_s + r_y \hat{y}_s \qquad (4.6)$$

$$\hat{x}_c = \cos\phi\, \hat{x}_s + \sin\phi\, \hat{y}_s \qquad (4.7)$$

$$\hat{y}_c = -\sin\phi\, \hat{x}_s + \cos\phi\, \hat{y}_s \qquad (4.8)$$

والمعادلات هذه يمكن كتابتها على شكل مصفوفة عمودية $r \in R^2$ ومصفوفة دوران $R \in R^{2\times 2}$:

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

ويمكن أن نعيد العملية نفسها وذلك من أجل توصيف جملة المحاور {c} منظوراً إليها من جملة المجاور {b} (تخيل أن {b} هي الآن جملة المحاور الثابتة، وكرر التحليل السابق لـ {c}). ولتكن q تشير إلى الشعاع من مبدأ إحداثيات الجملة {b} إلى مبدأ إحداثيات الجملة {c}، وعندها سنجد:

$$q = q_x \hat{x}_b + q_y \hat{y}_b \qquad (4.10)$$

$$\hat{x}_c = \cos\psi\, \hat{x}_b + \sin\psi\, \hat{y}_b \qquad (4.11)$$

$$\hat{y}_c = -\sin\psi\, \hat{x}_b + \cos\psi\, \hat{y}_b \qquad (4.12)$$

حيث $\psi = \phi-\theta$. وكما في السابق، الشعاع $q \in R^2$ و مصفوفة الدوران $Q \in R^{2\times 2}$ يمكن كتابتهما بالشكل:

$$q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \qquad (4.13)$$

وهنا q هي تمثيل لـ q في جملة المحاور {b}. وبشكل مشابه، فإن مصفوفة الدوران Q توصف الاتجاهات لجملة المحاور {c} بالنسبة لجملة المحاور {b}.

والآن، إذا تخيلنا أن الجسم تم نقله من جملة المحاور {b} إلى جملة المحاور {c}، بالتالي فإنه من الواضح أن النقطة التي على الجسم الصلب والمعبر عنها بالنقطة P سوف تنتقل إلى النقطة r. ويمكننا هنا أن نسأل، كيف يمكن للتمثيل المصفوفي العمودي للشعاع p أن يتحول لـ r؟ والجواب يعطى بالشكل:

$$r = p + Pq \qquad (4.14)$$

ولمعرفة السبب، إذا نظرنا إلى الشكل (4.1 (a))، فبإمكاننا ملاحظة أن r هو الشعاع المحصل لـ p و q. حيث p و r هما التمثيل المصفوفي العمودي للشعاعين p و r في جملة المحاور {s}. وللحصول على r على شكل تابع لـ p و q، علينا أولاً أن نمثل q في جملة المحاور {s} قبل أن نجمعها مع p. وهو بشكل أدق عبارة عن Pq. وبذلك نحصل على المعادلة (4.14). وحيث أن $\phi = \theta + \psi$، يمكن أيضاً أن نتحقق أن :

$$R = PQ \qquad (4.15)$$

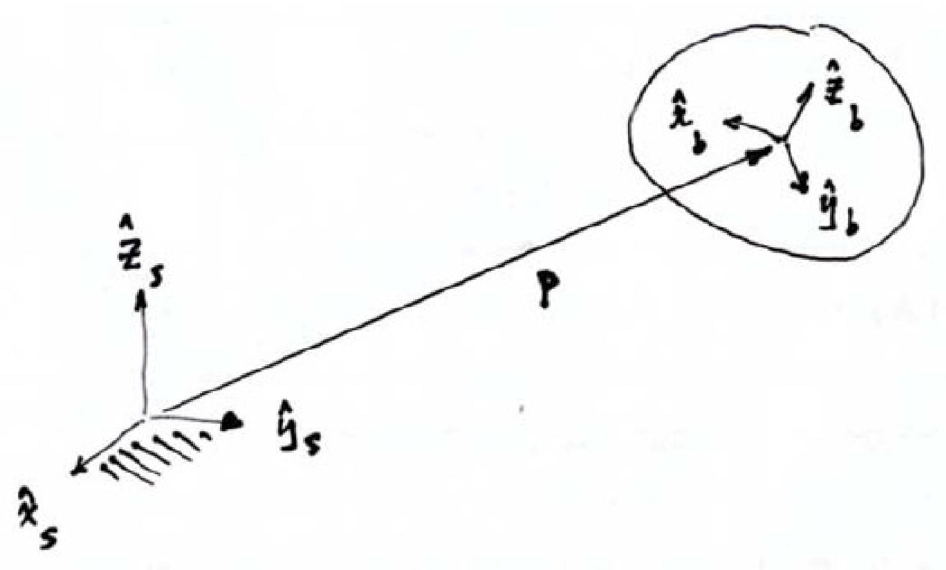
لهذا فإن الزوج (Q,q) يصف كيفية انتقال الجسم الصلب من {b} إلى {c}، فإذا كانت لدينا نقطة لا على التعيين p واقعة في الجسم الصلب عند الهيئة {b}، وممثلة بالشعاع $p \in R^3$، فإنها ستتحول إلى تلك النقطة في الفضاء الفيزيائي والممثلة بالشعاع $r = p + Pq$. وأيضاً مصفوفة الدوران P عند لهيئة {b} سوف تتحول إلى R = PQ عند الهيئة {c} كنتيجة لهذا الانتقال. ولهذا السبب نسمي الزوج مصفوفة الدوران - الشعاع (Q,q) بانتقال الجسم الصلب، أو بشكل أكثر شيوعاً، حركة الجسم الصلب.

وهكذا يمكننا أن نرى أن زوج مصفوفة الدوران - الشعاع يمكن أن يقدم لنا توصيفاً عن هيئة الجسم الصلب (التفسير التوصيفي كما تم توضيحه بـ (P,p))، أو توجيه انتقال الجسم الصلب في الفضاء الفيزيائي (التفسير التوجيهي كما تم توضيحه بـ (Q,q)).

وكنتيجة ثانية، ومرة أخرى بالرجوع إلى الشكل (4.1 (b))، نلاحظ أن الانتقال من الهيئة {b} إلى الهيئة {c} يمكن أن يتم عن طريق تدوير الجسم المستوي في الهيئة {b} حول النقطة s بزاوية ψ. ولذلك فإن الانتقال يمكن أن يُشخص عن طريق ثلاث إحداثيات (ψ, s_x, s_y)، حيث (s_x, s_y) تشير إلى إحداثيات النقطة s في جملة المحاور الثابتة. وهذا التمثيل ثلاثي البارامترات البديل لحركة الجسم الصلب هو عبارة عن مثال مستوٍ للحركة اللولبية Screw Motion. وإذا كانت الحركة عبارة عن انتقال صافي - وهذا يعني أن الاتجاهات لا تتغير أي $\phi = \theta$ - فإن النقطة s سوف تكون في اللانهاية.

وفي هذا الفصل سوف نقوم بتعميم هذه الأفكار أعلاه لحالة حركة الجسم الصلب في الحالة ثلاثية الأبعاد. ولهذا الغرض لنفترض أن لدينا جسماً صلباً في فضاء فيزيائي ثلاثي الأبعاد كما هو موضح بالشكل (4.2). ولنفترض أن مقياساً للطول للفضاء الفيزيائي قد تم اختياره، وأن كل من جملة المحاور الثابتة {s} وجملة محاور الجسم {b} قد تم تحديدهما كما في الشكل. وخلال هذا الكتاب فإن كل جمل المحاور المرجعية سوف تؤخذ حسب قاعدة اليد اليمنى، أي أن أشعة الواحدة $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ دائماً تحقق العلاقة $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$. وسنشير إلى أشعة الواحدة للجملة الثابتة بـ $\{\hat{x}_s, \hat{y}_s, \hat{z}_s\}$، ولأشعة الواحدة لجملة محاور الجسم بـ $\{\hat{x}_b, \hat{y}_b, \hat{z}_b\}$. ولتكن p تشير إلى الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور الثابتة إلى مبدأ إحداثيات جملة محاور الجسم. ووفقاً لإحداثيات جملة المحاور الثابتة، فإن p يمكن أن يعبر عنها بالشكل:

$$\mathrm{p} = p_1 \hat{x}_s + p_2 \hat{y}_s + p_3 \hat{z}_s \qquad (4.16)$$



الشكل 4.2 التوصيف الرياضي للموقع والاتجاه

إن محاور الواحدة (أو أشعة الواحدة) لجملة محاور الجسم يمكن أن يعبر عنها بالشكل التالي:

$$\hat{x}_b = r_{11}\hat{x}_s + r_{21}\hat{y}_s + r_{31}\hat{z}_s \qquad (4.17)$$

$$\hat{y}_b = r_{12}\hat{x}_s + r_{22}\hat{y}_s + r_{32}\hat{z}_s \qquad (4.18)$$

$$\hat{z}_b = r_{13}\hat{x}_s + r_{23}\hat{y}_s + r_{33}\hat{z}_s \qquad (4.19)$$

وبتعريف $p \in R^3$ و $R \in R^3$ بالشكل:

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad (4.20)$$

فإن الاثني عشر بارامتراً الناتجين من (R,p) بالتالي يقدمون توصيفاً لموقع واتجاه الجسم الصلب بالنسبة لجملة المحاور الثابتة.

ولأنه يلزمنا على الأقل ستة بارمترات لتوصيف هيئة الجسم الصلب، فإذا أبقينا على برامترات الشعاع p كماهي، فإنه من أصل تسع بارامترات للمصفوفة R، نستطيع فقط أن نختار ثلاثة بارامترات بشكل مستقل. وبقصد تحليل ودراسة هذه البارامترات الثلاثة، سوف ندرس بعض أساسيات التمثيل باستخدام ثلاثة بارامترات من أجل مصفوفات الدوران مثل: زوايا أويلر Euler وزوايا (الالتفاف والانحدار والانعراج Roll - Pitch - Yaw) المتلعقة بها، بالإضافة إلى الإحداثيات الأسية Exponential Coordinates وكذلك عناصر الكواتيرنيون Unit Quaternions. ومن ثم سندرس التمثيل البارامتري بستة بارامترات لكل من الانتقال والاتجاه

للجسم الصلب في آن معاً، وستكون طريقة التمثيل الثلاثي البارامترات للمصفوفة R حيث يكون $p \in R^3$ هي الطريقة الأوضح من أجل الوصول إلى ذلك. وهناك طريقة أخرى تعتمد علة نظرية كاسيلز - موزي Chasles – Mozzi، والتي تنص على أن كل تغير في المكان للجسم الصلب يمكن أن يتم توصيفه على شكل حركة لولبية حول محور ثابت في الفضاء.

وسوف ندرس أيضاً تحليل السرعات الخطية Linear Velocity والزاوية Angular Velocity، وكذلك الأمر بالنسبة للقوى والعزوم. وبدلاً من معالجة هذه المقادير على شكل كميات منفصلة ثلاثية الأبعاد، سوف نقوم بدمج أشعة السرعات الخطية والزاوية بسرعة واحدة فضائية سداسية الأبعاد، وكذلك الأمر بالنسبة للقوى والعزوم سنقوم بتحويلها إلى قوى فضائية سداسية الأبعاد. وهذه الكميات سداسية الأبعاد وقواعد العمل بها، سوف تشكل الأساس في التحليل الكينماتيكي Kinematic والتحليل الديناميكي Dynamic كما سنوضح في الفصول القادمة.

4.2. الدورانات Rotations:

4.2.1. تعريف:

ناقشنا سابقاً أنه من أصل تسع مدخلات لمصفوفة الدوران R، فإن ثلاثة مدخلات منهم فقط يمكن اختيارهم بشكل مستقل. وسنقوم الآن باستخلاص مجموعة القيود على مدخلات المصفوفة R. ونلاحظ أن الأعمدة الثلاثة للمصفوفة R تتبع لأشعة الواحدة لجملة محارو الجسم $\{\hat{x},\hat{y},\hat{z}\}$. ولذلك، فإن الشروط التالية يجب أن تكون محققة:

(i) شرط أشعة الواحدة: $\hat{x}$ و $\hat{y}$ و $\hat{z}$ هي أشعة واحدة، أو:

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 &= 1 \qquad (4.21) \\ r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned}$$

(ii) شرط التعامد: $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$ (حيث أخذنا بالاعتبار الجداء الداخلي):

$$\begin{aligned} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} &= 0 \\ r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} &= 0 \qquad (4.22) \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0 \end{aligned}$$

وهذه القيود الستة يمكن أن يعبر عنها بشكل تام بقيد واحد على المصفوفة R:

$$R^T R = I \qquad (4.23)$$

حيث R^T هي منقول المصفوفة R، و I هي المصفوفة الواحدية ذات البعد 3×3.

ويبقى هنالك أمر يجب أن نأخذه بالحسبان هو حقيقة أن جملة المحاور مأخوذة حسب قاعدة اليد اليمنى (أي $\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$، حيث × تشير إلى عملية الجداء الخارجي Cross Product) وليس حسب قاعدة اليد اليسرى (أي $\hat{x}\times\hat{y} = -\hat{z}$)، والقيود الستة المذكورة أعلاه لا تميز بأية طريقة تم

اختيار جملة المحاور (فيما كانت يمينية أو يسارية). وللتذكير فإن هناك صيغة تمكننا من تحديد المحدد Determinant لمصفوفة M من البعد 3×3 تعطى بالشكل (حيث a, b, c هي أعمدة المصفوفة M):

$$\det M = a^T(b \times c) = c^T(a \times b) = b^T(c \times a) \qquad (4.24)$$

وبتعويض أعمدة المصفوفة R في هذه الصيغة ، نحصل على القيد:

$$\det R = 1 \qquad (4.25)$$

ونلاحظ أنه في حال كانت جملة المحاور مأخوذه حسب قاعدة اليد اليسرى فإن قيمة المحدد السابق ستكون مساوية لـ 1-. وباختصار، فإن المقيدات الستة المعبر عنها في المعادلة (4.23) تعني أن det R = ±1، وبإضافة قيد آخر هو det R = 1 فإن هذا يعني أن جملة المحاور مأخوذة حسب قاعدة اليد اليمنى فقط. ولهذا فإن القيد det R = 1 لا يغير عدد المتغيرات المستقلة التي تلزم لتشخيص المصفوفة R.

إن مجموعة مصفوفات الدوران ذات البعد 3×3 تشكل مايسمى المجموعة المتعامدة الخاصة Special Orthogonal Group ويشار إليها بـ SO(3)، والتي يمكن تعريفها كمايلي:

تعريف 4.1. المجموعة المتعامدة الخاصة SO(3)، والتي تعرف بمجموعة مصفوفات الدوران، هي مجموعة جميع المصفوفات R الحقيقية ذات البعد 3×3 والتي تحقق الشرطان: (i) $R^TR= I$ و (ii) det R = 1.

إن مجموعة مصفوفات الدوران ذات البعد 2×2 هي مجموعة فرعية من SO(3)، ويرمز لها بـ SO(2).

تعريف 4.2. المجموعة المتعامدة الخاصة SO(2) هي مجموعة جميع المصفوفات الحقيقة R ذات البعد 2×2 والتي تحقق الشرطان: (i) $R^TR = I$ و (ii) det R = 1.

من التعريف نجد أنه كل R ϵ SO(2) هي من الشكل:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

حيث θ ϵ [0, 2π]. وجميع الخواص المتعلقة بـ SO(3) أيضاً يمكن تطبيقها على SO(2).

4.2.2. خصائص:

سنقوم الآن بسرد مجموعة من الخصائص الرئيسية. وقبل الشروع بذلك، تعتبر المصفوفة الواحدية هي أبسط مثال لمصفوفة الدوران. وإن معكوس Inverse مصفوفة هو أيضاً مصفوفة دوران:

الخاصية 4.1. معكوس مصفوفة الدوران $R \in SO(3)$ موجودة دائماً وهو نفسه منقول المصفوفة R^T، حيث R^T هي أيضاً مصفوفة دوران.

الخاصية 4.2. جداء مصفوفتي دوران هو أيضاً مصفوفة دوران.

البرهان: ليكن لدينا $R_1, R_2 \in SO(3)$، فإنه بسهولة يمكن التوصل أن الجداء R_1R_2 يحقق الشروط $(R_1R_2)^T(R_1R_2) = I$ و $\det R_1R_2 = \det R_1 = \det R_2 = 1$.

الخاصية 4.3. من أجل أي شعاع $x \in R^3$ و $R \in SO(3)$، فإن الشعاع $y = Rx$ له نفس طول الشعاع x.

البرهان: وهو يأتي من كون $||y||^2 = y^Ty = x^TR^TRx = x^Tx = ||x||^2$.

إن الخاصية التالية تعطينا تفسير توصيفي لجداء مصفوفتي دوران. بداية سوف نوضح بعض الأمور. ليكن لدينا جملتي محاور مرجعيتين $\{a\}$ و $\{b\}$، اتجاه جملة المحاور $\{b\}$ كما هو منظور لها من جملة المحاور $\{a\}$ سوف يتم تمثيله بمصفوفة الدوران R_{ab}، حيث أن الثلاث أعمدة للمصفوفة R_{ab} هي ليست إلا تمثيلاً للمحاور $\hat{x}$ و $\hat{y}$ و $\hat{z}$ للمصفوفة $\{b\}$ بحيث تم التعبير عنها نسبة لجملة المحاور $\{a\}$. ومن هذا التعريف من البديهي أن نجد أن $R_{aa} = I$.

الخاصية 4.4. $R_{ab}R_{bc} = R_{ac}$.

البرهان: لبرهنة هذه النتيجة، لنقم بتعريف جملة محاور أخرى $\{c\}$، ولنعرف أشعة الواحدة لجمل المحاور $\{a\}$ و $\{b\}$ و $\{c\}$ بوساطة ثلاثية أشعة الواحدة المتعامدة $\{\hat{x}_a,\hat{y}_a,\hat{z}_a\}$ لجملة المحاور $\{a\}$ و $\{\hat{x}_b,\hat{y}_b,\hat{z}_b\}$ لجملة المحاور $\{b\}$ و $\{\hat{x}_c,\hat{y}_c,\hat{z}_c\}$ لجملة المحاور $\{c\}$. وبالتالي فإنه بإمكاننا تمثيل أشعة الواحدة للجملة $\{b\}$ بالنسبة لمحاورة الجملة $\{a\}$ كمايلي:

$$\hat{x}_b = r_{11}\hat{x}_a + r_{21}\hat{y}_a + r_{31}\hat{z}_a$$

$$\hat{y}_b = r_{12}\hat{x}_a + r_{22}\hat{y}_a + r_{32}\hat{z}_a$$

$$\hat{z}_b = r_{13}\hat{x}_a + r_{23}\hat{y}_a + r_{33}\hat{z}_a$$

وبشكل مشابه، يمكننا تمثيل أشعة الواحدة للجملة $\{c\}$ بالنسبة لمحاور الجملة $\{b\}$ بالشكل التالي:

$$\hat{x}_c = r_{11}\hat{x}_b + r_{21}\hat{y}_b + r_{31}\hat{z}_b$$

$$\hat{y}_c = r_{12}\hat{x}_b + r_{22}\hat{y}_b + r_{32}\hat{z}_b$$

$$\hat{z}_c = r_{13}\hat{x}_b + r_{23}\hat{y}_b + r_{33}\hat{z}_b$$

والمعادلات أعلاه يمكن أيضاً كتابتها بالشكل:

$$[\hat{x}_b \quad \hat{y}_b \quad \hat{z}_b] = [\hat{x}_a \quad \hat{y}_a \quad \hat{z}_a]\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad (4.26)$$

$$[\hat{x}_c \quad \hat{y}_c \quad \hat{z}_c] = [\hat{x}_b \quad \hat{y}_b \quad \hat{z}_b]\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \qquad (4.27)$$

ونلاحظ أن المصفوفة ذات البعد 3×3 في المعادلة (4.26) ماهي إلا R_{ab}، في حين أن المصفوفة في المعادلة (4.27) ما هي إلا R_{bc}. وبتعويض المعادلة (4.26) في المعادلة (4.27) نجد أن:

$$[\hat{x}_c \quad \hat{y}_c \quad \hat{z}_c] = [\hat{x}_a \quad \hat{y}_a \quad \hat{z}_a]\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

ومن المعادلة أعلاه نستنتج أن $R_{ab}R_{bc}=R_{ac}$.

الخاصية 4.5.

$$R_{ab}^{-1} = R_{ba} \qquad (4.28)$$

البرهان: هذه النتيجة يمكن الحصول عليها مباشرة بالاستناد إلى الخاصية السابقة، وذلك باعتبار جملة المحاور {c} منطبقة تماماً على جملة المحاور {a} (تتم البرهنة بالاستفادة من الخاصية السابقة حيث $R_{ab}R_{bc} = R_{ac}$ مع التذكير أن $R_{aa} = I$).

في الخاصية التالية، سوف نفترض أن لدينا شعاعاً حراً (غير مقيد) v في الفضاء الفيزيائي بحيث يكون هذا الشعاع ذو اتجاه معلوم ومقدار معلوم. وسنفترض أن لدينا جملتي محاور {a} و {b} في هذا الفضاء الفيزيائي. وليكن $v_a, v_b \in R^3$ يشيران إلى تمثيل الشعاع v بالنسبة لجملتي المحاور السابقتين، حيث يتم الحصول عليهما عن طريق وضع قاعدة الشعاع v في مبدأ إحداثيات جملتي المحاور {a} و {b} بالترتيب، ومن ثم التعبير عن الشعاع v وفقاً لجملتي المحاور المعطاة.

الخاصية 4.6.

$$R_{ba}v_a = v_b \qquad (4.29)$$

$$R_{ab}v_b = v_a \qquad (4.30)$$

البرهان: وفقاً لأشعة الواحدة لكل من {a} و {b}، فإن الشعاع v يمكن أن يكتب بالشكل الآتي:

$$v = v_{a1}\hat{x}_a + v_{a2}\hat{y}_a + v_{a3}\hat{z}_a \qquad (4.31)$$

$$v = v_{b1}\hat{x}_b + v_{b2}\hat{y}_b + v_{b3}\hat{z}_b \qquad (4.32)$$

ويمكن أن نكتب $v_a = (v_{a1}, v_{a2}, v_{a3})^T$ و $v_b = (v_{b1}, v_{b2}, v_{b3})^T$ ومنه نجد:

$$v = [\hat{x}_a \quad \hat{y}_a \quad \hat{z}_a]v_a \qquad (4.33)$$

$$v = [\hat{x}_b \quad \hat{y}_b \quad \hat{z}_b]v_b \qquad (4.34)$$

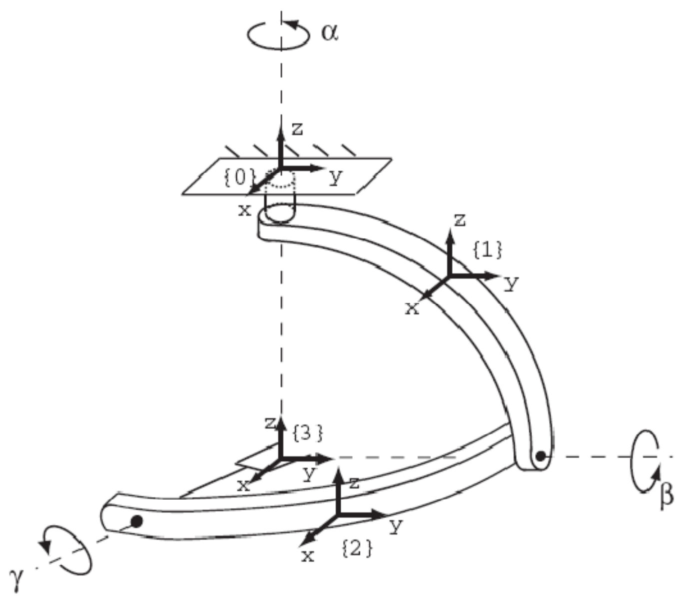
ومن المعادلتين الأخيرتين فإن أشعة الواحدة لكل من جملة المحاور {a} و جملة المحاور {b} ترتبط ببعضها بالمعادلة التالية:

$$[\hat{x}_a \quad \hat{y}_a \quad \hat{z}_a] = [\hat{x}_b \quad \hat{y}_b \quad \hat{z}_b]R_{ba} \qquad (4.35)$$

والتي يمكن من خلالها أن نستنتج أن $R_{ba}v_a = v_b$.

4.2.3. زوايا أويلر Euler:

كما قدمنا سابقاً، فإن أي مصفوفة دوران يمكن تشخيصها بشكل برامتري عن طريق ثلاثة إحداثيات مستقلة. وهنا سوف نقدم تمثيلاً شائعاً لمصفوفة الدوران باستخدام ثلاثة بارامترات، وهذا التمثيل هو زاويا أويلر Euler ذات التركيب ZYX. وإحدى الطرق لتعريف هذه الزوايا هي عن طريق ميكانيزم المعصم Wrist الموضح بالشكل (4.3). إن زوايا أويلر Euler ذات التركيب ZYX هي الزوايا (α, β, γ) والتي تشير إلى زوايا الدوران حول محاور مفاصل هذا المكيانيزم. وكما هو مبين في الشكل، فإن ميكانيزم المعصم موجود في حالته الصفرية، أي عندما تكون كل قيم مفاصل الميكانيزم تشير إلى الصفر.



الشكل 4.3: ميكانيزم المعصم لتوضيح زوايا أويلر Euler ذات التركيب ZYX.

ويمكن هنا تعريف أربع جمل مرجعية للمحاور كالتالي: الجملة $\{0\}$ هي جملة المحاور الثابتة، بينما الجمل $\{1\}$ و $\{2\}$ و $\{3\}$ تون مربوطة مع الوصلات الثلاث لميكانيزم المعصم كما هو موضح بالشكل. وعندما يكون الميكانيزم في حالته الصفرية (الوضع صفر)، فإن جميع جمل المحاور المرجعية يكون لها نفس الاتجاه. وسنفترض الآن أن لدينا اتجاهات نسبية لكل جملة هي R_{01} و R_{12} و R_{23}. بداية، من الملاحظ أن R_{01} تتعلق فقط بالزاوية α (الدوران الموجب حول محور يؤخذ حسب قاعدة اليد اليمنى حيث يشير الإبهام إلى الجهة الموجبة لمحور الدوران، بينما تشير بقية الأصابع إلى اتجاه الدوران حول هذا المحور)، ويمكن أن نجد أن:

$$R_{01} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Rot(\hat{z},\alpha) \qquad (4.36)$$

الترميز $Rot(\hat{z},\alpha)$ يعبر عن الدوران حول المحور $\hat{z}$ بمقدار الزاوية α. وبشكل مشابه، فإن R_{12} تعتمد على الزاوية β وتعطى بالشكل :

$$R_{12} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = Rot(\hat{y},\beta) \qquad (4.37)$$

حيث إن الترميز $Rot(\hat{y},\beta)$ يعبر عن الدوران حول المحور $\hat{y}$ بمقدار الزاوية β. وأخيراً، R_{23} تعتمد على الزاوية γ، وتعطى بالشكل:

$$R_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} = Rot(\hat{z},\gamma) \qquad (4.38)$$

حيث الترميز $Rot(\hat{z},\gamma)$ يعبر عن الدوران حول المحور $\hat{z}$ بمقدار الزاوية γ. وبالتالي فإننا نستطيع أن نوجد $R_{03} = R_{01}R_{12}R_{23}$ والتي تكون بالتالي:

$$R_{03} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \qquad (4.39)$$

حيث s_α هو اختصار لـ $\sin\alpha$ و c_β هو اختصار لـ $\cos\beta$، إلخ.

ويمكننا الآن أن نسأل السؤال التالي: لنفترض أنه لدينا مصفوفة دوران R، فهل هناك مجموعة من الزوايا (α,β,γ) بحيث تكون المعادلة (4.39) محققة؟ إذا كان الجواب نعم، فإن ميكانيزم المعصم الموضح بالشكل (4.3) يستطيع بلوغ أي اتجاه. وبالفعل ، فإن هذه هي الحقيقة،

ونستطيع أن برهن على ذلك. ليكن لدينا r_{ij} تمثل العنصر رقم ij في المصفوفة R. بالتالي فمن المعادلة (4.39) نستطيع أن نجد أن:

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = \cos^2\beta$$

وطالما أن $\cos\beta \neq 0$، أو بشكل مكافئ $\beta \neq \pm 90°$، يمكننا أن نكتب:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-r_{31}}{\pm\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}}\right)$$

لنقم الآن بتعريف التابع atan2، والمستخدم في العديد من لغات البرمجة. وعلى وجه التحديد، فإن التابع atan2(y,x) يكافئ $\tan^{-1}(y/x)$ وذلك بالأخذ بالحسبان إشارة كل من x و y. فعلى سبيل المثال، $\text{atan2}(1,1) = \pi/4$، في حين إن $\text{atan2}(-1,-1) = -3\pi/4$. وباستخدام هذا التابع atan2، فإن القيم الممكنة للزاوية β يمكن أن يعبر عنها بالشكل:

$$\beta = \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

وبالشكل:

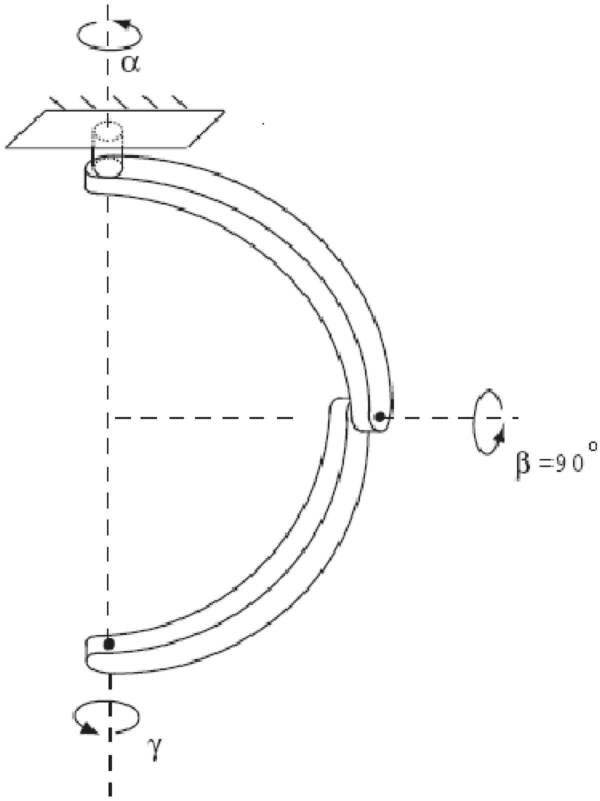
$$\beta = \text{atan2}\left(-r_{31}, -\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

ففي الحالة الأولى، β ستكون واقعة ضمن المجال [-90°,90°]، بينما في الحالة الثانية فإن β سوف تقع ضمن المجال [90°,270°]. وبفرض أن $\beta \neq \pm 90°$، بالتالي فإن α و γ يمكن تحديدهما من خلال العلاقات التالية:

$$\alpha = \text{atan2}(r_{21}, r_{11})$$

$$\gamma = \text{atan2}(r_{32}, r_{33})$$

في الحالة التي تكون فيها الزاوية $\beta = \pm 90°$، فسيكون هناك مجموعة من الحلول لـ α و γ. وهذا يمكن ملاحظته بسهولة من خلال الشكل (4.4). فإذا كانت $\beta = 90°$، فإن الزاوية α و γ تمثل الدورانات حول المحور الشاقولي (بحيث يدوران باتجاهين متعاكسين). ومن هنا فإنه يمكننا القول أنه إذا كان $(\alpha,\beta,\gamma) = (\bar{\alpha},90°,\bar{\gamma})$ هو حل لمصفوفة الدوران المعطاة R، بالتالي فإننا نجد أن الثلاثة $(\bar{\alpha}`,90°,\bar{\gamma}`)$ حيث $\bar{\alpha}`-\bar{\gamma}`=\bar{\alpha}-\bar{\gamma}$، هو أيضاً يعتبر بمثابة حل.



الشكل 4.4: هيئة ميكانيزم المعصم عندما تكون $\beta = 90°$ من أجل زوايا أويلر Euler ذات التركيب ZYX.

خوارزمية حساب زوايا أويلر Euler ذات التركيب ZYX:

إذا كان لدينا $R \in SO(3)$، وكنا نريد نوجد كلاً من $\alpha,\gamma \in [0,2\pi]$ و $\beta \in [-\pi/2,\pi/2]$ بالشكل الذي يحقق:

$$R = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \qquad (4.40)$$

حيث s_α هو اختصار لـ $\sin \alpha$، و c_α هو اختصار لـ $\cos \alpha$، إلخ. وحيث r_{ij} هو العنصر ij في المصفوفة R.

(i) إذا كانت $r_{31} \neq \pm 1$، فإن:

$$\beta = \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) \qquad (4.41)$$

$$\alpha = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) \qquad (4.42)$$

$$\gamma = \text{atan2}(r_{32}, r_{33}) \qquad (4.43)$$

حيث يتم أخذ فقط القيمة الموجبة للجذر التربيعي.

(ii) إذا كانت $r_{31} = 1$، فإن $\beta = \pi/2$، وبالتالي هناك مجموعة من الحلول لكل من α و γ. وإحدى هذه الحلول هو $\alpha = 0$ و $\gamma = \text{atan2}(r_{12},r_{22})$.

(iii) إذا كانت $r_{31} = -1$، فإن $\beta = -\pi/2$، وبالتالي هناك أيضاً مجموعة من الحلول لكل من α و γ. وإحدى هذه الحلول هو $\alpha = 0$ و $\gamma = \text{atan2}(r_{12},r_{22})$.

من التوضيح السابق لزوايا أويلر Euler ذات التركيب ZYX فيما يتعلق بميكانيزم المعصم، فمن الواضح أن اختيار الوضع الصفري للزاوية β هو، في بعض الحالات، يكون عشوائياً. ولذلك فإنه بإمكاننا أن نعرف وضع صفري آخر لميكانيزم المعصم ليكون كما في الشكل (4.4)، وهذا سوف يؤدي بالنتيجة إلى تمثيل آخر ثلاثي البارامترات (α,β,γ) لـ SO(3). وفي الحقيقة، إن الشكل (4.4) هو بشكل أدق عبارة عن تعريف زوايا أويلر Euler ذات التركيب ZYZ. ومصفوفة الدوران الناتجة يمكن الحصول عليها عن طريق تسلسل الدورانات التالية:

$$\begin{aligned}
R(\alpha,\beta,\gamma) &= \mathrm{Rot}(\hat{z},\alpha).\,\mathrm{Rot}(\hat{y},\beta).\,\mathrm{Rot}(\hat{z},\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\gamma c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

وكما في السابق، نستطيع أن نلاحظ أنه من أجل أية مصفوفة دوران $R \in SO(3)$، فإن هناك ثلاثة زوايا (α,β,γ) بحيث تحقق $R = R(\alpha,\beta,\gamma)$ كما هو معطى في المعادلة (4.44). (وبالطبع فإن المعادلات الناتجة ستختلف عن مثيلاتها فيما يخص زوايا أويلر Euler ذات التركيب ZYX).

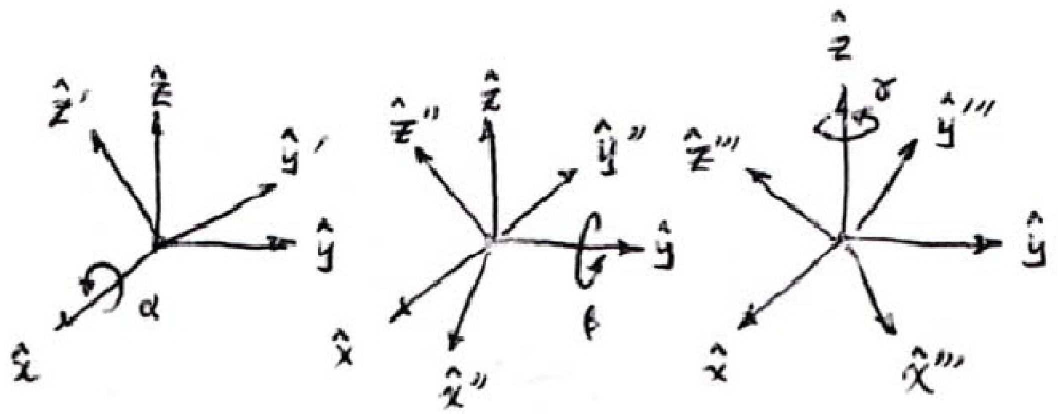
من خلال تحليل ميكانيزم المعصم في كلا الحالتين (التركيب ZYX و التركيب ZYZ)، فإنه من الواضح أنه من أجل تعريف بارامترات زوايا أويلر Euler، فإن الذي يهم في الحقيقة هو أن محور الدورأن 1 متعامد مع محور الدوران 2، ومحور الدوران 2 متعامد بدوره مع محور الدوران 3 (وليس من الضروري أن يكون محور الدوران 1 متعامداً مع محور الدوران 3). وبالتالي يمكن أن نكتب أي تسلسل للدورانات وفق هذه القاعدة بالشكل :

$$\mathrm{Rot}(axis1,\alpha).\,\mathrm{Rot}(axis2,\beta).\,\mathrm{Rot}(axis3,\gamma) \qquad (4.45)$$

حيث إن المحور 1 متعامد مع المحور2، والمحور 2 متعامد مع المحور 3. وهذا التسلسل يمكن أن يقدم تمثيلاً بارامترياً من ثلاثة بارامترات لـ SO(3). ولاحقاً في هذا الفصل، سوف نرى كيفية التعبير عن الدوران حول محور ما ليس بالضرورة أن يكون محوراً للواحدة (أو شعاعاً للواحدة) لجملة المحاور المرجعية.

4.2.4. زوايا الالتفاف - الانحدار - الانعراج Roll - Pitch - Yaw:

سابقاً في هذا الفصل، أوضحنا أن مصفوفة الدوران يمكن أن تستخدم لتوصيف تحول الجسم الصلب من أحد الاتجاهات إلى اتجاه آخر. وهنا سنلقي الضوء على نقطة جديرة بالاهتمام والتي تتضمن تمثيلاً آخر ثلاثي البارامترات لمصفوفة الدوران، وهو زوايا الالتفاف - الانحدار - الانعراج Roll - Pitch - Yaw. بالنظر إلى الشكل (4.5)، فإذا كانت لدينا جملة محاور بحيث تكون مصفوفة الدوران في الحالة الصفرية مساوية للمصفوفة الواحدية (أي R=I)، فسنقوم بداية بتدوير جملة المحاور هذه بمقدار الزاوية γ حول المحور $\hat{x}$ لهذه الجملة، وبعد ذلك قمنا بتدوير الجملة بمقدار الزاوية β حول المحور $\hat{y}$، وأخيراً قمنا بتدوير الجملة بمقدار الزاوية α حول المحور $\hat{z}$ لهذه الجملة.



الشكل 4.5: توضيح زوايا الدوران الالتفاف – الانحدار – الانعراج Roll – Pitch – Yaw ذات التركيب XYZ.

وسنعمل الآن على استنتاج الصيغة المفصلة للشعاع $v \in R^3$ (والمعبر عنه على شكل مصفوفة عمودية بالنسبة لجملة المحاور الثابتة) والذي يتم تدويره حول المحور $\hat{x}$ للجملة الثابتة بمقدار الزاوية γ. والشعاع المدار سنشير إليه بـv' ويكون:

$$v' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} v \qquad (4.46)$$

فإذا قمنا بتدوير الشعاع v' حول المحور $\hat{y}$ لجملة المحاور الثابتة بمقدار الزاوية β، فإن الشعاع الناتج المدار v'' يمكن التعبير عنه في جملة المحاور الثابتة بالشكل:

$$v'' = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} v' \qquad (4.47)$$

وأخيراً، إذا قمنا بتدوير الشعاع v'' حول المحور $\hat{z}$ لجملة المحاور الثابتة بمقدار الزاوية α، ينتج لدينا الشعاع:

$$\acute{v}'' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \acute{v}' \qquad (4.48)$$

الآن إذا اعتبرنا أن الشعاع v موجود في جملة محاور مرجعية والتي محاور (أشعة) الواحدة لها تكون في حالتها الصفرية، وبحيث يكون اتجاه هذه الجملة يساوي المصفوفة الواحدية R=I، بالتالي فإنه يمكن تطبيق التسلسل السابق للدورانات على المحاور الثلاثة لجملة المحاور المرجعية ، وستكون اتجاهاتها الأخيرة هي :

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{Rot}(\hat{z},\alpha).\mathrm{Rot}(\hat{y},\beta).\mathrm{Rot}(\hat{x},\gamma).I$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}.I$$

$$= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \qquad (4.49)$$

وهذه الجداءات لثلاث لمصفوفات الدوران هو نفسه بالضبط ماتم الوصول إليه في حالة زوايا أويلر Euler ذات التركيب ZYX المعطاة في المعادلة (4.40). وهنا نلاحظ أن نفس جداء الثلاث دورانات يعطينا تفسيرين فيزيائيين مختلفين: التفسير الأول كسلسلة من الدورانات بالنسبة لجملة محاور الجسم (زوايا أويلر Euler ذات التركيب ZYX) والتفسير الثاني والذي يتم بعكس ترتيب الدورانات كسلسلة من الدورانات بالنسبة لجملة المحاور الثابتة (زوايا الانحراف - الانحدار - الانعراج Roll - Pitch - Yaw ذات التركيب XYZ).

التعابير (الالتفاف - الانحدار - الانعراج Roll - Pitch - Yaw) غالباً ما تستخدم لوصف الحركة الدورانية لمركبة أو طائرة ذات أجنحة. على سبيل المثال، لنفترض أن جملة محاور الجسم متوضعة بحيث يكون المحور $\hat{x}$ باتجاه الحركة الأمامية للطائرة، والمحور $\hat{z}$ هو المحور الشاقولي والذي يتجه إلى الأسفل باتجاه الأرض (بفرض أن الطائرة تطير عند مستوٍ معين فوق سطح الأرض)، والمحور $\hat{y}$ يتمد على طول اتجاه الجناح. بالتالي فإن حركات الالتفاف - الانحدار - الانعراج Roll - Pitch - Yaw سوف تكون معرفة وفقاً لزوايا الالتفاف - الانحدار - الانعراج (α,β,γ) ذات التركيب XYZ كما في المعادلة (4.49).

في الحقيقة، إن هناك تفسيرين موجودين لأي تسلسل للدورانات وفقاً للمعادلة (4.45) حيث تكون المحاور المتعاقبة متعامدة، وصفي Descriptive وتفسير توجيهي Prescriptive لما يقابلها

من صيغة زوايا أويلر Euler. وصيغ زوايا أويلر Euler يمكن أن تعرف من خلال عدة طرق استناداً إلى ترتيب اختيار محاور الدوران، لكنها تمتلك سمات مشتركة وهي:

- الزوايا تمثل تسلسل الدورانات المأخوذة حول محاور جملة محاور الجسم أو حول محاور جملة المحاور الثابتة.
- محور الدوران الأول يجب أن يكون متعامداً مع محور الدوران الثاني، ومحور الدوران الثاني يجب أن يكون متعامداً مع محور الدوران الثالث.
- زاوية الدوران للمحور الأول والثالث تتراوح في قيمها ضمن مجال من رتبة 2π، في حين أن زاوية الدوران للمحور الثاني تتراوح قمتها ضمن مجال من رتبة π.

4.2.5. الإحداثيات الأسية Exponential Coordinates:

سنقدم الآن طريقة أخرى لتمثيل الدورانات بثلاثة برامترات، يسمى هذا التمثيل بالإحداثيات الأسية Exponential Coordinates. حيث وجدنا في التمثيل باستخدام زوايا أويلر Euler أن مصفوفة الدوران يمكن التعبير عنها كجداء ثلاثة دورانات، وكل من هذه الدورانات يعتمد على برامتر واحد فقط. الإحداثيات الأسية تشخص بصورة بارامترية مصفوفة الدوران عن طريق استخدام محور دوران واحد فقط (يعبر عن هذا المحور بالشعاع ω الذي هو بمثابة شعاع واحدة)، مع زاوية الدوران θ حول ذاك المحور، وبالتالي فإن الشعاع $r = \omega\theta \in R^3$ يقدم تمثيلاً ثلاثي البارامترات للدوران. وهذا التمثيل هو غالباً ما تتم دراسته باستخدام خصائص معادلات التفاضل الخطي Linear Differential، والتي سنقوم بمراجعة بعض نتائجها.

4.2.5.1. بعض النتائج الأساسية المستخلصة من معادلات التفاضل الخطي:

لنبدأ من أبسط معادلة تفاضل خطي عددي:

$$\dot{x}(t) = ax(t) \qquad (4.50)$$

حيث $x(t) \in R$ و $a \in R$ وهو عبارة عن ثابت، ولنفترض أن الشرط الابتدائي $x(0) = x_0$ قد أعطي لنا ($\dot{x}(t)$ تشير إلى مشتق $x(t)$ بالنسبة لـ t). إن المعادلة (4.50) تمتلك حلاً يعطى بالشكل:

$$x(t) = e^{at}x_0$$

ومن الجيد لنا أن نتذكر سلسلة تايلور Tylor للتوابع الأسية، حيث نجد أن:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots$$

والآن لنفترض أن لدينا معادلة التفاضل الخطي الشعاعي التالية:

$$\dot{x}(t) = Ax \qquad (4.51)$$

حيث $x(t) \in R^n$ و $A \in R^{n\times n}$ وهذه المصفوفة ثابتة، والشرط الابتدائي لدينا $x(0) = x_0$ قد أعطي لنا. من النتيجة العددية السابقة، يمكن لأحدنا أن يخمن أن الحل يمكن أن يكون بالشكل:

$$x(t) = e^{At}x_0 \qquad (4.52)$$

إن المصفوفة الأسية e^{At} تحتاج لأن يتم توضيحها بصورة أفضل. لذلك سنقوم مرة أخرى بمحاكاة الحالة العددية السابقة، وسنقوم بكتابة المصفوفة الأسية بالشكل الآتي:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots \qquad (4.53)$$

السؤال الأول الذي يخطر على ذهننا الآن هو تحت أي شرط يمكن لهذه السلسلة أن تتقارب، بحيث تكون هذه المصفوفة الأسية قد صيغت بشكل جيد. ومن الواضح هنا أنه إذا كانت المصفوفة A ثابتة ومنتهية، فإن السلسلة سوف تقترب بشكل قطعي إلى حد منته، والبرهان على هذا موجود في أغلب المراجع المتعلقة بمعادلات التفاضل الخطي، ولن نقوم بإدراجه هنا.

السؤال الثاني يتعلق فيما إذا كانت المعادلة (4.52) هي بالفعل حلاً للمعادلة (4.51). لذلك وبإجراء عملية الاشتقاق على المعادلة (4.52) نجد:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)x_0 \\
&= \frac{d}{dt}\left(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots\right)x_0 \\
&= \left(A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \cdots\right)x_0 \\
&= Ae^{At}x_0 \\
&= Ax(t) \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

ونجد من ذلك أن $x(t)=e^{At}x_0$ هو بالفعل حل للمعادلة.

ونلاحظ من خلال السطر الرابع من المعادلة (4.54)، أنه يمكن إخراج A كعامل مشترك إلى اليمين، أي:

$$\dot{x}(t) = e^{At}Ax_0$$

ونحن نعلم كقاعدة عامة في جداء المصفوفات أنه من أجل أي مصفوفتين مربعتين A و B، يمكن القول أن $AB \neq BA$، لكن في المقابل فإن المساواة التالية دائماً محققة:

$$Ae^{At} = e^{At}A \qquad (4.55)$$

من أجل أية مصفوفة مربعة A وأي عدد t (ويمكن التأكد من ذلك باستخدام سلسلة النشر للمصفوفات الأسية).

إن المصفوفة الأسية e^{At} تم تعريفها على كونها سلسلة غير منتهية، ولكن الصيغة المنتهية لهذه المصفوفة هي أيضاً متاحة، فعلى سبيل المثال، إذا كان بالإمكان كتابة المصفوفة A بالشكل التالي $A = PDP^{-1}$ حيث $D \in R^{n\times n}$ و $P \in R^{n\times n}$، حيث P مصفوفة قابلة للعكس (لها معكوس)، بالتالي فإننا نجد:

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots \\ &= I + (PDP^{-1})t + (PDP^{-1})(PDP^{-1})\frac{t^2}{2!} + \cdots \\ &= P\left(I + Dt + \frac{(Dt)^2}{2!} + \cdots\right)P^{-1} \\ &= Pe^{Dt}P^{-1} \qquad (4.56) \end{aligned}$$

فإذا كانت المصفوفة D بالإضافة إلى ما سبق هي مصفوفة قطورة Diagonal، أي أنه يمكن كتابتها بالشكل $D = \mathrm{diag}\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$، فإن المصفوفة الأسية يمكن ببساطة أن تكافئ:

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_n t} \end{bmatrix} \qquad (4.57)$$

وسنلخص النتيجة السابقة بالخاصية التالية:

الخاصية 4.7. إن معادلة التفاضل الخطي $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ذات الشرط الابتدائي $x(0) = x_0$، حيث $A \in R^{n\times n}$ هي مصفوفة ثابتة و $x(t) \in R^n$، تمتلك حلاً يعطى بالعلاقة:

$$x(t) = e^{At}x_0 \qquad (4.58)$$

حيث:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots \qquad (4.59)$$

وتكون المصفوفة الأسية e^{At} تحقق الخصائص التالية:

(i) إن:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

(ii) إذا كانت المصفوفة A تكتب بالشكل التالي $A = PDP^{-1}$ حيث $D \in R^{n\times n}$ و $P \in R^{n\times n}$ حيث P مصفوفة قابلة للعكس، بالتالي:

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

(iii) إذا كان $AB = BA$، فإن $e^A e^B = e^{A+B}$.

(iv) إن $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

الخاصية الثالثة يمكن استنتاجها عن طريق نشر المصفوفات الأسية ومقارنة الحدود. والخاصية الرابعة يمكن استنتاجها عن طريق جعل $B = -A$ في الخاصية الثالثة.

هناك نظرية في الجبر الخطي يمكن أن تساعد في إيجاد صيغة منتهية للمصفوفة الأسية e^{At}، وهي نظرية كيلي – هاملتون Cayley - Hamilton، والتي تنص (بدون برهان):

الخاصية 4.8. إذا كانت لدينا المصفوفة $A \in R^{n\times n}$ بحيث تكون ثابتة، فإن هذه المصفوفة يمكن كتابتها بشكل متعدد الحدود Polynominal كالآتي:

$$p(s) = \det(Is - A) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0$$

ومنه:

$$p(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0$$

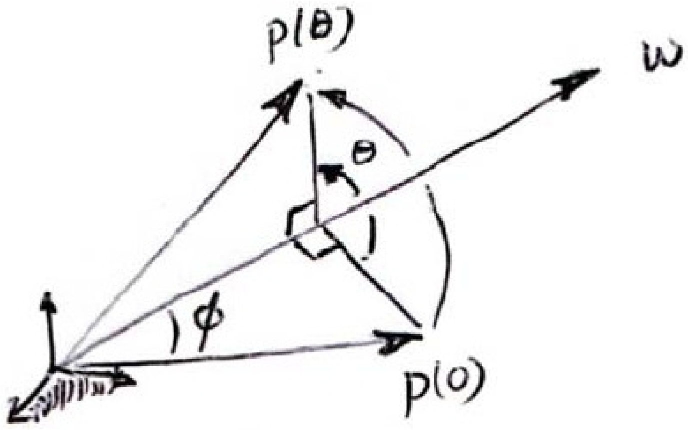
4.2.5.2. الدورانات باستخدام الإحداثيات الأسية:

في تمثيل الدورانات باستخدام الإحداثيات الأسية، فإن الدوران يمكن أن يتم تمثيله عن طريق محور وحيد للدوران بالإضافة إلى زاوية دوران حول هذا المحور. فبالنظر إلى الشكل (4.6)، لنفترض أن لدينا شعاعاً ثلاثي الأبعاد $p(0)$ يتم تدويره بزاوية θ حول محور دوران ثابت ω لـ $p(\theta)$، حيث نفترض أن جميع القيم معبر عنها في جملة محاور إحداثية ثابتة و $||\omega|| = 1$. وهذا الدوران يمكن أن يحدث إذا تخيلنا أن الشعاع $p(0)$ خاضع للدوران حول ω بمعدل ثابت يساوي 1 rad/sec، من الزمن $t = 0$ إلى الزمن $t = \theta$. وليكن $p(t)$ يشير إلى هذا المسار. بالتالي فإن السرعة $p(t)$، والمشار إليها بـ $\dot{p}$، تعطى بالعلاقة:

$$\dot{p} = \omega \times p \qquad (4.60)$$

وللتأكد من صحة ذلك، لتكن ϕ هي الزاوية بين $p(t)$ و ω. ويمكننا أن نلاحظ أن p يرسم دائرة بنصف قطر $||p||\sin\phi$ حول المحور ω. بالتالي فإن $\dot{p} = \omega \times p$ هو مماس للمسار ويتمتلك قيمة قدرها $||p||\sin\phi$، والتي هي بالضبط المعادلة (4.60).

سنقترح الآن طريقة أخرى للتعبير عن الجداء الخارجي لشعاعين. ولهذا الغرض، سنقدم المفهوم التالي:



الشكل 4.6: الشعاع p(0) يتم تدويره بزاوية θ حول المحور ω لـ p(θ).

تعريف 4.3. ليكن لدينا الشعاع $\omega \in R^3$، نعرف المصفوفة التالية:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.61)$$

المصفوفة [ω] كما تم تعريفها في الأعلى هي عبارة عن مصفوفة متماثلة منحرفة Skew Symmetric، حيث يكون:

$$[\omega] = -[\omega]^T$$

بهذا التعريف، فإن عمليات حساب بسيطة تلزمنا لتأكيد الخصائص التالية:

الخاصية 4.9. ليكن لدينا شعاعين $x,y \in R^3$، جداؤهما الخارجي x×y يمكن الحصول عليه كالاتي:

$$x \times y = [x]y \qquad (4.62)$$

حيث [x] هي المصفوفة المتماثلة المنحرفة التي تمثل الشعاع x. وأيضاً يمكن أن نجد:

$$[x \times y] = [x][y] - [y][x] \qquad (4.63)$$

وهناك أيضاً خاصية مفيدة من أجل الدورانات والمصفوفات المتماثلة المنحرفة وهي الخاصية التالية:

الخاصية 4.10. ليكن لدينا $\omega \in R^3$ و $R \in SO(3)$، فإن المعادلة التالية دائماً محققة:

$$R[\omega]R^T = [R\omega] \qquad (4.64)$$

البرهان: ليكن r_i^T هو عبارة عن الصف i للمصفوفة R، بالتالي يكون:

$$R[\omega]R^T = \begin{bmatrix} r_1^T(\omega \times r_1) & r_1^T(\omega \times r_2) & r_1^T(\omega \times r_3) \\ r_2^T(\omega \times r_1) & r_2^T(\omega \times r_2) & r_2^T(\omega \times r_3) \\ r_3^T(\omega \times r_1) & r_3^T(\omega \times r_2) & r_3^T(\omega \times r_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -r_3^T\omega & r_2^T\omega \\ r_3^T\omega & 0 & -r_1^T\omega \\ -r_2^T\omega & r_1^T\omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [R\omega] \qquad (4.65)$$

باستخدام النتائج السابقة، فإن المعادلة (4.60) يمكن الآن أن تكتب بالشكل:

$$\dot{p} = [\omega]p \qquad (4.66)$$

مع وجود الشرط الابتدائي $p(0) = p_0$. وهي معادلة تفاضلية خطية من الشكل $\dot{x} = Ax$ والتي قمنا بدارستها من قبل، وحلها يكون من الشكل:

$$p(t) = e^{[\omega]t}p(0)$$

وحيث أنه يمكن التبديل بالرموز ما بين t و θ كنتيجة لافتراض أن الشعاع $p(t)$ يدور بمعدل ثابت 1 rad/sec (بعد t ثانية فإن $p(t)$ سيكون قد دار بمقدار t راديان)، فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها بالشكل:

$$p(\theta) = e^{[\omega]\theta}p(0)$$

المصفوفة $[\omega]$ هي ليست مصفوفة قطورة، وسنعمل على إيجاد صيغة منتهية لـ $e^{[\omega]\theta}$ وذلك باستخدام نظرية كيلي – هاميلتون Cayley – Hamilton من أجل $[\omega]$. بداية، فإن التشخيص المتعدد الحدود من أجل المصفوفة $[\omega]$ ذات البعد 3×3 يعطى بالشكل:

$$p(s) = \det(Is - [\omega]) = \det \begin{bmatrix} s & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & s & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & s \end{bmatrix}$$

$$= s^3 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)s$$

$$= s^3 + s$$

بالتالي فإن نظرية كيلي – هاملتون Cayley – Hamilton تقتضي أن:

$$[\omega]^3 + [\omega] = 0$$

أو:

$$[\omega]^3 = -[\omega]$$

لنقم الآن بنشر المصفوفة الأسية $e^{[\omega]\theta}$ على شكل سلسلة، وذلك بتبديل كل $[\omega]^3$ بـ $-[\omega]$، وكل $[\omega]^4$ بـ $-[\omega]^2$، وكل $[\omega]^5$ بـ $[\omega] = [\omega]^3 = -[\omega]$، وهكذا. وبالتالي فسوف نحصل على:

$$e^{[\omega]\theta} = I + [\omega]\theta + [\omega]^2 \frac{\theta^2}{2!} + [\omega]^3 \frac{\theta^3}{3!} + \cdots$$
$$= I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)[\omega] + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\right)[\omega]^2$$

وللتذكير فإننا نعلم أن سلاسل النشر لكل من $\sin\theta$ و $\cos\theta$ تعطى بالشكل:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

ومنه فإن المصفوفة الأسية $e^{[\omega]\theta}$ يمكن تبسيطها إلى الشكل:

الخاصية 4.11. إذا كان لدينا شعاع $\omega \in R^3$ حيث $\|\omega\| = 1$، وكان لدينا عدد ما $\theta \in R$ فإن:

$$e^{[\omega]\theta} = I + \sin\theta\,[\omega] + (1 - \cos\theta)[\omega]^2 \qquad (4.67)$$

وهذه الصيغة تعرف أيضاً بصيغة رودريغز Rodrigues للدوران.

4.2.5.3. المصفوفة اللوغاريتمية Logarithm لمصفوفة الدوران:

رأينا إلى الآن أن جداء أي شعاع $v \in R^3$ بالمصفوفة الأسية $e^{[\omega]\theta}$ سوف يؤدي إلى تدوير الشعاع v حول ω بمقدار الزاوية θ. ومهمتنا التالية هي أن نثبت أنه من أجل أية مصفوفة دوران $R \in SO(3)$، فإنه بإمكاننا أن نجد شعاعاً ω وعدداً θ بحيث يكون $R = e^{[\omega]\theta}$. ومن ثم وبتعريف $r = \omega\theta \in R$، فإننا سنطلق على المصفوفة المتماثلة المنحرفة $[r]$ اسم المصفوفة اللوغارتمية للمصفوفة R. وبهذه الطريقة يمكننا تأكيد أن المصفوفة الشعاعية r تعبر عن تمثيل آخر ثلاثي البارامترات للدوران. وبنشر كل الحدود لـ $e^{[\omega]\theta}$ في المعادلة (4.67) فإن ذلك يقودنا إلى الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} c_\theta + \omega_1^2(1-c_\theta) & \omega_1\omega_2(1-c_\theta) - \omega_3 s_\theta & \omega_1\omega_3(1-c_\theta) + \omega_2 s_\theta \\ \omega_1\omega_2(1-c_\theta) + \omega_3 s_\theta & c_\theta + \omega_2^2(1-c_\theta) & \omega_2\omega_3(1-c_\theta) - \omega_1 s_\theta \\ \omega_1\omega_3(1-c_\theta) - \omega_2 s_\theta & \omega_2\omega_3(1-c_\theta) + \omega_1 s_\theta & c_\theta + \omega_3^2(1-c_\theta) \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

حيث $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ هي عناصر الشعاع ω،وهنا استخدامنا التعابير الاختزالية التالية لكل من التوابع $s_\theta = \sin\theta$ و $c_\theta = \cos\theta$. وبجعل المعادلة أعلاه مساوية للمصفوفة $R \in SO(3)$ فإننا نستطيع أن نستخلص ما يلي:

$$r_{32} - r_{23} = 2\omega_1 \sin\theta$$

$$r_{13} - r_{31} = 2\omega_2 \sin\theta$$

$$r_{21} - r_{12} = 2\omega_3 \sin\theta$$

وطالما أن $\theta \neq 0$ (أو بشكل مكافئ، θ ليست من المضاعفات الصحيحة لـ π) يمكننا أن نكتب:

$$\omega_1 = \frac{1}{2\sin\theta}(r_{32} - r_{23})$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2\sin\theta}(r_{13} - r_{31})$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2\sin\theta}(r_{21} - r_{12})$$

المعادلات السابقة يمكن التعبير عنها على شكل مصفوفة متماثلة منحرفة بالشكل التالي:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^T) \qquad (4.69)$$

ونحن نعلم أن ω تمثل محور الدوران للمصفوفة R. ولأن $\sin\theta$ هو حد موجود في المقام، فإن $[\omega]$ لن يتم إيجادها بالشكل المناسب في حال كون θ أحد المضاعفات الصحيحة لـ π. وسندرس هذه الحالة فيما بعد، ولكن لنفترض الآن أن هذه الحالة ليست هي حالتنا، وسنوجد صيغة لإيجاد الزاوية θ. فبجعل R مساوية للمعادلة (4.68) وبحساب أثر Trace المصفوفتين على كلا الجانبين (أثر مصفوفة هو عبارة عن حاصل جمع عناصر قطرها) نجد:

$$\operatorname{tr} R = r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2\cos\theta \qquad (4.70)$$

ويمكن استنتاج العلاقة السابقة باعتبار $\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2 = 1$. ومن أجل أية قيمة لـ θ تحقق المعادلة (4.70) بحيث لاتكون الزاوية θ مضاعفاً صحيحاً لـ π، فإن R يمكن التعبير عنها بشكل أسي بالشكل $e^{[\omega]\theta}$ باستخدام $[\omega]$ كماهي معطاة بالمعادلة (4.69).

لنعد الآن إلى الحالة التي تكون فيها الزاوية $\theta = k\pi$، حيث k هو عدد صحيح. عندما يكون k عدداً صحيحاً زوجياً (أي $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$) فإن أثر المصفوفة R سيكون مساوياً لـ 3، أو بشكل مكافئ $R = I$، ويمكن الحصول على هذه النتيجة بسهولة حيث نجد أن $\theta = 0$ هو الحل الوحيد الممكن. وعندما يكون k عدداً صحيحاً فردياً (أي $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$)، فإن أثر المصفوفة R سيكون مساوياً لـ 1-، بالتالي فإن الصيغة الأسية (4.69) يمكن أن يتم تبسطيها إلى:

$$R = e^{[\omega]\pi} = I + 2[\omega]^2 \qquad (4.71)$$

وعناصر القطر للمصفوفة في المعادلة (4.71) يمكن أن نكتبها بالشكل:

$$\omega_i = \pm\sqrt{\frac{r_{ii}+1}{2}}\ ,\quad i = 1, 2, 3 \qquad (4.72)$$

في حين أن العناصر الغير القطرية تعطى بالمعادلات الثلاث التالية:

$$\begin{aligned} 2\omega_1\omega_2 &= r_{12} \\ 2\omega_2\omega_3 &= r_{23} \qquad\qquad (4.73) \\ 2\omega_1\omega_3 &= r_{13} \end{aligned}$$

من المعادلة (4.71) نلاحظ أن المصفوفة R يجب أن تكون متناظرة Symmetric: $r_{12} = r_{21}$ و $r_{23} = r_{32}$ و $r_{13} = r_{31}$. وكل المعادلات المتضمنة في (4.72) و(4.73) هي ضرورية من أجل الحصول على حل مجدٍ. وعند الحصول على حل ω، فإننا نجد أن $R = e^{[\omega]k\pi}$، حيث يكون $k = \pm\pi, \pm3\pi, \ldots$.

من السابق نستطيع القول أنه يوجد حلول من أجل θ على كامل المجال [0,2π] أو مضاعفاته. و إذا قمنا بقصر هذا المجال بحيث يصبح [0,π]، فإن الخوارزمية التالية يمكن أن تستخدم من أجل حساب المصفوفة اللورغارتمية لمصفوفة الدوران $R \in SO(3)$:

الخوارزمية: إذا كانت لدينا مصفوفة دوران $R \in SO(3)$، ونريد إيجاد $r = \omega\theta$، بحيث تكون الزاوية $\theta \in [0,2\pi]$ و $\omega \in R^3$، و $\|\omega\| = 1$، وحيث:

$$R = e^{[r]} = e^{[\omega]\theta} = I + \sin\theta\,[\omega] + (1-\cos\theta)[\omega]^2 \qquad (4.74)$$

فإن المصفوفة المتماثلة المنحرفة $[r] \in R^{3\times3}$ تسمى بالتالي المصفوفة اللوغاريتمية لمصفوفة الدوران R.

(i) إذا كانت $R = I$، فإن $\theta = 0$ و $[r] = 0$.

(ii) إذا كان $\mathrm{tr}\,R = -1$، فإن $\theta = \pi$، وستكون ω هي إي شعاع من الأشعة الثلاثة التالية بحيث تكون هي الحل المجدي:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{33})}}\begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ 1+r_{33} \end{bmatrix} \qquad (4.75)$$

أو:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{22})}}\begin{bmatrix} r_{12} \\ 1+r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix} \qquad (4.76)$$

أو:

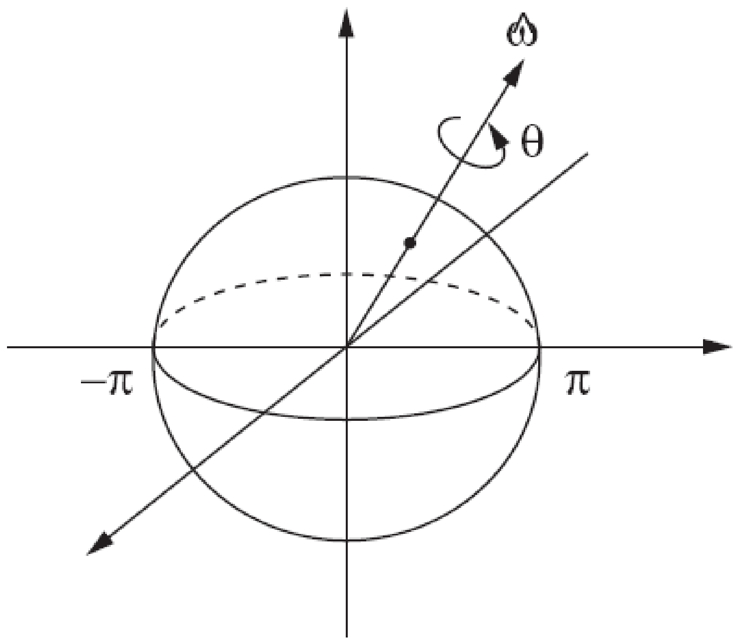
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{11})}} \begin{bmatrix} 1+r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix} \qquad (4.77)$$

(iii) وإلا فإن:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{tr\ R - 1}{2}\right) \in [0, \pi]$$

وأيضاً:

$$[\omega] = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^T) \qquad (4.78)$$



الشكل 4.7: SO(3) على شكل كرة مصمتة ذات نصف قطر π.

إن صيغة المصفوفة اللوغارتمية يمكن أن يتم توضيحها على شكل توصف لمجموعة الدورانات SO(3) بشكل كرة مصمتة ذات نصف قطر قدره π (انظر الشكل (4.7)): فإذا كانت لدينا نقطة $r \in R^3$ في هذه الكرة المصمتة، وإذا كانت $\omega = r / ||r||$ و $\theta = ||r||$، بحيث تكون $r = \omega\theta$. فإن مصفوفة الدروان الموافقة لـ r، يمكن تصورها على أنها الدوران حول المحور ω بزاوية مقدارها θ. ومن أجل أية مصفوفة دوران $R \in SO(3)$ بحيث يكون $tr\ R \neq -1$، فإنه يوجد شعاع r يقع داخل هذه الكرة المصمتة بحيث $e^{[r]} = R$. وفي حال كون $tr\ R = -1$، فإن log R عندها يعطى بنقطتين متعاكستين قطبياً Antipodal تقعان على سطح الكرة المصمتة. ومنه، فإذا

كان لدينا شعاع ما r بحيث يكون $R = e^{[r]}$، فإن $||r|| = \pi$ و $R = e^{[-r]}$ أيضاً محقق، وكل من الشعاعين r و $-r$ يعبران عن نفس الدوران فيما يتعلق بالمصفوفة R.

4.2.6. وحدة الكواتيرنيون (المركب المتعدد) Unit Quaternions:

إن من إحدى سيئات الإحداثيات الأسية والتمثيل الأسي للدوران في SO(3) تلك التي تظهر عند التقسيم على $\sin\theta$ في الصيغة اللوغارتمية لمصفوفة الدروان، حيث أن اللوغاريتم يتأثر من الناحية العددية بالقيم الصغيرة لدورانات الزاوية θ. ووحدة الكواتيرنيون هي طريقة بديلة لتمثيل الدورانات بحيث تخفف من بعض هذه المصاعب العددية، لكن استخدام هذه الطريقة سيكلفنا إضافة بارامتر رابع. وسوف نقوم بتوضيح تعريف وكيفية استخدام هذه الوحدة.

لنفترض أن لدينا $R \in SO(3)$ وهي مصفوفة دوران تمتلك تمثيلاً أسياً للإحداثيات $R = e^{[\omega]\theta}$، حيث كما نعلم $||\omega|| = 1$ و $\theta \in [0,\pi]$. فإن تمثيل المصفوفة R باستخدام وحدة الكواتيرنيون يمكن بناؤه بتعريف الشعاع $q \in R^4$ وفقاً للتالي:

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \omega \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \in R^4 \qquad (4.79)$$

حيث أن طويلة الشعاع q تساوي وبشكل واضح من التعريف $||q|| = 1$. ومن الناحية الهندسية، فإن q هي عبارة عن نقطة متوضعة داخل كرة واحدية ثلاثية الأبعاد في المجال R^4، ولهذا السبب فإن وحدة الكواتيرنيون يمكن أن تعرف من خلال هذه الكرة، ويشار إليها بالرمز S^3. وبصورة طبيعية فإنه من بين الأربعة إحداثيات لـ q، فإن ثلاثة منها يمكن أن يتم اختيارها بشكل مستقل. فإذا تذكرنا أن $1+2\cos\theta = tr\ R$، وباستخدام معادلة جيب التمام cosine لضعف زاوية ما، أي أن $\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1$، فإن عناصر الشعاع q يمكن الحصول عليها مباشرة من خلال عناصر مصفوفة الدوران R كمايلي:

$$q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \qquad (4.80)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4q_0}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \qquad (4.81)$$

ومن ناحية أخرى، فإذا كانت إحداثيات q معلومة لدينا (q_0,q_1,q_2,q_3)، فإنه وفقاً لها يمكن الحصول على مصفوفة الدوران R على هيئة دوران حول محور الواحدة ذو الاتجاه المعطى بـ (q_1,q_2,q_3)، بمقدار الزاوية $2\cos^{-1} q_0$. وبشكل أوضح يمكن أن نكتب:

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_0q_3 + q_1q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

من المعادلة أعلاه يمكن أن نلاحظ أن كل من $q \in S^3$ و الشعاع المعاكس قطبياً $-q \in S^3$ يقدمان نفس مصفوفة الدوران R. وبالتالي يمكن القول أنه من أجل أية مصفوفة دوران فإنه يقابلها تمثيلين باستخدام وحدة الكواتيرنيون بحيث يكونان متعاكسين قطبياً.

الخاصية الأخيرة والتي تهمنا فيما يتعلق بوحدة الكواتيرنيون هي جداء دورانين. فإذا كانت لدينا مصفوفتي الدوران $R_q, R_p \in SO(3)$، ولدى كل من هاتين المصفوفتين تمثيلاً باستخدام وحدة الكواتيرنيون $\pm q$, $\pm p \in S^3$ بالترتيب. فإن التمثيل بوحدة الكواتيرنيون من أجل الجداء R_qR_p يمكن الحصول عليه بأن نقوم بداية بتنسيق عناصر كل من q و p على شكل مصفوفتين عقدتين أبعادهما 2×2:

$$Q = \begin{bmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_0 + ip_1 & qp_2 + ip_3 \\ -p_2 + ip_3 & p_0 - ip_1 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

حيث i تشير إلى شعاع الواحدة المعقد (أو التخيلي). وعند إجراء الجداء $N = QP$، فإن عناصر المصفوفة N ستكون بالتالي:

$$N = \begin{bmatrix} n_0 + in_1 & n_2 + in_3 \\ -n_2 + in_3 & q_0 - in_1 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

وعناصر وحدة الكواتيرنيون للجداء R_qR_p المعبر عنها بـ $\pm\,(n_0,n_1,n_2,n_3)$ يمكن الحصول عليها من عناصر المصفوفة N:

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3 \\ q_0p_1 + p_0q_1 + q_2p_3 - q_3p_2 \\ q_0p_2 + p_0q_2 - q_1p_3 + q_3p_1 \\ q_0p_3 + p_0q_3 + q_1p_2 - q_2p_1 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

4.3. حركات الجسم الصلب Rigid Body Motions:

4.3.1. تعريف:

سنقوم الآن بدراسة التمثيلات التي تجمع كل من الاتجاه Orientation والموقع Position فيما يخص حركة الجسم الصلب. وقد يبدو هذا الأمر واضحاً إلى حد ما، فعندما يتم تعريف كل من جملة المحاور الثابتة وجملة المحاور المتحركة، فالاتجاه يمكن التعبير عنه من خلال مصفوفة الدوران $R \in SO(3)$، أما الموقع فيمكن التعبير عنه من خلال الشعاع $p \in R^3$. وبدلاً من تحديد كل من المصفوفة R والشعاع P بشكل منفصل، سنقوم بجمعهما بمصفوفة واحدة كما سيمر معنا.

تعريف 4.4. إن المجموعة الإقليدية Euclidean الخاصة SE(3)، والتي تعرف أيضاً باسم مجموعة حركات الجسم الصلب أو يمكن تسميتها التحويلات المتجانسة Homogeneous Transformations في المجال R^3، هي عبارة عن المجموعة التي تضم كل المصفوفات الحقيقة T ذات البعد 4×4 من الشكل:

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.86)$$

حيث R ϵ SO(3) و $p \in R^3$، و 0 تشير إلى الصف ثلاثي الأبعاد للشعاع الصفري.

والعنصر T ϵ SE(3) يمكن أحياناً الإشارة له بالشكل $T = (R,p)$. وسنبدأ هذه الفقرة بتوضيح بعض الخصائص للمجموعة SE(3)، ومن ثم بشرح الغرض من تجميع R و p على شكل مصفوفة بطريقة لم نألفها من قبل.

من التعريف السابق يجب أن يكون واضحاً لنا أن ستة إحداثيات سوف تلزمنا لتشخيص SE(3). والخيار الأكثر وضوحاً لنا بالنسبة للإحداثيات هو أننا يمكننا أن نستخدم إحدى التمثيلات ثلاثية البارامترات التي تم دراستها سابقاً من أجل المجموعة SO(3) (على سبيل المثال، زوايا أويلر Euler، والإحداثيات الأسية) من أجل تشخيص الدوران R، والإحداثيات الديكارتية الثلاثة المعروفة في المجال R^3 لتشخيص الموقع p. وبدلاً من ذلك، سوف نقوم باستنتاج الصيغة سداسية الأبعاد للإحداثيات الأسية لـ SE(3) والتي تبدي العديد من الميزات بصورة أكثر من باقي طرق التشخيص.

إن العديد من الميكانيزمات الروبوتية التي صادفناها يمكن اعتبارها على أنها مستوية. وباستذكار حركات الجسم الصلب في الحالة المستوية، يمكننا كتابة التعريف التالي:

تعريف 4.5. المجموعة الإقليدية Euclidean الخاصة SE(2) والتي تضم جميع المصفوفات الحقيقة T ذات البعد 3×3 من الشكل:

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.87)$$

حيث R ϵ SO(2) و $p \in R^2$، و 0 تشير إلى الصف ثنائي البعد للشعاع الصفري.

والمصفوفة T ϵ SE(2) ستكون دائما من الشكل:

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p_x \\ \sin\theta & \cos\theta & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث $\theta \in [0,2\pi]$ و $(p_x,p_y) \in R^2$.

4.3.2. خصائص:

الخاصيتين التاليتين لـ SE(3) يمكن التأكد منهما عن طريق الحساب المباشر.

الخاصية 4.12. ناتج جداء مصفوفتين من SE(3) هو أيضاً مصفوفة من SE(3).

الخاصية 4.13. معكوس مصفوفة من SE(3) دائماً موجود، وله الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.88)$$

وقبل البدء بالكلام عن الخاصية التالية، سوف نقدم المفهوم التالي:

تعريف 4.6. إذا كان لدينا $T = (R,p) \in SE(3)$ و $x \in R^3$، فإن الجداء $Tx \in R^3$ يمكن تعريفه بالشكل:

$$Tx = Rx + p \qquad (4.89)$$

ويمكن توضيح هذا المفهوم عن طريق الحقيقة التي تقول أنه إذا كان لدينا $x \in R^3$، فإنه يمكن تحويله إلى شعاع رباعي الأبعاد عن طريق إضافة 1، وبالتالي:

$$\begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rx + p \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (4.90)$$

والشعاع رباعي الأبعاد الناتج بإلحاق العدد 1 للشعاع x هو مثال عن الإحداثيات المتجانسة، والتحويل $T \in SE(3)$ هو وفقاً لذلك يسمى بالتحويل المتجانس.

وبالتعريف السابق لـ Tx، فإن الخاصية التالية يمكن أيضاً التأكد منها عن طريق الحساب المباشر.

الخاصية 4.14. لنفترض أن لدينا $T = (R,p) \in SE(3)$ و $x,y \in R^3$، فإن ما يلي محقق دائماً:

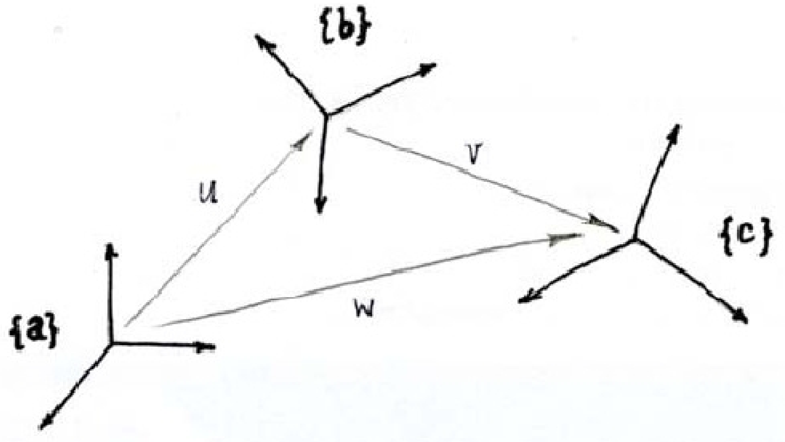
(i) $||Tx\text{-}Ty|| = ||x\text{-}y||$ حيث $||.||$ تشير إلى الطويلة الإقليدية القياسية Euclidean في المجال R^3، أي أن $||x||^2 = x^T x$.

(ii) $<Tx\text{-}Ty,Ty\text{-}Tx> = <x\text{-}z,y\text{-}z>$ وذلك من أجل كل $z \in R^3$، حيث $<.,.>$ تشير إلى الجداء الداخلي الإقليدي Euclidean القياسي في المجال R^3، وهذا يعني أنه: $<x,y> = x^T y$.

في الخاصية السابقة، T تم اعتبارها على أنها مصفوفة تحويل على نقاط في R^3، وهذا يعني أن المصفوفة T تحول النقطة x إلى الوضع Tx. ففي الخاصية الجزئية الأولى فإن T تحافظ على المسافات، في حين إنه في الخاصية الجزئية الثانية، فإن T تحافظ على الزوايا. وبتفصيل أكثر، إذا كان لدينا $x,y,z \in R^3$ تمثل رؤوساً ثلاثة لمثلث ما، فإن المثلث الذي تم تحويله عن طريق تحويلات رؤوسه {Tx,Ty,Tz} يمتلك نفس الأطوال ونفس الزوايا كما في المثلث {x,y,z} (أو، يمكن القول أن المثلثين متساويان في القياس Isometric). ويمكن لأحد ما أن يتخيل أن

النقطة x يمكن أن تكون نقطة من جسم صلب، وفي هذه الحالة فإن Tx تعبر عن الانزياح (التحول) الحاصل للجسم الصلب. ومن هذا المنطلق فإنه يمكن القول أن SE(3) يمكن اعتمادها مع حركات الجسم الصلب.

الخاصيات الأخرى المتبقية تصف المناحي الفيزيائية المختلفة التي تستتخدم فيها حركات الجسم الصلب. وكما في الدورانات، فإن التفسيرات الوصفية Descriptive وكذلك التوجيهية Prescriptive موجودة أيضاً فيما يتعلق بحركات الجسم الصلب. فبالنظر إلى الشكل (4.8)، لنفترض أن لدينا ثلاث جمل محاور مرجعية {a} و {b} و {c} في الفضاء الفيزيائي، ولنقم بتعريف الشعاع u ليكون الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور {a} إلى مبدأ إحداثيات جملة المحاور {b}، ولنقم أيضاً بتعريف الشعاعين v و w كما هو موضح بالشكل. ولنفترض أن لدينا $T_{ab} \in SE(3)$ وذلك للدلالة على الموقع والاتجاه لجملة المحاور {b} بالنظر إلها من جملة المحاور {a}، حيث إن R_{ab} تشير إلى اتجاه جملة المحاور {b} بالنسبة إلى جملة المحاور {a}، و $p_{ab} \in R^3$ هو الشعاع الممثل لـ u معبراً عنه في جملة المحاور {a}. T_{bc} و T_{ac} يتم تعريفهما بنفس الطريقة أيضاً، حيث $p_{ac} \in R^3$ هو الشعاع الممثل لـ w في جملة المحاور {a}، و $p_{bc} \in R^3$ هو الشعاع الممثل لـ v والمعبر عنه في جملة المحاور {b}.



الشكل 4.8: ثلاثة جمل للمحاور في الفضاء.

الخاصية 4.15. لنفترض أن لدينا ثلاث جمل محاور {a} و {b} و {c} في الفضاء الفيزيائي، بحيث يكون $T_{ab},T_{bc},T_{ac} \in SE(3)$ وكل منهم يعبر عن الانزياح النسبي بين هذه المحاور، فإننا نجد أن $T_{ab}T_{bc} = T_{ac}$.

البرهان: إذا كان كل من $T_{ab},T_{bc},T_{ac} \in SE(3)$ معطى بالشكل:

$$T_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{bc} = \begin{bmatrix} R_{bc} & p_{bc} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{ac} = \begin{bmatrix} R_{ac} & p_{ac} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وجدنا سابقاً من خلال دراسة خاصيات مصفوفات الدوران أن $R_{ab}R_{bc} = R_{ac}$. وبالعودة إلى الشكل (4.8)، وللتعبير عن العلاقة الشعاعية $u+v = w$ في جملة المحاور {a}، فإننا نحتاج

أولاً لإيجاد التعبير للشعاع v في جملة المحاور {a}. ومن الخاصية (4.6) فإن هذا التعبير هو ببساطة عبارة عن $R_{ab}p_{bc}$. وبالتالي يمكن أن نستنتج:

$$p_{ac} = R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \qquad (4.91)$$

ويمكن جمع ما تم الحصول عليه في معادلة المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{bc} & p_{bc} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ac} & p_{ac} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.92)$$

أو بشكل مكافئ: $T_{ab}T_{bc} = T_{ac}$.

إن مفهوم T_{ab} هو طريقة مقنعة جداً للحفاظ على متابعة العلاقات بين عدد من جمل المحاور. والخاصية التالية هي تتبع مباشرة للخاصية السابقة:

الخاصية 4.16. $T_{aa} = I$ و $T_{ab}^{-1} = T_{ba}$.

بالعودة مرة أخرى للشكل (4.8)، وبفرض أن q تشير إلى نقطة تقع ضمن الفضاء الفيزيائي ومقاسة بالنسبة لمبدأ إحداثيات جملة المحاور {c}. وليكن $q_b \in R^3$ هو التمثيل الشعاعي للنقطة q بالنسبة لجملة المحاور {b}، حيث أن $q_b = p_{bc}$. وبطريقة مماثلة، ليكن $q_a \in R^3$ هو التمثيل الشعاعي لنفس النقطة q بالنسبة لجملة المحاور {a}، حيث أن $q_a = p_{ac}$. ولأن p_{ac} و p_{bc} مرتبطان ببعضهما من خلال العلاقة (4.91)، فإن هذا يعني أن نفس العلاقة تنطبق على كل من q_a و q_b:

$$\begin{bmatrix} q_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_b \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (4.93)$$

أو عن طريق مفهوم الإحداثيات المتجانسة:

$$q_a = T_{ab}q_b \qquad (4.94)$$

وفي الحقيقة نحنا قمنا ببرهنة التالي:

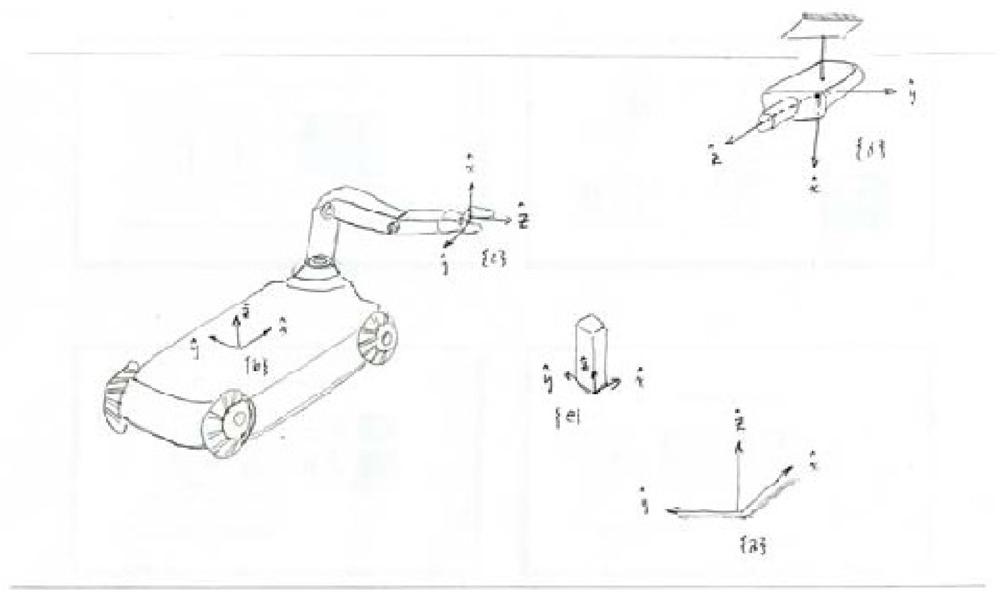
الخاصية 4.17. إذا كانت لدينا نقطة q في الفضاء الفيزيائي، وكان كل من $q_a \in R^3$ و $q_b \in R^3$ هما الشعاعان اللذان يشيران إلى إحداثيات هذه النقطة بالنسبة لجملة المحاور {a} و {b} على الترتيب، فإن:

$$q_a = T_{ab}q_b \qquad (4.95)$$

حيث $T_{ab}q_b$ هي عبارة عن الجانب الأيمن من المعادلة (4.93).

مثال:

الشكل (4.9) يظهر ذراعاً لروبوت مجمعة على قاعدة متنقلة ذات عجلات، وكاميرا مثبة على السقف. إن جملتي المحاور {b} و {c} هما بالترتيب مربوطتان بالقاعدة ذات العجلات وبالنهاية العاملة لذراع الروبوت، وجملة المحاور {d} مربوطة بالكاميرا. وتم اختيار جملة محاور إحداثية {a} ثابتة كما في الشكل. ويجب على الروبوت أن يمسك الجسم حيث جملة المحاور {e} مربوطة به. وبفرض أن التحويلات T_{db} و T_{de} يمكن حسابهما بالاعتماد على القياسات المستمدة من الكاميرا. والتحويل T_{bc} يمكن الحصول عليه عن طريق الدراسة الكينماتيكية الأمامية Forward Kinematics للأوضاع الحالية للمفاصل. ويفترض أن يكون التحويل T_{ad} معلوماً لدينا. ولنفترض أن هذه التحويلات المعلومة أعطيت لنا بالشكل التالي:



الشكل 4.9: تعيين جمل المحاور المرجعية.

$$T_{db} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 250 \\ 0 & -1 & 0 & -150 \\ -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{de} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 300 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ -1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{ad} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 400 \\ 0 & -1 & 0 & 50 \\ -1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 30 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -40 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ووبهدف جعل ذراع الروبوت يلتقط الجسم، فإن T_{ce} يجب أن يتم تحديدها. ونحن نعلم أن:

$$T_{ab}T_{bc}T_{ce} = T_{ad}T_{de}$$

والمقدار الغير معلوم لنا بالإضافة إلى T_{ce} هو T_{ab}. وعلى كل حال فإنه يمكن تحديد T_{ab} بالشكل $T_{ab} = T_{ad}T_{ddb}$، وبالتالي فيمكن تحديد T_{ce} كالآتي:

$$T_{ce} = (T_{ad}T_{db}T_{bc})^{-1}T_{ad}T_{de}$$

ومن التحويلات المعطاة لنا يمكن أن نجد:

$$T_{ad}T_{de} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 280 \\ 0 & 1 & 0 & -50 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

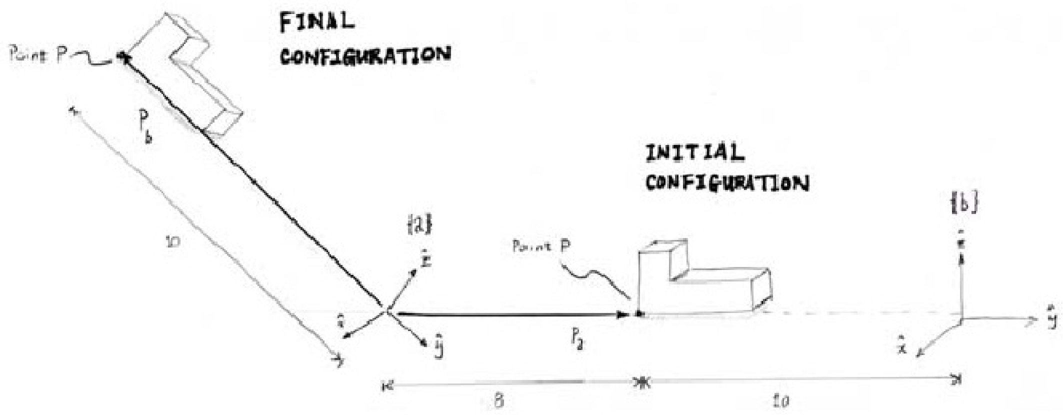
$$T_{ad}T_{db}T_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 230 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 160 \\ 1 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(T_{ad}T_{db}T_{bc})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -75 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & -260/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 130/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لقد توصلنا إلى هذه النتيجة عن طريق دراسة التفسير التوجيهي لحركة الجسم الصلب. إن الشكل (4.10) يظهر جسماً صلباً تمت إزاحته (نقله) من هيئة ابتدائية ما إلى هيئة جديدة. {a} هي

جملة المحاور الثابتة، وحركة الجسم الصلب تم تمثيلها باستخدام المصفوفة T_{ba} المنتمية للمجموعة الإقليدية الخاصة SE(3) (وسنقوم بشرح كيفية تحديد جملة المحاور {b} من خلال هيئتين للجسم الصلب معلومتين بالنسبة لنا). إذا كانت p تشير إلى نقطة من الجسم الصلب، و p_b $\epsilon\ R^3$ هو الشعاع الذي يعبر عن إحداثيات النقطة p في الهيئة التي تم انزياحها، فإنه بإمكاننا أن نستنتج العلاقة:

$$p_b = T_{ba} p_a \qquad (4.96)$$



الشكل 4.10: انتقال الجسم الصلب من هيئة بدائية إلى هيئة نهائية

جملة المحاور {b} الآن يمكن رسمها بحيث يكون موقعها نسبة لهيئة الجسم الصلب الابتدائية هو نفسه موقع جملة المحاور {a} نسبة لهيئة الجسم الصلب المنزاح (المنقول) (انظر الشكل 4.10). ولهذا المثال، فإن T_{ba} تعطى بالشكل:

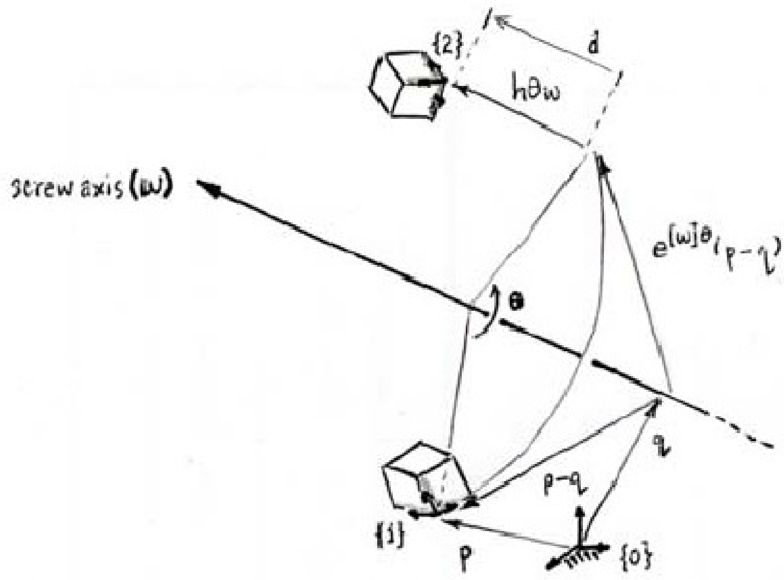
$$T_{ba} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -18 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.97)$$

4.3.3. الحركات اللولبية Screw Motions:

4.3.3.1. التمثيل الرياضي:

في المثال المستوي الذي تم إيراده في بداية هذا الفصل، رأينا أن أي انتقال (انزياح) للجسم الصلب يمكن أن يتحقق عن طريق دوران الجسم الصلب حول نقطة ما ثابتة في المستوي (وفي حال الانتقال الصافي Pure Translation (انسحاب بدون دوران)، فإن هذه النقطة تقع في اللانهاية). وهناك نتيجة شبيهة متعلقة بانتقالات الجسم الصلب في الحالة الفضائية، وتسمى هذه النتيجة بنظرية كاسيلز - موزي Chasles - Mozzi، والتي تنص على أن أي انزياح للجسم الصلب يمكن أن يتم التعبير عنه على أنه دوران حول محور ما في الفضاء، متبوع بانتقال صافي (انسحاب) يكون موازياً لهذا المحور. وفي الحقيقة، إن التبديل بين الانسحاب والدوران من حيث

الترتيب سيحافظ على نفس نتيجة الانزياح (الانتقال). ونستطيع تخيل ذلك من خلال تصور أن الدوران والانسحاب يتمان بنفس الوقت، ممايؤدي لحدوث الحركة اللولبية المعروفة.



الشكل 4.11: انوياح الجسم الصلب معبراً عنه على شكل حركة لولبية.

وفي هذه الفقرة سوف نقوم بدراسة التمثيل الرياضي للحركات اللولبية. الشكل (4.11) يظهر جسماً صلباً خاضعاً لعملية انزياح في فضاء ثلاثي الأبعاد. جميع الأشعة الموجود في الشكل معبر عنها بالنسبة لجملة محاور ثابتة {0}. وتمت الإشارة للهيئة الابتدائية والنهائية للجسم الصلب من خلال تعريف جملة المحاور {1} و {2} بالترتيب. ووفقاً لنظرية كاسيلز- موزي Chasles – Mozzi، فإن هناك محوراً للحركة اللولبية ممثلاً عن طريق خط مستقيم مار من خلال النقطة q ويتجه باتجاه شعاع الواحدة ω بحيث يمكن التعبير عن الانتقال على شكل حركة لولبية حول ذاك المحور. وتتكون الحركة اللولبية من دوران حول محور الحركة اللولبية بزاوية مقدارها θ، وانسحاب يكون موازيا لمحور الحركة اللولبية بمسافة قدرها d. وكما تم التنويه سابقاً، فإنه يمكن تغير الترتيب بين هاتين الحركتين (الانسحابية والدورانية) فلا يوجد فرق من حيث أية حركة تبدأ أولاً. وسنقوم اللآن باستنتاج التحويل المتجانس المرتبط بالحركة اللولبية. فبفرض أن الانزياحات النسبية T_{01} و T_{02} معطاة لنا بالشكل:

$$T_{01} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.98)$$

$$T_{02} = \begin{bmatrix} R' & p' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.99)$$

وإذا كانت خطوة اللولب Pitch، والمشار لها بالرمز h، وهي مقدار عددي معرف بالشكل:

$$h = \frac{d}{\theta} \qquad (4.100)$$

فإنه من الشكل يمكن التعبير عن `R و `p كالتالي:

$$R' = e^{[\omega]\theta}R \qquad (4.101)$$

$$p' = q + e^{[\omega]\theta}(p - q) + h\theta\omega \qquad (4.102)$$

المعادلة الأولى تنتج من حقيقة كون الاتجاه لجملة المحاور {2} يمكن الحصول عليه عن طريق تدوير جملة المحاور {1} حول المحور ω بمقدار الزاوية θ. والمعادلة الثانية تأتي من خلال التحقق من أن `p هو الشعاع المحصل لجمع الأشعة الثلاثة q و $e^{[\omega]\theta}(p\text{-}q)$ و hθω كما هو موضح بالشكل. والمعادلتين السابقتين يمكن جمعهم في المعادلة المصفوفية التالية:

$$\begin{bmatrix} R' & p' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & \left(I - e^{[\omega]\theta}\right)q + h\theta\omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.103)$$

والمصفوفة المنتمية إلى المجموعة SE(3) التالية:

$$\begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & \left(I - e^{[\omega]\theta}\right)q + h\theta\omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.104)$$

هي عبارة عن تمثيل التحويل المتجانس للحركة اللولبية. وفي هذا الفصل وأيضاً في الفصل القادم المتعلق بالتحليل الكينماتيكي، سوف نتطرق إلى الحالة التي يمكن التعبير بها عن هذه المصفوفة على شكل مصفوفة أسية، وذلك باللجوء إلى نفس الطريقة التي من خلالها تعم التعبير عن مصفوفة الدوران على شكل أسي لمصفوفة متماثلة منحرفة.

ولهذا الغرض، سوف نقدم المفهوم التالي:

تعريف 4.7. إذا كان لدينا $\omega, v \in R^3$، ليكن:

$$S = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \in R^6 \qquad (4.105)$$

حيث يمكن كتابة S أيضاً بالشكل $S = (\omega, v) \in R^6$. وهو عبارة عن شعاع سداسي الأبعاد ويطلق عليه اسم التلولب Twist. وسنقوم أيضاً بتعريف المصفوفة $[S] \in R^{4\times4}$ ذات الأبعاد 4×4 التالية:

$$[S] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.106)$$

حيث السطر السفلي من [S] يتكون من أصفار.

باستخدام المفهوم السابق، لنقم الآن بإيجاد صيغة متقاربة للمصفوفة الأسية التالية $e^{[S]\theta}$، حيث إن $S = (\omega, v)$ و $\omega \in R^3$ بحيث تحقق $\|\omega\| = 1$. وبالاختيار المناسب لـ v، فإن المصفوفة الأسية $e^{[S]\theta}$ يمكن أن تكون مساوية للمعادلة (4.104)، وتكون مهمتنا حينئذ هي إيجاد v. وبنشر الصفوفة الأسية على شكل سلسلة يقودنا لـ:

$$e^{[S]\theta} = I + [S]\theta + [S]^2 \frac{\theta^2}{2!} + [S]^3 \frac{\theta^3}{3!} + \cdots = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & G(\theta)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

حيث:

$$G(\theta) = I\theta + [\omega]\theta + [\omega]^2 \frac{\theta^2}{2!} + [\omega]^3 \frac{\theta^3}{3!} + \cdots$$

وبملاحظة التشابه بين $G(\theta)$ وسلسلة النشر من أجل $e^{[\omega]\theta}$، فقد يكون من البديهي أنه بإمكاننا أن نستنتج المعادلة التالية $I + G(\theta)[\omega] = e^{[\omega]\theta}$، وأن نستنتج أيضاً أن $G(\theta) = (e^{[\omega]\theta} - I)[\omega]^{-1}$. ولكن هذا خاطئ، لأن $[\omega]^{-1}$ غير موجودة (يمكن التأكد من ذلك بحساب $\det [\omega]$).

وبدلاً من ذلك سوف نستخدم النتيجة التي وصلنا إليها سابقاً $[\omega]^3 = - [\omega]$ والتي حصلنا عليها من خلال نظرية كيلي - هاميلتون Cayley - Hamilton. في هذه الحالة، فإن $G(\theta)$ يمكن أن يبسطها إلى الشكل:

$$\begin{aligned} G(\theta) &= I\theta + [\omega]\frac{\theta^2}{2!} + [\omega]^2 \frac{\theta^3}{3!} + \cdots \\ &= I\theta + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\right)[\omega] + \left(\frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} - \cdots\right)[\omega]^2 \\ &= I\theta + (1 - \cos\theta)[\omega] + (\theta - \sin\theta)[\omega]^2 \qquad (4.108) \end{aligned}$$

وبجمع هذه النتائج مع بعضها يمكن أن نقول:

الخاصية 4.18. إذا كان لدينا $\omega, v \in R^3$ وقمنا بتعريف $S = (\omega, v)$. وإذا كانت $\|\omega\| = 1$، فإنه من أجل $\theta \in R$ يكون:

$$e^{[S]\theta} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & (I\theta + (1 - \cos\theta)[\omega] + (\theta - \sin\theta)[\omega]^2)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

فإذا كانت $\omega = 0$، فإن $S = (0, v)$، وبالتالي:

$$e^{[S]\theta} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

والمعادلة السابقة يمكن التأكد منها مباشرة عن طريق نشر السلسلة لـ $e^{[S]\theta}$ مع جعل ω تساوي الصفر.

والآن سنجيب على السؤال المتعلق بكيفية اختيار v بحيث تكون المعادلة (4.109) مساوية للمعادلة (4.104). والجواب هو:

$$v = -[\omega]q + h\omega \qquad (4.111)$$

ويمكن التحقق من ذلك بتعويض v في المعادلة (4.109) وذلك باستخدام الخواص $[\omega]\omega = 0$ و $[\omega]^3 = -[\omega]$. وبهذا الاختيار لـ v، فإن الخطوة h للحركة اللولبية يمكن التعبير عنها بالعلاقة:

$$h = \omega^T v \qquad (4.112)$$

4.3.3.2. المصفوفة اللوغارتمية للتحويل المتجانس:

إن الاستنتاج السابق يرينا الدليل والبرهان على صحة نظرية كاسيلز - موزي Chasles - Mozzi. بحيث أنه إذا كان لدينا $(R,p) \in SE(3)$، فإنه يمكن إيجاد $S = (\omega,v)$ ورقم عددي θ بحيث يكون:

$$e^{[S]\theta} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.113)$$

وفي الحالة الأبسط، إذا كانت $R = I$، فإن $\omega = 0$، والاختيار الأفضل لـ v هو $v = p/\|p\|$ (وهذا يعني أن $\theta = \|p\|$ وهي مسافة الانسحاب). أما إذا كانت R ليست المصفوفة الواحدية وكان أيضاً $\operatorname{tr} R \neq -1$، فإن الحل يعطى بالشكل:

$$[\omega] = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^T) \qquad (4.114)$$

$$v = G^{-1}(\theta)p \qquad (4.115)$$

حيث θ تحقق المعادلة $\operatorname{tr} R = 1 + 2\cos\theta$. و $G^{-1}(\theta)$ يمكن إثبات أنها تعطى بالعلاقة التالية:

$$G^{-1}(\theta) = \frac{1}{\theta}I + \frac{1}{2}[\omega] + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)[\omega]^2 \qquad (4.116)$$

وأخيراً، إذا كان $\operatorname{tr} R = -1$، نختار $\theta = \pi$، و $[\omega]$ يمكن الحصول عليها عن طريق المصفوفة اللوغارتمية لـ SO(3). وعندما يتم تحديد كل من $[\omega]$ و θ، فإن v يمكن الحصول عليه من خلال العلاقة $v = G^{-1}(\theta)p$.

الخوارزمية: إذا كان لدينا $(R,p) \in SE(3)$، ونريد إيجاد $S = (\omega,v) \in \mathbb{R}^6$ و $\theta = [0,\pi]$ بحيث يكون $e^{[\omega]\theta} = R$.

(i) إذا كانت $R = I$، بالتالي نجعل $\omega = 0$ و $v = p/\|p\|$ و $\theta = \|p\|$.

(ii) إذا كان $\operatorname{tr} R = -1$، بالتالي نجعل $\theta = \pi$ و $[\omega] = \log R$ كما تم تحديدها من خلال المصفوفة اللوغارتمية في SO(3) في حالة $\operatorname{tr} R = -1$.

(iii) وإلا فإننا نحسب θ من العلاقة:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\operatorname{tr} R - 1}{2}\right) \in [0, \pi]$$

ويكون:

$$[\omega] = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^T) \qquad (4.117)$$

$$v = G^{-1}(\theta)p \qquad (4.118)$$

حيث $G^{-1}(\theta)$ يعطى بالعلاقة (4.116).

مثال:

وكمثال، يمكننا أن ندرس الحالة الخاصة لحركة الجسم الصلب والمتعلقة بالحالة المستوية وأن نستنتج المصفوفة اللوغارتمية لـ SE(2). بالنظر مرة أخرى للشكل (4.1 (b))، لنفترض أن الهيئة الابتدائية والنهائية للجسم ممثلة بالترتيب في SE(2) بالمصفوفتين:

$$T_{sb} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 1 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{sb} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 2 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

في هذا المثال، إن انزياح الجسم الصلب يحدث في المستوي x-y. والحركة اللولبية الموافقة لها تمتلك محوراً لهذه الحركة باتجاه المحور z، وستكون بخطوة تساوي الصفر. وشعاع التلولب Twist الممثل للحركة اللولبية سيكون بالشكل:

$$\omega = (0, 0, \omega_3)$$

$$v = (v_1, v_2, 0)$$

وباستخدام هذه الصيغة المختزلة، سوف نوجد الحركة اللولبية التي تنقل (تزيح) جملة المحاور من T_{sb} إلى T_{sc}، أي $T_{sc} = e^{[S]\theta}T_{sb}$، أو:

$$T_{sc}T_{sb}^{-1} = e^{[S]\theta}$$

حيث:

$$[S]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & v_1\\ \omega_3 & 0 & v_2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وهنا نستطيع أن نطبق خوارزمية المصفوفة اللوغارتمية بصورة مباشرة على $T_{sc}T_{sb}^{-1}$ من أجل الحصول على [S] و θ كالتالي:

$$[S]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وبدلاً من ذلك، يمكننا أن نلاحظ أن الانزياح ليس انسحابياً (حيث T_{sb} و T_{sc} لهما مركبتا دوران مختلفتان فيما بينهما بمقدار الزاوية $30°$) ومنه نستطيع أن نحدد بشكل سريع أن $\theta = 30°$، و أن $\omega_3 = 1$. ويمكن من الشكل أيضاً أن نحدد النقطة $q = (q_x,q_y)$ في المستوي x-y والتي يمر منها محور الحركة اللولبية، وفي هذا المثال، فإن هذه النقطة تعطى بـ $q = (3,3)$. ولأن هذه الحركة اللولبية خطوتها تساوي الصفر ($h = 0$)، فباستخدام العلاقة $v = -\omega\times q+h\omega$ يمكن أن نجد أن:

$$(v_x,v_y)=(q_y,-q_x)=(-3,3)$$

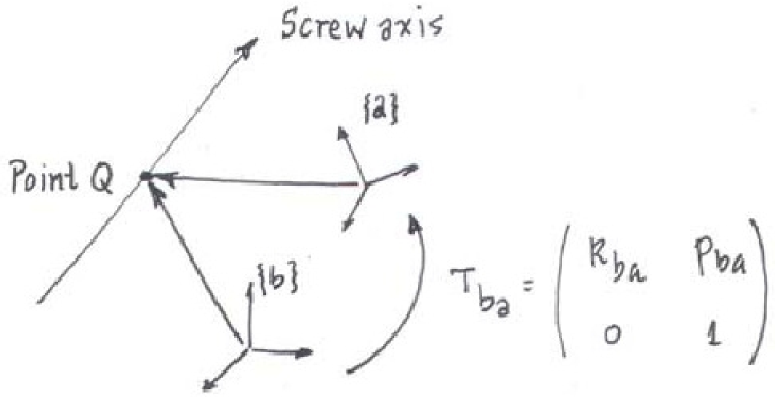
4.3.3.3. الانزياح عند تغيير جمل المحاور المرجعية:

سندرس الآن كيف يتحول شعاع التلولب للحركة اللولبية عند تغيير جمل المحاور المرجعية. ولهذا الغرض، سنفترض أنه بشكل عام لدينا حركة لولبية لها الخطوة h (انظر الشكل (4.12)). وسنختار نقطة لا على التعيين q من محور الحركة اللولبية، وسوف نشير إلى إحداثياتها نسبة لكل من جملتي المحاور المرجعيتين {a} و {b} بالترتيب حيث $q_a,q_b \in R^3$. وليكن شعاع التلولب للحركة اللولبية كما تتم رؤيته من جملة المحارو {a} معطى بالشكل $S_a = (\omega_a,v_a)$، حيث $v_a = -\omega_a\times q_a+h\omega_a$. وبطريقة مماثلة، $v_b = -\omega_b\times q_b+h\omega_b$. ولنفترض أنه لدينا التحويل المتجانس $T_{ba} = (R_{ba},p_{ba}) \in SE(3)$، وسنقوم الآن بالتعبير عن (ω_b,v_b) بدلالة (ω_a,v_a) و (R_{ba},p_{ba}).

من النتائج السابقة، نحن نعلم أن $\omega_b = R_{ba}\omega_a$ و $q_b = R_{ba}q_a+p_{ba}$ وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned}v_b &= -R_{ba}\omega_a\times(R_{ba}q_a+p_{ba})+hR_{ba}\omega_a\\ &= -[R_{ba}\omega_a]R_{ba}q_a-[R_{ba}\omega_a]p_{ba}+hR_{ba}\omega_a\\ &= -R_{ba}[\omega_a]R_{ba}^TR_{ba}q_0+[p_{ba}]R_{ba}\omega_a+hR_{ba}\omega_a\\ &= -R_{ba}[\omega_a]q_a+R_{ba}h\omega_a+[p_{ba}]R_{ba}\omega_b\\ &= R_{ba}(-[\omega_a]q_a+h\omega_a)+[p_{ba}]R_{ba}\omega_a\\ &= R_{ba}v_a+[p_{ba}]R_{ba}\omega_a \qquad (4.119)\end{aligned}$$

حيث قمنا بالاستفادة من الخواص $u\times v = [u]v$ و $R[u]R^T = [Ru]$ وذلك من أجل $u,v \in R^3$



الشكل 4.12: تحويل شعاع التلولب لحركة لولبية نتيجة لتغير جملة المحاور المرجعية.

و $R \in SO(3)$. وهذه المعادلات لـ ω_b و v_b يمكن كتابتها بالشكل المصفوفي المكافئ التالي:

$$\begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ba} & p_{ba} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\omega_a] & v_a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ba}^T & -R_{ba}^T p_{ba} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.120)$$

والمعادلة أعلاه يمكن كتابتها بالشكل $[S_b] = T_{ba}[S_a]T_{ba}^{-1}$، والتي يمكن التعبير عنها بصيغة شعاعية كالتالي:

$$\begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ba} & 0 \\ [p_{ba}]R_{ba} & R_{ba} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_a \\ v_a \end{bmatrix} \qquad (4.121)$$

وسنقدم الآن التحويل التالي المعبر عن العلاقة السابقة:

تعريف 4.8. إذا كان لدينا $S = (\omega, v) \in R^6$ و $S` = (\omega`, v`) \in R^6$ و $T = (R, p) \in SO(3)$، فإن الدالة الملحقة Adjoint Map $S` = Ad_T(S)$ يمكن تعريفها كالآتي:

$$S` = \begin{bmatrix} \omega` \\ v` \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = Ad_T(S) \qquad (4.122)$$

المفهوم $[Ad_T]$ يستخدم من أجل الإشارة إلى التمثيل المصفوفي ذي البعد 6×6 للتحويل الخطي Ad_T:

$$[Ad_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \qquad (4.123)$$

وباستخدام هذا المفهوم، فإن العادلة (4.122) يمكن أيضاً كتابتها كالتالي:

$$S` = [Ad_T]S \qquad (4.124)$$

والدالة الملحقة يمكن التعبير عنها بصورة مكافئة من خلال الشكل المصفوفي التالي:

$$[S`] = T[S]T^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} [\omega`] & v` \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R[\omega]R^T & [p]R\omega + Rv \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.125)$$

إن الدالة الملحقة تحقق الخصائص التالية، وكل منها يمكن التأكد من صحتها من خلال الحساب المباشر:

الخاصية 4.19. لنفترض أن لدينا $T_1,T_2 \in SE(3)$ و $S = (\omega,v)$، فإن:

$$Ad_{T_1}\left(Ad_{T_2}(S)\right) = Ad_{T_1T_2}(S) \qquad (4.126)$$

وأيضاً من أجل أي $T \in SE(3)$ فإن العلاقة التالية محققة دوماً

$$Ad_T^{-1} = Ad_{T^{-1}} \qquad (4.127)$$

الخاصية الجزئية الثانية تأتي من الخاصية الأولى وذلك من خلال اختيار $T_1 = T^{-1}$ و $T_2 = T$، بحيث:

$$Ad_{T^{-1}}\left(Ad_T(S)\right) = Ad_{T^{-1}T}(S) = Ad_I(S) = S \qquad (4.128)$$

الخاصية 4.20. لنفترض وجود حركة لولبية معبر عنها بالنسبة لجملة محاور مرجعية {a} عن طريق التلولب $S_a = (\omega_a,v_a)$، وبالنسبة لجملة محاور مرجعية أخرى {b}عن طريق التلولب $S_b = (\omega_b,v_b)$. بالتالي فإن S_a و S_b مرتبطان ببعضهما بالعلاقتين:

$$S_b = Ad_{T_{ba}}(S_a) \qquad (4.129)$$

$$S_a = Ad_{T_{ab}}(S_b) \qquad (4.130)$$

سننهي هذه الفقرة بمقارنة بين التفسير الوصفي والتوجيهي للحركة اللولبية. فبالعودة مرة أخرى للشكل (4.11)، نجد أن العلاقة بين T_{01} و T_{02} يمكن التعبير عنها بالتالي:

$$T_{02} = e^{[S]\theta}T_{01} \qquad (4.131)$$

$$T_{01}T_{12}T_{01}^{-1} = e^{[S]\theta} \qquad (4.132)$$

وهنا $e^{[S]\theta}$ يمكن عدها على أنها انزياح الجملة من T_{01} إلى T_{02}، وهذا هو التفسير التوجيهي للحركة اللولبية $e^{[S]\theta}$. T_{12}، يمكن أيضاً التعبير عنها كمصفوفة أسية $T_{12} = e^{[S]\theta}$ وذلك من أجل $S` = (\omega`,v`)$، حيث أن الحركة اللولبية $e^{[S`]\theta}$ هي التمثيل الوصفي للجملة {2} بحيث ينظر لها من الجملة {1}. وبتطبيق المعادلة التالية :

$$Pe^AP^{-1} = e^{PAP^{-1}}$$

نحصل على:

$$e^{[S]\theta} = T_{01} e^{[S`]\theta} T_{01}^{-1} \qquad (4.133)$$
$$= e^{(T_{01}[S`]T_{01}^{-1})\theta} \qquad (4.134)$$

وتبعاً لمفهوم الدالة الملحقة Adjoint، فإن العلاقة بين S و `S يمكن كتابتها بالشكل:

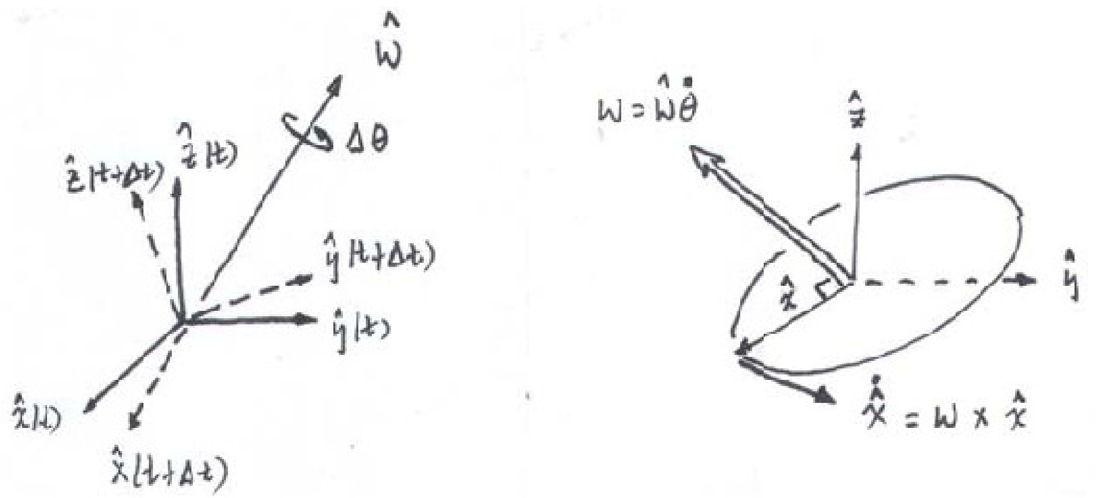
$$S = Ad_{T_{01}}(S`) \qquad (4.135)$$

حيث S هو التلولب الممثل للحركة اللولبية المعبر عنه نسبة للجملة {0}، بينما `S هو التلولب الممثل لنفس الحركة اللولبية معبراً عنها في الجملة {1} بما يحقق المعادلة السابقة.

4.4. السرعات والقوى:

4.4.1. السراعات الزاوية Angular Velocities:

سنقوم أولاً بدراسة السرعة الزاوية للجسم الصلب. بالنظر إلى الشكل ((a) 4.13)، لنفترض أن لدينا جملة محاور الجسم ذات أشعة الواحدة {$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$} والمربوطة بالجسم الصلب الذي يقوم بحركة دورانية. ولنقم بعملية الاشتقاق بالنسبة للزمن لأشعة الواحدة تلك. بداية مع الشعاع $\hat{x}$ ، حيث نلاحظ أن الشعاع $\hat{x}$ هو شعاع واحدة (طوله هي واحدة الطول)، بالتالي فإن اتجاه هذا الشعاع هو الذي يمكن أن يتغير مع الزمن (ونفس الأمر ينطبق على كل من $\hat{y}$ و $\hat{z}$). إذا درسنا جملة محاور الجسم عند الزمن t والزمن $t + \Delta t$ (مع العلم أن ما يهمنا الآن هو اتجاهات جملة محاور الجسم، وبغية التوضيح أكثر فإننا نرسم جملة المحاور هذه عند هاتين اللحظتين بحيث يكون مبدأ الإحداثيات هو نفسه) فإن التغير في اتجاهات جملة محاور الجسم من الزمن t إلى الزمن $t + \Delta t$ يمكن أن تم وصفه على أنه دوران بمقدار زاوية $\Delta\theta$ حول محور ما $\hat{w}$ يمر من مبدأ الإحداثيات.



الشكل 4.13: (a) شعاع السرعة الزاوية اللحظية Instantaneous. (b) حساب $\dot{\hat{x}}$ (مشتق $\hat{x}$ بالنسبة للزمن).

وعندما تتناهى قيمة Δt إلى الصفر، فإن السنبة $\Delta\theta/\Delta t$ تصبح ما يمسى معدل الدوران $\dot{\theta}$، والمحور $\hat{w}$ بطريقة مشابهة يمكن أن يعد وكأنه المحور اللحظي للدوران. في الحقيقة، إن كل من $\hat{w}$ و $\dot{\theta}$ يمكناننا من تعريف شعاع السرعة الزاوية كالتالي:

$$w = \hat{w}\dot{\theta} \qquad (4.136)$$

ومن المهم أن نلاحظ أن كل من معدل الدوران $\dot{\theta}$ واتجاه محور الدوران يمكن أن يتغيرا مع الزمن. وبالنظر إلى الشكل (4.13 (b))، فإنه من الواضح أن:

$$\dot{\hat{x}} = w \times \hat{x} \qquad (4.137)$$

$$\dot{\hat{y}} = w \times \hat{y} \qquad (4.138)$$

$$\dot{\hat{z}} = w \times \hat{z} \qquad (4.139)$$

لنقم الان بالتعبير عن هذه المعادلات بشكل أوضح بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية الثابتة. ولتكن $R(t)$ هي مصفوفة الدوران التي تصف اتجاه جملة محاور الجسم بالنسبة لجملة المحاور الثابتة. وليكن العمود الأول من المصفوفة $R(t)$، والمشار إليه بالرمز $r_1(t)$ يعبر عن $\hat{x}$ بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية الثابتة، وبشكل مشابه، $r_2(t)$ و $r_3(t)$ يعبران عن $\hat{y}$ و $\hat{z}$ بالترتيب وذلك بالنسبة لجملة المحاور الثابتة. لنفترض أن $\omega_s \in R^3$ هي السرعة الزاوية w وذلك بالنسبة لجملة المحاور الثابتة. وبالتالي فإن علاقات السرعة الثلاثة السابقة المعبر عنها في جملة المحاور الثابتة تصبح بالشكل.

$$\dot{r}_i = \omega_s \times r_i = [\omega_s]r_i, \qquad i = 1,2,3.$$

والثلاث معادلات السابقة يمكن إعادة هيكلتها إلى شكل معادلة مصفوفة واحدة:

$$\dot{R} = [\omega_s]R \qquad (1.140)$$

وبما أن $R^T = R^{-1}$، فإن المعادلة السابقة تصبح بالشكل:

$$\dot{R}R^T = [\omega_s] \qquad (1.141)$$

وهذه النتيجة تبرهن على أن $\dot{R}R^T$ ليست فقط مصفوفة متماثلة منحرفة، وإنما تعطي تفسيراً تفسيراً فيزيائياً بكونها السرعة الزاوية في جملة المحاور الإحداثية الثابتة.

والآن لتكن ω_b تعبر عن السرعة الزاوية w في جملة محاور الجسم. ولنرى كيفية الحصول على ω_b من ω_s والعكس بالعكس. لنعد إلى المفهوم السابق المتعلق بكتابة R على شكل R_{sb} (حيث أن R_{sb} تعني اتجاه جملة محاور الجسم الصلب $\{b\}$ بالنظر إليها من جملة المحاور الثابتة $\{s\}$). بالتالي فإن ω_s و ω_b هما شعاعان مختلفان يمثلان نفس شعاع السرعة الزاوية w، حيث نجد أن $\omega_s = R_{sb}\omega_b$ و $\omega_b = R_{sb}^{-1}\omega_s$، باعتبار أن $R_{sb}^{-1} = R_{sb}^T$، ومنه نجد:

$$\omega_b = R^T\omega_s \qquad (4.142)$$

لنقم الآن بالتعبير عن المعادلة السابقة على شكل مصفوفة متماثلة منحرفة. ولنتذكر أنه من أجل أي $\omega \in R^3$ و $R \in SO(3)$، فإن المعادلة $R[\omega]R^T = [R\omega]$ دائماً محققة. وبهذه النتيجة، يمكننا أن نعبر عن كل من جانبي المعالة (4.142) على هيئة مصفوفة متماثلة منحرفة بالشكل:

$$\begin{aligned}
[\omega_b] &= [R^T \omega_s] \\
&= R^T[\omega_s]R \\
&= R^T(\dot{R}R^T)R \\
&= R^T\dot{R} \qquad (4.143)
\end{aligned}$$

وباختصار، فإننا نحصل على المعادلتين التاليتين اللتين تربطان مصفوفة الدروان R بالسرعة الزاوية w:

الخاصية 4.21. إذا كان لدينا R(t) تشير إلى اتجاهات جملة المحاور الدائرة بالنظر إليها من جملة المحاور الثابتة. وبالإشارة إلى السرعة الزاوية للجملة الدائرة بالرمز w، يمكننا أن نكتب:

$$\dot{R}R^{-1} = [\omega_s] \qquad (4.144)$$

$$R^{-1}\dot{R} = [\omega_b] \qquad (4.145)$$

حيث $\omega_s \in R^3$ هو الشعاع w ممثلاً في جملة المحاور الثابتة، و $\omega_b \in R^3$ هو الشعاع w نفسه ممثلاً في جملة محاور الجسم المتحركة.

4.4.2. السرعات الفضائية:

الآن سنقوم بدراسة كلاً من السرعة الخطية والسرعة الزاوية لجملة المحاور المتحركة. وكما في السابق، سنشير بـ {s} و {b} إلى جملة المحاور الثابتة وجملة المحاور المتحركة على الترتيب، وليكن لدينا:

$$T_{sb}(t) = T(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.146)$$

بحيث تشير هذه المعادلة إلى التحويل المتجانس لجملة محاور الجسم {b} بالنظر إليها من جملة المحاور الثابتة {s} (وبقصد إظهار المعادلة بشكل منمق أكثر، فإننا في الوقت الحاضر سنكتب T بدلاً من T_{sb}).

في الفقرة السابقة، وجدنا أن الضرب السابق أو اللاحق لـ $\dot{R}$ بـ R^{-1} سيؤدي إلى تمثيل لشعاع السرعة الزاوية على شكل مصفوفة متماثلة منحرفة إما في جملة المحاور الثابتة أو في جملة محاور الجسم الصلب المتحرك. ويمكن لأحد ما أن يسأل فيما إذا كانت هناك خاصية شبيهة يمكن أن تطبق على $\dot{T}$، أي فيما إذا كان $T^{-1}\dot{T}$ و $\dot{T}T^{-1}$ تحمل تفاسير فيزيائية مشابهة.

لنرى الآن ماذا يمكن أن يحدث عندما نقوم بالضرب السابق لـ $\dot{T}$ بـ T^{-1}:

$$T^{-1}\dot{T} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} R^T\dot{R} & R^T\dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} [\omega_b] & \upsilon_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.147)$$

ونحن نعلم أن $R^T R^{\cdot} = [\omega_b]$ وهي عبارة عن تمثيل السرعة الزاوية بصورة مصفوفة متماثلة منحرفة ومعبر عنها في جملة المحاور المتحركة. وأيضاً $p^{\cdot}$ هي السرعة الخطية لمبدأ إحداثيات الجملة المتحركة ومعبر عنها بالنسبة لإحداثيات الجملة الثابتة، و $R^T p^{\cdot} = \nu_b$ هي السرعة الخطية كما هو معبر عنها في جملة المحاور المتحركة. وبجمع هاتين النتيجتين مع بعضهما، يمكن أن نستنتج أن $T^{-1}T^{\cdot}$ تمثل السرعة الزاوية والسرعة الخطية لجملة المحاور المتحركة بالنسبة لجملة المحاور الثابتة. إن الحساب السابق لـ $T^{-1}T^{\cdot}$ يشير إلى أنه من الممكن دمج كل من ω_b و ν_b على شكل شعاع واحد للسرعة سداسي الأبعاد. وهذا بالضبط ما سنقوم به. لنقم بتعرف التالي:

$$V_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ \upsilon_b \end{bmatrix}, \qquad [V_b] = \begin{bmatrix} [\omega_b] & \upsilon_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T^{-1}T^{\cdot} \qquad (4.148)$$

ويمكن أيضاً أن نكتب $V_b = (\omega_b,\nu_b)$، حيث $[V_b]$ هو تمثيل V_b عن طريق مصفوفة رباعية الأبعاد 4×4. وسوف نطلق على V_b اسم السرعة الفضائية Spatial Velocity في الجملة المتحركة (جملة الجسم).

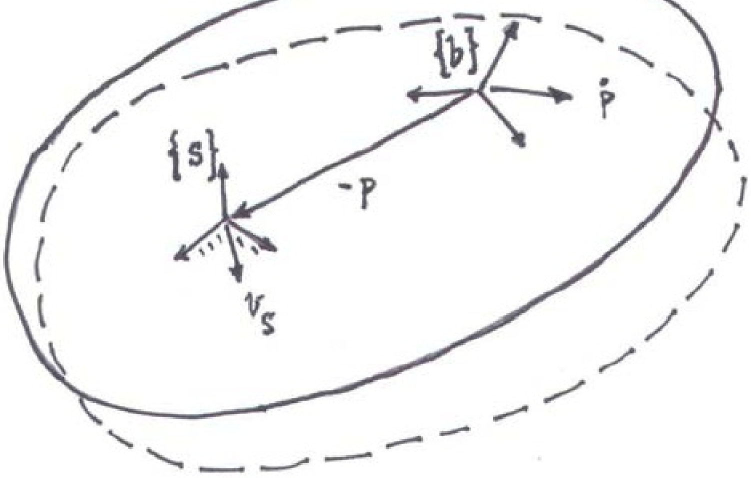
أصبحنا الآن نعلم ماهو التفسير الفيزيائي للجداء $T^{-1}T^{\cdot}$، والآن لندرس الجداء $T^{\cdot}T^{-1}$:

$$\dot{T}T^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \dot{R}R^T & \dot{p} - \dot{R}R^T p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} [\omega_s] & \upsilon_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.149)$$

ونلاحظ أن المصفوفة المتماثلة المنحرفة $[\omega_s] = R^{\cdot}R^T$ هي السرعة الزاوية بحيث يتم التعبير عنها في جملة المحاور الثابتة، لكن $\nu_s = p^{\cdot}\text{-}R^{\cdot}R^T p$ هي ليست السرعة الخطية لمبدأ إحداثيات جملة المحاور المتحركة معبراً عنها في جملة المحاور الثابتة (حيث السرعة الخطية لمبدأ إحداثيات جملة المحاور المتحركة هي ببساطة $p^{\cdot}$). ومن جهة أخرى، إذا كتبنا ν_s كالتالي:

$$\upsilon_s = p^{\cdot} - \omega_s \times p = p^{\cdot} + \omega_s \times (-p) \qquad (4.150)$$

فإن المعنى الفيزيائي لـ v_s يمكن أن يستنتج كالآتي: لنتخيل أن جملة المحاور المتحركة مربوطة بجسم صلب غير متناهٍ في الكبر، بالتالي فإن v_s هي السرعة الخطية اللحظية لنقطة من الجسم بالنسبة لجملة المحاور الثابتة (انظر الشكل (4.14)).



الشكل 4.14: التفسير الفيزيائي لـ v_s. الهيئة الابتدائية (الخط الغامق) والهيئة المزاحة (الخط المنقط) للجسم الصلب.

وكما فعلنا من أجل ω_b و v_b، فإننا أيضاً سوف ندمج ω_s و v_s على شكل شعاع سرعة سداسي الأبعاد كالتالي:

$$V_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix}, \qquad [V_s] = \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \dot{T}T^{-1} \qquad (4.151)$$

ويمكن أيضاً أن نكتب $V_s = (\omega_s, v_s)$، حيث $[V_s]$ هو تمثيل V_s عن طريق مصفوفة رباعية الأبعاد 4×4. وسوف نطلق على V_s اسم السرعة الفضائية في الجملة الثابتة (أو الفضاء).

إذا اعتبرنا أن كلاً من الجسم الثابت والجسم المتحرك هما أجسام غير متناهية في الكبر، فإننا نجد أن هناك ارتباطاً طبيعياً بين $V_s = (\omega_s, v_s)$ و $V_b = (\omega_b, v_b)$:

(i) ω_b هي السرعة الزاوية وفقاً لجملة الإحداثيات المتحركة.

(ii) ω_s هي السرعة الزاوية وفقاً للجملة الإحداثية الثابتة.

(iii) v_b هي السرعة الخطية لمبدأ جكلة الإحداثيات المتحركة بالنظر إليها من جملة الإحداثيات الثابتة.

(iv) v_s هي السرعة الخطية لمبدأ جملة الإحداثيات الثابتة (يمكن اعتبارها على أنها نقطة من الجسم الصلب المتحرك) بالنظر إليها من جملة الإحداثيات المتحركة.

بالتالي فإن V_b يمكن الحصول عليها من V_s كالتالي:

$$\begin{aligned}[V_b] &= T^{-1}\dot{T}\\ &= T^{-1}(\dot{T}T^{-1})T\\ &= T^{-1}[V_s]T \qquad (4.152)\end{aligned}$$

وبصورة مماثلة نستطيع أن نستنتج أن:

$$[V_s] = T[V_b]T^{-1} \qquad (4.154)$$

ويمكن للقارئ أن يدرك أن العلاقة بين V_s و V_b تعطى بشكل أدق بوساطة قاعدة التحويل لشعاع التلولب لحركة لولبية نتيجة لتغيير جمل المحاور المرجعية. في الحقيقة، باستخدام دالة المجموعة الملحقة Ad_T ، فإن المعادلة أعلاه يمكن كتابتها بالشكل:

$$V_s = \mathrm{Ad}_T(V_b), \quad V_b = \mathrm{Ad}_{T^{-1}}(V_s)$$

وقاعدة التحويل هذه يمكن بسهولة تذكرها إذا كتبنا $T = T_{sb}$، وفي هذه الحالة:

$$V_s = Ad_{T_{sb}}(V_b) \qquad (4.154)$$

$$V_b = Ad_{T_{bs}}(V_s) \qquad (4.155)$$

وبكتابة المعادلتين السابقتين بالصيغة الموسعة نجد:

$$\begin{bmatrix}\omega_s\\ v_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R & 0\\ [p]R & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_b\\ v_b\end{bmatrix} \qquad (4.156)$$

$$\begin{bmatrix}\omega_b\\ v_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R^T & 0\\ -R^T[p] & R^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_s\\ v_s\end{bmatrix} \qquad (4.157)$$

النتائج الرئيسية المستخلصة من دراسة السرعات الفضائية يمكن إيجازها بالخاصية التالية:

الخاصية 4.22. لنفترض أن لدينا جملة محاور ثابتة (الفضاء) $\{s\}$، وجملة محاور متحركة (الجسم) $\{b\}$، وإذا كان لدينا $T_{sb}(t) \in SE(3)$ بحيث يمكن اشتقاقها:

$$T_{sb}(t) = \begin{bmatrix}R(t) & p(t)\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (4.158)$$

فإن:

$$T_{sb}^{-1}\dot{T}_{sb} = [V_b] = \begin{bmatrix}[\omega_b] & v_b\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (4.159)$$

هي السرعة الفضائية بالنسبة لجملة محاور الجسم، و:

$$\dot{T}T_{sb}^{-1} = [V_s] = \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.160)$$

هي السرعة الفضائية بالنسبة لجملة المحاور الثابتة (الفضاء). إن V_s و V_b مرتبطتان من خلال العلاقات التالية:

$$V_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = \mathrm{Ad}_{T_{sb}}(V_b) \qquad (4.161)$$

$$V_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ -R^T[p] & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = \mathrm{Ad}_{T_{bs}}(V_s) \qquad (4.162)$$

4.4.3. القوى الفضائية:

رأينا سابقاً أنه من الجيد أن ندمج السرعات الزاوية والخطية فيما يسمى شعاع السرعة الفضائية والتي هي عبارة عن مصفوفة سداسية الأبعاد، ولنفس السبب، سيكون من المفيد أن ندمج أيضاً كلاً من القوى والعزوم فيما يسمى القوة الفضائية Spatial Force وهي أيضاً مصفوفة سداسية الأبعاد. ولهذا الغرض، لنفترض أن لدينا قوة ما f يتم تطبيقها على نقطة p من الجسم الصلب. ولنفترض أن لدينا جملة محاور مرجعية ما {a}، وكان $f_a \in R^3$ تشير إلى التمثيل الشعاعي للقوة f في جملة المحاور {a}. إن هذه القوة تولد عزماً بالنسبة لجملة المحاور {a}، وهذا العزم يكتب بالشكل:

$$m_a = r_a \times f_a \qquad (4.163)$$

حيث $r_a \in R^3$ هو الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور {a} إلى النقطة p معبراً عنه في جملة المحاور {a}. وسوف ندمج كلاً من القوة f_a والعزم m_a في مصفوفة واحدة سداسية الأبعاد تسمى القوة الفضائية $F_a = (m_a, f_a)$، وذلك نسبة لجملة المحاور {a}. وباعتماد نفس طريقة الإصطلاح في نظرية الحركة اللولبية، سنطلق على هذه القوة الفضائية اسم التلوّي Wrench.

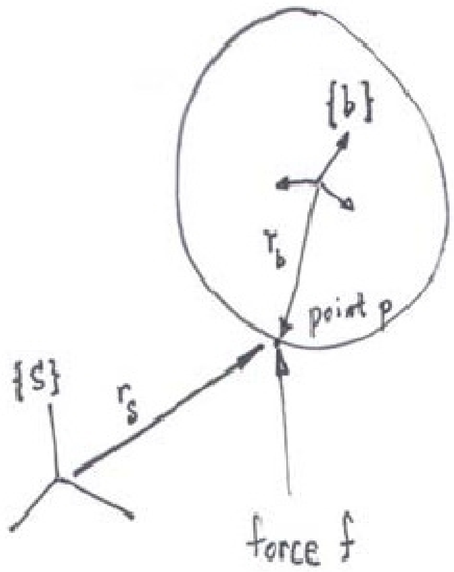
لنفترض الآن أننا نريد أن نعبر عن القوة والعزم بالنسبة لجملة محاور أخر {b}. فسيكون لدينا $f_b \in R^3$ تشير إلى التمثيل الشعاعي للقوة f معبراً عنها في جملة المحاور {b}. والعزم المتولد من هذه القوة معبراً عنه في جملة المحاور {b} سيكون:

$$m_b = r_b \times f_b \qquad (4.164)$$

حيث $r_b \in R^3$ هو الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور {b} إلى النقطة p معبراً عنه في جملة المحاور {b}. وكما فعلنا بالنسبة لـ F_a، سنقوم بدمج كلاً من القوة f_b والعزم m_b في مصفوفة سداسية الأبعاد $F_b = (m_b, f_b)$، وتسمى بالقوة الفضائية معبراً عنها في جملة المحاور {b}.

والآن سنقوم بتحديد العلاقة بين $F_a = (m_a, f_a)$ و $F_b = (m_b, f_b)$. فبالنظر إلى الشكل (4.15)، فإننا سنشير إلى التحويل T_{ab} بالشكل:

$$T_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



الشكل 4.15: العلاقة بين F_a و F_b.

ومن الواضح أن $f_b = R_{ba}f_a$، ويمكن من خلال ما تمت دراسته سابقاً أن نكتب:

$$f_b = R_{ab}^T f_a \qquad (4.165)$$

والعزم m_b يعطة بالعلاقة $r_b \times f_b$ حيث $r_b = R_{ba}(r_a - p_{ab})$، وهذا يأتي من حقيقة كون $r_a - p_{ab}$ معبر عنه في جملة المحاور {a}، ويجب تحويله لجملة المحاور {b} عن طريق الضرب بـ R_{ba}. وأيضاً من خلال ما درسناه، فإنه يمكن أن نكتب:

$$r_b = R_{ab}^T(r_a - p_{ab})$$

والعزم $m_b = r_b \times f_b$ يمكن الآن كتابته بدلالة f_a و m_a كالآتي:

$$\begin{aligned} m_b &= R_{ab}^T(r_a - p_{ab}) \times R_{ab}^T f_a \\ &= [R_{ab}^T r_a]R_{ab}^T f_a - [R_{ab}^T p_{ab}]R_{ab}^T f_a \\ &= R_{ab}^T[r_a]f_a - R_{ab}^T[p_{ab}]f_a \\ &= R_{ab}^T m_a + R_{ab}^T[p_{ab}]^T f_a \qquad (4.166) \end{aligned}$$

حيث قمنا في السطر الأخير بالاستفادة من الخاصية $[p_{ab}]^T = -[p_{ab}]$. وبكتابة كل من f_b و m_b بدلالة كل من f_a و m_a، ومن المعادلة (4.165) و المعادلة (4.166) يمكن أن نكتب:

$$\begin{bmatrix} m_b \\ f_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab} & 0 \\ [p_{ab}]R_{ab} & R_{ab} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_a \\ f_a \end{bmatrix} \qquad (4.167)$$

أو بدلالة القوى الفضائية وباستخدام الدالة الملحقة:

$$F_b = \mathrm{Ad}_{T_{ab}}^T(F_a) = [\mathrm{Ad}_{T_{ab}}]^T F_a \qquad (4.168)$$

ومن المعادلة السابقة يمكن أن نلاحظ أنه في حال تغيير جمل المحاور، فإن السرعات الفضائية يتم تحويلها عن طريق دالة المجموعة الملحقة، في حين أن القوى الفضائية يتم تحويلها باستخدام منقول هذه الدالة.

الفصل الخامس

التحليل الكينماتيكي الأمامي لروبوتات السلسلة المفتوحة

Forward Kinematics of Open Chain Robots

إن التحليل الكينماتيكي الأمامي (أو المباشر) لروبوت يشير إلى مجموعة الإجراءات والعمليات الحسابية التي تهدف إلى إيجاد موقع Position واتجاه Orientation جملة محاور النهاية العاملة استناداً إلى معيطات المفاصل. الشكل (5.1) يظهر مسألة التحليل الكينماتيكي الأمامي لروبوت مستوٍ ذي سلسلة مفتوحة Open Chain يحوي ثلاثة مفاصل دورانية 3R. ابتداءً من وصلة القاعدة، إن أطوال الوصلات هي L_1,L_2,L_3. وباختيار جملة محاور ثابتة {0} بحيث يكون مبدأ إحداثياتها متوضعاً في مفصل القاعدة، وبفترض أيضاً أن جملة محاور خاصة بالنهاية العاملة {4} قد تم ربطها عند قمة الوصلة الثالثة، فإن الإحداثيات الديكارتية (x,y) والاتجاه ϕ لجملة محاور النهاية العاملة كتابع لزوايا المفاصل $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ تعطى بالعلاقات التالية:

$$x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) + L_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \quad (5.1)$$

$$y = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2) + L_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \quad (5.2)$$

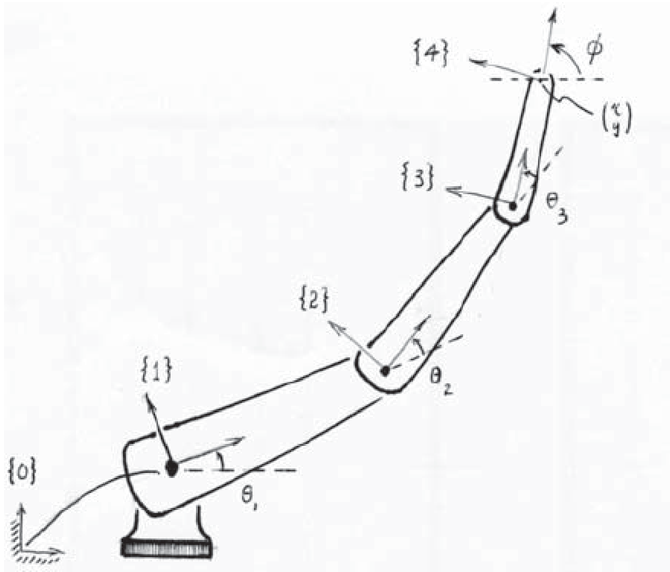
$$\phi = \theta_1+\theta_2+\theta_3 \quad (5.3)$$

إذا كان ما يهمنا هو موقع النهاية العاملة (x,y) فقط، فإن فضاء المهمة (فضاء العمل) حينها يكون المستوي x-y، والتحليل الكينماتيكي الأمامي سيتألف من المعادلتين (5.1) و (5.2) فقط. أما إذا كان مايهمنا هو موقع واتجاه الرأس العامل، فإن التحليل الكينماتيكي الأمامي عندها سيتألف من ثلاثة معادلات (5.1) و (5.2) و (5.3).

وكما نعلم فأن التحليل السابق يمكن أن يتم فقط باستخدام بعض القواعد الأساسية في علم المثلثات Trigonometry، ولكن في المقابل، فإنه ليس من الصعب أن نتخيل أن مثل هذا التحليل يصبح أكثر تعقيداً في حالة السلاسل الفضائية العامة. وإحدى الطرق أكثر انضباطاً من أجل استنتاج التحليل الكينماتيكي الأمامي هي أن نقوم أولاً بربط جمل للمحاور بكل وصلة من وصلات الروبوت، ففي الشكل (5.1) تم تسمية جمل المحاور المرجعية للوصلات الثلاث بـ {1} و {2} و {3} بالترتيب. وبالتالي فإن التحليل الكينماتيكي الأمامي يمكن كتابته على شكل جداء مصفوفات تنتمي للمجموعة SE(2):

$$T_{04} = T_{01}T_{12}T_{23}T_{34}$$

نسخة (إلكترونية) غير مخصصة للطباعة.



الشكل 5.1: التحليل الكينماتيكي الأمامي لروبوت ذي سلسلة مفتوحة فيه ثلاثة مفاصل دورانية 3R.

حيث:

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{12} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & L_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{23} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & L_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.4)$$

ونلاحظ أن T_{34} هو مقدار ثابت، وبقية التحويلات $T_{i-1,i}$ تعتمد فقط على المتغير لكل مفصل θ_i.

وبدلاً من ذلك، إذا اعتبرنا كل محور مفصل على أنه محور لحركة لولبية ذات خطوة تساوي الصفر، فإننا نلاحظ أن محور المفصل الثالث يمكن التفكير بخصوصه على أنه حركة لولبية للوصلة الثالثة. فبفرض أن قيمتي المفصلين θ_1 و θ_2 تبقيان ثابتتين عند القيمة صفر، فإننا نستطيع أن نكتب استناداً إلى تمثيل الحركة اللولبية على هيئة مصفوفة أسية والتي درسناها في الفصل السابق:

$$T_{04} = e^{[S_3]\theta_3} M \qquad (5.5)$$

حيث:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 + L_2 + L_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.6)$$

وهي تصف موقع واتجاه جلمة المحاور $\{4\}$ عندما تكون كل قيم المفاصل مساوية للصفر، ويكون أيضاً:

$$[S_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -(L_1 + L_2) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5.7)$$

وبطريقة مماثلة، فإن محور المفصل الثاني يمكن النظر إليه على أن تطبيق لحركة لولبية ذات خطوة مساوية للصفر على زوج الوصلات الثاني والثالث، وبفرض أن θ_1 تبقى ثابتة عند القيمة صفر، فإننا نستطيع أن نكتب:

$$T_{04} = e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} M \qquad (5.8)$$

حيث $[S_3]$ و M تبقيان كما تم استنتاجهما في السابق، ويكون:

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5.9)$$

وأخيراً، محور المفصل الأول يمكن أيضاً النظر إليه على أنه تطبيق لحركة لولبية ذات خطوة مساوية للصفر على تجميع الثلاث مفاصل كلها، ومن أجل أية قيم لـ $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ يمكننا بالتالي أن نكتب:

$$T_{04} = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} M \qquad (5.10)$$

حيث $[S_2]$ و $[S_3]$ و M تبقى كما استنتجت في السابق، ويكون:

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5.11)$$

ولهذا فالتحليل الكينماتيكي الأمامي يمكن أن يتم التعبير عنه أيضاً كجداء مصفوفات أسية، وكل منها متعلق بحركة لولبية ما. ونلاحظ أن الاستنتاج الأخير للتحليل الكينماتيكي الأمامي لا يستخدم أية جمل محاور مرجعية للوصلات.

في هذا الفصل سندرس التحليل الكينماتيكي الأمامي للروبوتات ذات السلسلة المفتوحة بشكل عام، بحيث يكون مجال العمل هو موقع واتجاه جملة محاور النهاية العاملة في معظم الحالات بشكل عام. وهناك طريقتان واسعتا الانتشار من أجل التحليل والتمثيل الكينماتيكي الأمامي لروبوتات السلسلة المفتوحة، وهما الطريقتان اللتان ستتم دراستهما: تمثيل التحويل المتجانس المستند إلى بارامترات دينافيت - هارتنبيرغ Denavit - Hartenberg (D-H)، والمعبر عنها بالمعادلة (5.4)، والطريقة الثانية هي الصيغة النظرية للحركة اللولبية المستندة إلى صيغة جداء الأسيات

Product of Exponentials (PoE)، و المعبر عنها بالمعادلة (5.10). إن الميزة الحسنة في تمثيل D-H هي أن هذا التمثيل يتطلب عدداً أقل من البارامترات من أجل وصف الهيكلية الكينماتيكية للروبوت. وفي المقابل، فإن طريقة PoE تتطلب عدداً أكثر من البارامترات، ولكن كما سنرى فيما بعد، فإن هذه الطريقة تمتلك العديد من المزايا بالمقارنة مع تمثيل D-H (على سبيل المثال، ليست هناك أي ضرورة لوجود جمل محاور للوصلات) الأمر الذي يجعل هذه الطريقة، مع وجود بعض الاستثناءات، الخيار الأفضل من أجل التمثيل والتحليل الكينماتيكي الأمامي.

5.1. تمثيل دينافيت – هارتنبرغ Denavit – Hatrenberg:

إن الفكرة الأساسية التي يعتمد عليها مبدأ دينافيت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg من أجل التحليل الكينماتيكي الأمامي هي أن نربط جملة محاور مرجعية لكل وصلة من وصلات الروبوت ذي السلسلة المفتوحة، ومن ثم استنتاج التحليل الكينماتيكي الأمامي استناداً إلى معرفة الانزياحات النسبية بين جمل محاور الوصلات المتجاورة. لذلك نفترض أننا قمنا باختيار جملة محاور مرجعية ثابتة، وأن جملة محاور مرجعية (جملة محاور النهاية العاملة) تم ربطها بنقطة ما من الوصلة الأخيرة في الميكانيزم ذي السلسلة المفتوحة. فإذا كانت لدينا السلسلة مكونة من n مفصل يمتلك درجة حرية واحدة، فإنه يتم ترقيم المفاصل تسلسلياً من 0 إلى n، بحيث تعتبر الأرض الوصلة رقم 0، والوصلة الأخيرة التي تم ربط جملة محاور مرجعية (جملة محاور النهاية العاملة) فيها هي الوصلة رقم n. وتبعاً لذلك يتم ترقيم جمل المحاور المرجعية المربوطة بالوصلات من {0} (جملة المحاور الثابتة) إلى {n} (جملة محاور النهاية العاملة). ويتم الإشارة لمتغير المفصل المتعلق بالمفصل i بالرمز θ_i. ومنه فإن التمثيل الكينماتيكي الأمامي للروبوت ذي السلسلة المفتوحة والمكون من n مفصل يمكن التعبير عنه بالشكل الآتي:

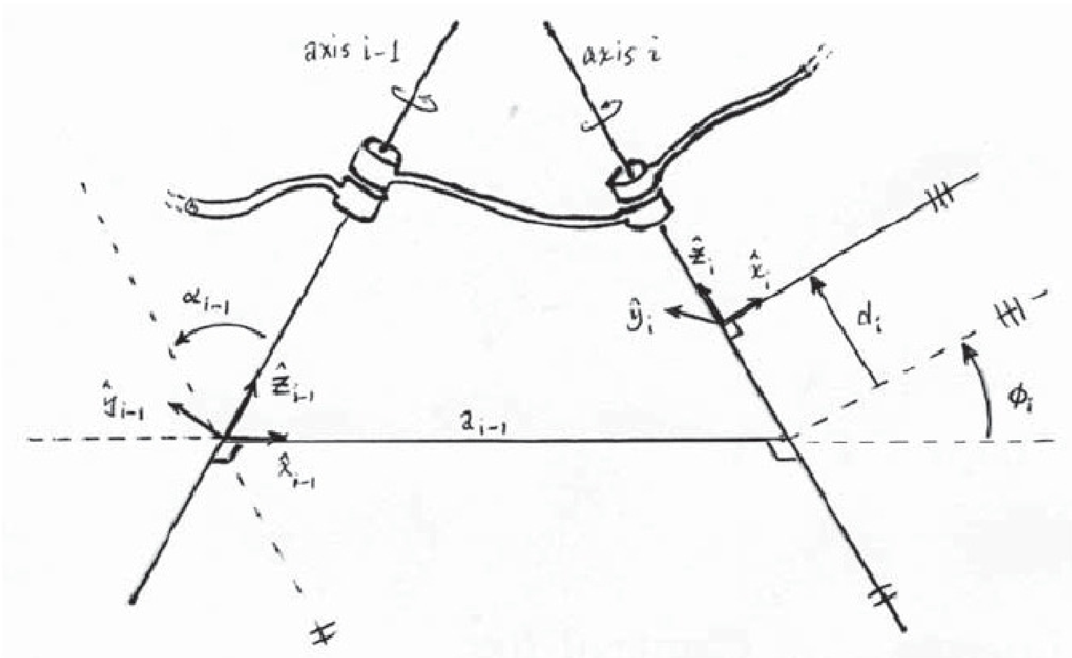
$$T_{0n}(\theta_1, \dots, \theta_n) = T_{01}(\theta_1)T_{12}(\theta_2) \dots T_{n-1,n}(\theta_n) \qquad (5.12)$$

حيث $T_{i-1,i} \in SE(3)$ تشير إلى الانزياح النسبي بين جملتي محاور الوصلتين {i-1} و {i}. ويتم الحصول على التحويل $T_{i-1,i}$ بسهولة وذلك تبعاً للكيفية التي تم فيها اختيار جمل المحاور المرجعية.

5.1.1. تعيين جمل محاور الوصلات:

بدلاً من ربط جمل المحاور المرجعية بكل وصلة بطريقة عشوائية، فإنه يجب مراعاة مجموعة من القواعد في طريقة دينافيت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg من أجل تعيين جمل المحاور للوصلات. الشكل (5.2) يوضح قاعدة تعيين جمل المحاور من أجل مفصلين دورانيين متجاورين i-1 و i والموصلين ببعضهما عن طريق الوصلة i-1.

القاعدة الأولى هي أن المحور $\hat{z}_i$ يجب أن يكون منطبقاً على محور المفصل i، والمحور $\hat{z}_{i-1}$ يجب أن يكوم منطبقاً على محور المفصل i-1. ومن ثم فإن اتجاه المحور $\hat{z}$ في كل جملة محاور يتم تحديده وفقاً لقاعدة اليد اليمنى، بحيث يكون الاتجاه الموجب للدوران هو بعكس عقارب الساعة حول المحور $\hat{z}$.



الشكل 5.2: توضيح بارامترات ديناڤيت هارتنبرغ Denavit - Hartenberg.

وعندما يتم تعيين اتجاه المحور $\hat{z}$، فإن القاعدة الثانية هي تحديد مبدأ الإحداثيات لجملة المحاور المرجعية للوصلة. بداية، يجب إيجاد الخط المستقيم والذي يتقاطع بشكل متعامد Orthogonally مع محوري المفصلين $\hat{z}_{i-1}$ و $\hat{z}_i$ كليهما. في الوقت الحالي لنفترض أن هذا الخط المستقيم هو وحيد، والحالة التي يكون فيها هذا الخط ليس وحيداً (أي عندما يكون محوري المفصلين متوازيين)، أو الحالة التي نفشل في العثور عليه (أي عندما يكون محورا المفصلين متقاطعين) ستدرسان لاحقاً. وبوصل محور المفصل i-1 بمحور المفصل i عن طريق خط مستقيم متعامد ومشترك، فإن مبدأ إحداثيات جملة المحاور {i-1} سيكون متوضعاً عند نقطة تقاطع هذا الخط المستقيم مع محور المفصل i-1.

تعيين المحورين المتبقيين $\hat{x}$ و $\hat{y}$ لكل جملة محاور مرجعية لكل وصلة بعد ذلك سيكون بسيطاً: يتم تحديد المحور $\hat{x}$ بحيث يكون باتجاه الخط المستقيم المتعامد المشترك الممتد من المحور i-1 للمحور i. والمحور $\hat{y}$ بالتالي يتحدد من خلال الجداء الخارجي $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ ويكون هذا المحور فريد (له احتمال واحد). الشكل (5.2) يجسد جمل محاور الوصلات i و i-1 المختارة وفقاً لهذه القواعد.

وبعد تعيين جمل المحاور المرجعية بهذه الطريقة للوصلتين i و i-1، نستطيع أن نعرف أربعة بارامترات والتي تحدد بالضبط التحويل $T_{i-1,i}$:

- طول الخط العمودي المشترك، وبالمشار إليه بالرمز a_{i-1}، وهو قيمة عددية ويسمى طول الوصلة وذلك للوصلة i-1. وعلى الرغم من المعنى الذي يشير إليه هذا الاسم، إلا أن طول الوصلة هذا ليس بالضرورة أن يكون هو نفسه الطول الفيزيائي الفعلي للوصلة.

- التواء الوصلة α_{i-1}، وهي الزاوية من $\hat{z}_{i-1}$ إلى $\hat{z}_i$ مقاسة حول المحور $\hat{x}_{i-1}$.

- تباعد (تعويض) الوصلة Link Offset ويشار له بالرمز d_i، وهي المسافة من نقطة تقاطع المحور $\hat{x}_{i-1}$ مع المحور $\hat{z}_i$ إلى مبدأ إحداثيات جملة محاور الوصلة i (الاتجاه الموجب لهذه المسافة يعرف بحيث يكون باتجاه المحور $\hat{z}_i$).

- زاوية الوصلة ϕ_i، وهي الزاوية من المحور $\hat{x}_{i-1}$ إلى المحور $\hat{x}_i$ مقاسة حول المحور $\hat{z}_i$ وفقاً لقاعدة اليد اليمنى.

هذه البارامترات تشكل بارامترات دينافيت - هارتنبرغ Denavit - Hatrenberg. فمن أجل أي روبوت ذي سلسلة مفتوحة مكون من n مفصل يمتلك درجة حرية واحدة، فإن بارامترات دينافيت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg والتي عددها $4n$ ستكون كافية من أجل التحليل الكينماتيكي الأمامي الكامل للروبوت. وفي الحالة التي تكون فيها جميع المفاصل دورانية في ميكانيزم الروبوت ذي السلسلة المفتوحة، فإن أطوال الوصلات a_{i-1} والالتواءات α_{i-1} وبارامترات التعويض d_i ستكون جميعها قيماً ثابتة، في حين أن برامترات زاوية الوصلة ϕ_i ستمثل دور متغيرات المفاصل.

الآن سنقوم بدراسة الحالة التي لا نستطيع فيها إيجاد الخط المشترك العامودي، أو الحالة التي يكون فيها هذا الخط ليس هو الوحيد (غير فريد)، وفي آخر المطاف، سندرس كيفية اختيار جملة محاور الأرض وجملة محاور النهاية العاملة للروبوت.

الحالة التي يكون فيها المحوران لمفصلين دورانيين متجاورين متقاطعين:

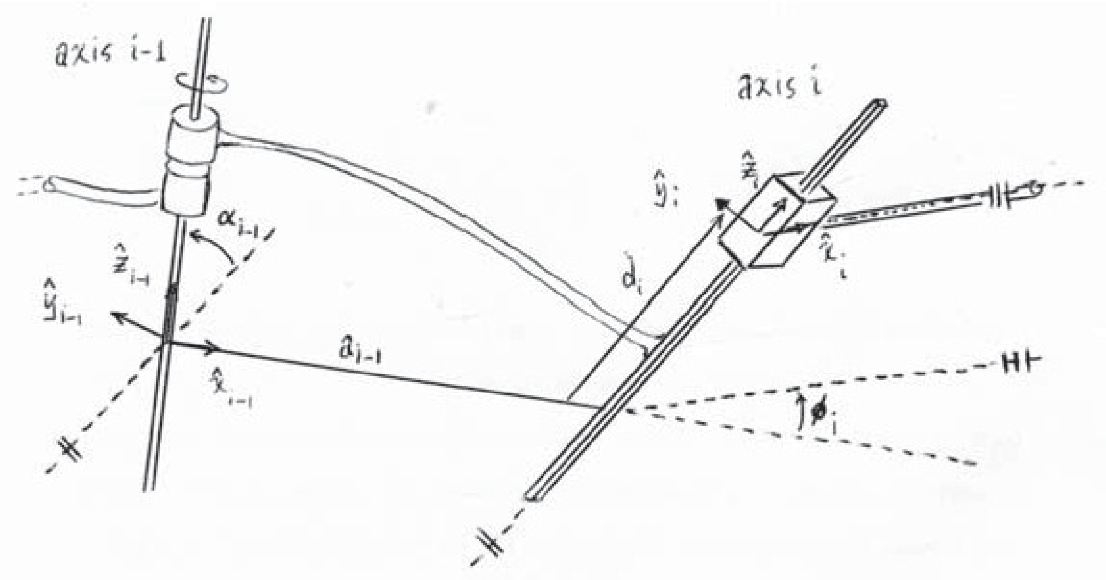
إذا كان محورا مفصلين دورانيين متجاورين متقاطعين فيما بينهما، فإنه لن نستطتيع إيجاد ذاك الخط المستقيم العمودي والمشترك بين محاور المفصلين. في هذه الحالة فإن طول الوصلة سيكون مساوياً للصفر، ونختار المحور $\hat{x}_{i-1}$ بحيث يكون عامودياً على المستوي المتشكل من المحورين $\hat{z}_{i-1}$ و $\hat{z}_i$. وسيكون هناك احتمالين، وكلاهما مقبول: الأول يؤدي إلى قيم موجبة لزاوية الالتواء α_{i-1}، بينما الآخر يؤدي إلى قيم سالبة لهذه الزاوية.

الحالة التي يكون فيها المحوران لمفصلين دورانيين متجاورين متوارزيين:

الحالة الخاصة الثانية هذه تحدث عندما تكون محاور المفاصل الدورانية المتجاورة متوازية. في هذه الحالة سيكون هناك العديد من الاحتمالات لاختيار الخط المستقيم العمودي والمشترك، وجميعها مقبول (وبشكل أدق أكثر، يمكن القول أنه يوجد هناك مجموعة من الخطوط المتعامدة والمشتركة). ومرة أخرى، إنه من المهم أن نحدد بشكل دقيق كيفية تعيين محاور الجمل. وكقاعدة توجيهية، فإنه علينا أن نحاول أن نختار هذا الخط المستقيم المتعامد والمشترك بحيث يكون هذا الاختيار هو الأكثر بداهة لنا من الناحية الفيزيائية، وأن نبسط قدر المستطاع من برامترات دينافيت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg. (على سبيل المثال، كأن تصبح قيمهم مساوية للصفر إن أمكن ذلك).

حالة المفاصل التمددية:

في حالة المفاصل التمددية، فإن المحور $\hat{z}$ في جملة محاور الوصلة المرجعية يتم اختياره بحيث يكون متجهاً نحو الاتجاه الموجب للانتقال (التمدد). وهذه القاعدة متناغمة مع تلك في حالة المفاصل الدورانية، حيث يكون المحور $\hat{z}$ هو المحور الموجب للدوران. وبهذا الاختيار، فإن بارامتر تعويض الوصلة d_i يصبح في هذه الحالة هو متغير المفصل (انظر الشكل (5.3)). والإجراء المتعلق باختيار مكان مبدأ إحداثيات جملة المحاور، وكذلك الأمر بالنسبة لاختيار المحاور المتبقية $\hat{x}$ و $\hat{y}$، يبقى كماهو في حالة المفاصل الدورانية.



الشكل 5.3: قاعدة تعيين جمل المحاور من أجل المفاصل التمددية. المفصل i-1 هو مفصل دوراني، في حين إن المفصل i هو مفصل تمددي.

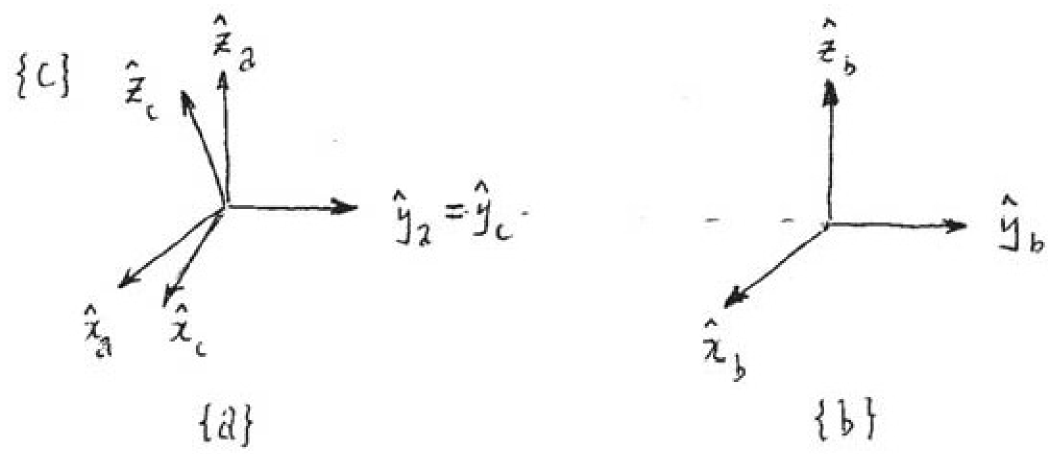
تعيين جملة محاور الأرض وجملة محاور النهاية العاملة:

إلى الآن، فإن الإجراءات التي قمنا باتخاذها من أجل تعيين جمل المحاور للوصلات لا تحدد كيفية اختيار جملة محاور اللأرض ولا جملة المحاور الأخيرة (التي هي في الواقع جملة محاور النهاية العاملة). وهنا وكما في السابق، فإن هناك قاعدة توجيهية يمكن أن نعتمدها في اختيار جملة المحاور الابتدائية وجملة المحاور النهائية بحيث يكون هذا الاختيار هو الأقرب إلى البداهة من الناحية الفيزيائية، وبحيث يبسط وقدر الإمكان من بارامترات دينافيت - هارتنبرغ Dinavit Hatenberg -. وهذا عادة ما يعني أن نختار جملة محاور الأرض بحيث تكون منطبقة على جملة محاور الوصلة الأولى في وضعها الصفري (وضع الراحة)، ففي حال كون المفصل مفصلاً دورانياً فإننا نجد أن $a_0 = \alpha_0 = d_1 = 0$، في حين في حال كون المفصل تمددياً فإننا نجد أن القيم $a_0 = \alpha_0 = \phi_1 = 0$. وبالنسبة لجملة محاور النهاية العاملة فإنها تربط بشكل عام بنقطة مرجعية على النهاية العاملة، وعادة في المكان الذي يجعل وصف المهمة أقرب إلى البداهة من الناحية الفيزيائية والطبيعية، وبحيث يبسط ما أمكن من بارامترات دينافيت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg (على سبيل المثال، أن تصبح هذه البارامترات مساوية للصفر).

ومن المهم أن نعرف أن الاختيار العشوائي لجملة محاور الأرض وجملة محاور النهاية العاملة لا يكون متاحاً دائما، وذلك بسبب إمكانية احتمال عدم وجود مجموعة صالحة من برامترات دينافيت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg لتوصيف التحويل النسبي المتعلق بهاتين الجملتين. وسوف ندرس هذه القضية في الفقرة القادمة.

5.1.2. لماذا تعتبر أربعة بارامترات كافية:

في دراستنا السابقة للانزياحات الفضائية، تم الاتفاق على أنه يلزمنا على الأقل ستة بارامترات مستقلة من أجل توصيف الانزياح النسبي بين جملتي محاور في الفضاء: ثلاثة من أجل تحديد الاتجاه، وثلاثة من أجل تحديد الموقع. واستناداً إلى هذه النتيجة، فإنه يبدو لنا أنه يلزمنا من أجل ذراع مكون من n وصلة عدد إجمالي من البارامترات قدره 6n من أجل التوصيف الكامل للتحليل الكينماتيكي الأمامي (أي أن كل $T_{i-1,i}$ في المعادلة أعلاه تتطلب ستة بارامترات). لكن الأمر الغريب في التمثيل البارامتري بطريقة دينافيت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg هو أنه فقط أربعة بارامترات مطلوبة من أجل كل تحويل $T_{i-1,i}$. وعلى الرغم من أن هذه النتيجة قد تبدو للوهلة الأولى متناقضة مع نتائجنا السابقة، إلا أن هذا الاختزال في عدد البارامترات تم تحقيقه عن طريق الاتباع الدقيق لمجموعة القواعد المنصوص عليها فيما يخص تعيين جمل المحاور المرجعية. فإذا تم تعيين جملة المحاور المرجعية بصورة عشوائية ، فإن برامترات أكثر ستكون مطلوبة في هذه الحالة.



الشكل 5.4: مثال لثلاثة جمل محاور {a} و {b} و {c} بحيث لا تكون هناك قدرة على التحويلات T_{ab} و T_{ac} بوساطة بارامترات دينافيت – هارتنبرغ Denavit – Hartenberg.

لنفترض، على سبيل المثال، أنه لدينا جمل المحاور لمجموعة من الوصلات كما هو مبين في الشكل (5.4). إن التحويل من جملة المحاور {a} إلى جملة المحاور {b} هو انسحاب صافٍ على طول المحور ŷ لجملة المحاور {a}. ونلاحظ من خلال محاولة التعبير عن التحوبل T_{ab} بوساطة بارامترات دينافت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg فإنه لا نستطيع إيجاد قيم هذه البارامترات. وبشكل مماثل، إن التحويل T_{ac} أيضاً لا يسمح بوجود وصف باستخدام بارامترات دينافيت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg، وذلك بسبب كون الدورانات الوحيدة الجائزة

هي تلك المرتبطة بالمحورين x̂ و ẑ. وبالتالي فإنه في قاعدة ديناڤت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg، فإن العلاقات والتحويلات المرتبطة بالمحورين x̂ و ẑ هي الوحيدة المسموح بها، وليس هناك أي تجميع لمثل تلك الحركات المبينة في الشكل (5.4) يمكن بلوغه باستخدام هذه الطريقة.

إن القول بأن قاعدة ديناڤت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg تستخدم فقط أربعة بارامترات من أجل توصيف التحويل بين جمل محاور الوصلات، قد يعطي المجال لأحدنا أن يتساءل فيما إذا كان هذا الرقم من البارامترات يمكن تخفيضه أكثر عن طريق تطوير طريقة أخرى لتعيين جمل المحاور. لكن ديناڤيت Denavit و هارتنبرغ Hartemberg أثبتا أن هذا ليس ممكناً، وأن العدد الأصغري من البارامترات اللازم هو أربعة.

سننهي هذه الفقرة بالتذكير أنه توجد هناك قواعد بديلة من أجل تعيين جمل محاور الوصلات. ففي حين أننا قمنا باختيار المحور ẑ بحيث يكون منطبقاً على محور الوصلة، فإن بعض الباحثين يختارون المحور x̂ بدلاً من ذلك، ويجعلون المحور ẑ باتجاه الخط المستقيم العمودي المشترك. ولمنع التفسيرات العشوائية لمفهوم برامترات ديناڤت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg، فإنه من اللازم إرفاق التوصيف البياني لتعيين جمل محاور الوصلات مع قيم البارامترات.

5.1.3. التحليل الكينماتيكي الأمامي لمناور Manipulator:

عندما تكون جميع التحويلات $T_{i-1,i}$ بين جمل محاور الوصلات المتجاورة معرفة بدلالة بارامترات ديناڤيت - هارتنبرغ Dinavit - Hartenberg الخاصة بكل جملة، فإنه يتم الحصول على التمثيل الكينماتيكي الأمامي عن طريق الجداء المتتابع لتحويلات الوصلات. وكل تحويل متعلق بجملة محاور سوف يكون بالشكل:

$$T_{i-1,i} = \mathrm{Rot}(\hat{x}, \alpha_{i-1}) \,.\, \mathrm{Trans}(\hat{x}, a_{i-1}) \,.\, \mathrm{Trans}(\hat{z}, d_i) \,.\, \mathrm{Rot}(\hat{z}, \phi_i)$$

حيث:

$$\mathrm{Rot}(\hat{x}, \alpha_{i-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & -\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.13)$$

$$\mathrm{Trans}(\hat{x}, a_{i-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.14)$$

$$\mathrm{Trans}(\hat{z}, d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.15)$$

$$\mathrm{Rot}(\hat{z}, \phi_i) = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i & 0 & 0 \\ -\sin\phi_i & \cos\phi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.16)$$

وكطريقة مفيدة من أجل تخيل التحويل $T_{i-1,i}$ هو أن يتم نقل جملة المحاور {i-1} إلى جملة المحاور {i} عن طريق التحويلات المتتابعة الأربعة التالية:

(i) تدوير جملة المحاور {i-1} حول المحور $\hat{x}$ بزاوية قدرها α_{i-1}.

(ii) سحب جملة المحاور الجديدة على طول المحور $\hat{x}$ لمسافة قدرها a_{i-1}.

(iii) سحب جملة المحاور الجديدة هذه على طول المحور $\hat{z}$ لمسافة قدرها d_i.

(iv) تدوير جملة المحاور الجديدة هذه حول المحور $\hat{z}$ بزواية قدرها ϕ_i.

ونلاحظ أن التبديل في الترتيب بين الخطوتين الأولى والثانية لن يغير من التحويل النهائي الناتج $T_{i-1,i}$، ومن ناحية أخرى، فإن التبديل في الترتيب بين الخطوتين الثالثة والرابعة يمكن أن يتم دون التأثير على التحويل النهائي الناتج $T_{i-1,i}$.

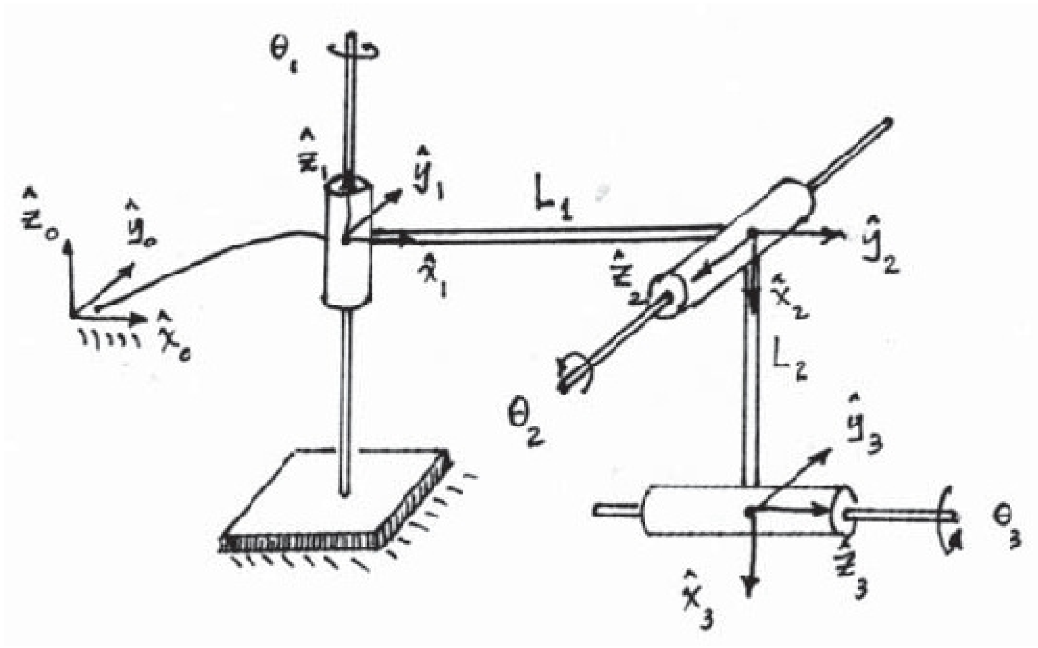
5.1.4. أمثلة:

الآن سنقوم باستنتاج بارامترات دينافيت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg لعدة روبوتات فضائية شائعة ذات هيكلية مفتوحة السلسلة.

مثال: ربوت فضائي ذو سلسلة مفتوحة يحتوي على ثلاثة مفاصل دورانية 3R:

لنفترض أنه لدينا الروبوت الفضائي ذي السلسلة المفتوحة والمحتوي على ثلاثة مفاصل دورانية 3R كما هو مبين بالشكل (5.5). وهذا الشكل يظهر الروبوت في وضعيته الصفرية (أي أن جميع قيم مفاصله تكون في الحالة الصفرية، أي تساوي الصفر). جمل المحاور المرجعية المعينة لكل وصلة موضحة في الشكل، وبارامترات دينافيت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg الموافقة مدرجة في الجدول التالي:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	ϕ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	L_1	0	θ_2-90°
3	-90°	L_2	0	θ_3



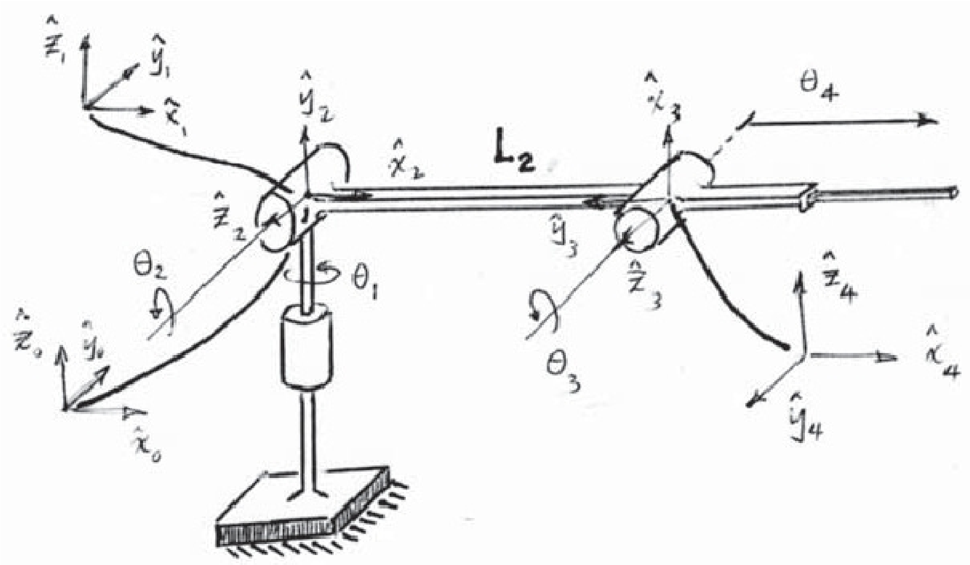
الشكل 5.5: روبوت فضائي ذو سلسلة مفتوحة يحتوي ثلاثة مفاصل دورانية 3R.

ونلاحظ هنا أن جملة المحاور {1} و {2} تم تعينهما بشكل فريد (لا يوجد لهما سوى احتمال واحد للتعيين) وذلك من خلال اتباع قواعد التعيين لجمل المحاور وفقاً لطريقة دينافت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg، لكننا نملك بعض الحرية في الاختيار من أجل تعيين جملة المحاور {0} وجملة المحاور {3}. وهنا قمنا باختيار جملة محاور الأرض {0} بحيث تكون منطبقة على جملة المحاور {1} (الأمر الذي يؤدي لجعل $\alpha_0 = a_0 = d_1 = 0$)، وجملة المحاور {3} قمنا باختيارها بحيث يكون المحور $\hat{x}_3$ في نفس اتجاه المحور $\hat{x}_2$ (مما يؤدي لعدم الحاجة لإضافة تعويض للزاوية θ_3).

مثال: روبوت فضائي ذو سلسلة مفتوحة يحوي على ثلاثة مفاصل دورانية ومفصل تمددي RRRP:

المثال التالي الذي سندرسه هو روبوت فضائي ذي سلسلة مفتوحة وله أربع درجات حرية ويحتوي ثلاثة مفاصل دورانية متتالية ومفصل واحد تمددي كما في الشكل (5.6) الذي يظهر الروبوت بوضعيته الصفرية. طريقة تعيين جمل محاور الوصلات مبينة في الشكل، وبرامترات دينافيت – هارتنبرغ Denavit - Hatenberg الموافقة الموافقة مدرجة في الجدول التالي:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	ϕ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	0	θ_2
3	0	L_2	0	$\theta_3 + 90°$
4	90°	0	θ_4	0



الشكل 5.6: روبوت فضائي ذو سلسلة مفتوحة فيه ثلاث مفاصل دورانية ومفصل تمددي RRRP.

إن متغيرات المفاصل الأربعة هي $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$، حيث θ_4 هو انزياح (تمدد) المفصل التمددي. وكما في المثال السابق، فإن جملة محاور الأرض وجملة محاور الوصلة الأخيرة {4} تم اختيارهم بحيث نجعل قيم بعض بارامترات ديناڤت - هارتنبرغ Denavit - Hatenberg مساوية للصفر.

مثال: روبوت ذو سلسلة مفتوحة يحتوي ستة مفاصل دورانية 6R:

المثال الأخير الذي سوف ندرسه هو ذراع الروبوت المكون من ستة مفاصل دورانية 6R والمستخدم بشكل كبير والموضح بالشكل (5.7). السلسلة المفتوحة لهذا الروبوت مكونة من ستة مفاصل دورانية: الثلاث مفاصل الأولى تقوم بوظيفة تحديد الموقع الديكارتي، في حين الثلاث مفاصل الأخيرة تقوم بدور المعصم ذو الترتيب ZYZ. إن جمل المحاور موضحة في الشكل، وبارامترات ديناڤيت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg الموافقة مدرجة في الجدول التالي:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	ϕ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	0	θ_2
3	0	L_1	0	$\theta_3 + 90°$
4	90°	0	L_2	$\theta_4 + 180°$
5	90°	0	0	$\theta_5 + 180°$
6	90°	0	0	θ_6

5.2. صيغة جداء الأسيات Product of Exponentials:

في هذه الفقرة سوف نقدم طريقة بديلة للتمثيل والتحليل الكينماتيكي الأمامي تسمى صيغة جداء الأسيات Product of Exponentials (PoE)، والتي تعتمد على تمثل الحركة اللولبية والتي تمت دراستها في الفصل السابق على شكل مصفوفة أسية. وسنبدأ هذه الفقرة بالتذكير بنظرية كاسيلز - موزي Chasles - Mozzi والتي تنص على أن: أي انزياح للجسم الصلب يمكن أن يتم التعبير عنه عن طريق دوران منتهٍ Finite حول محور ما ثابت في الفضاء (محور الحركة اللولبية)، متبوعاً بانسحاب منتهٍ يكون موازياً لذلك المحور. وبسبب كون الدوران والانسحاب مأخوذين بالنسبة لنفس المحور الثابت، فإن عكس الترتيب بينهما سيؤدي إلى نفس الانزياح.

ولضبط الأمور بشكل أكثر دقة، لنفترض أننا اخترنا جملة محاور ثابتة، وأننا ربطنا جملة محاور مثبتة في الجسم الصلب. فإذا تمت إزاحة الجسم الصلب من هيئة ابتدائية ما $M \in SE(3)$ إلى هيئة أخرى $T \in SE(3)$، فإن الانزياح يمكن أن يتم التعبير عنه بالشكل:

$$T = e^{[S]\theta}M, \quad [S] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5.17)$$

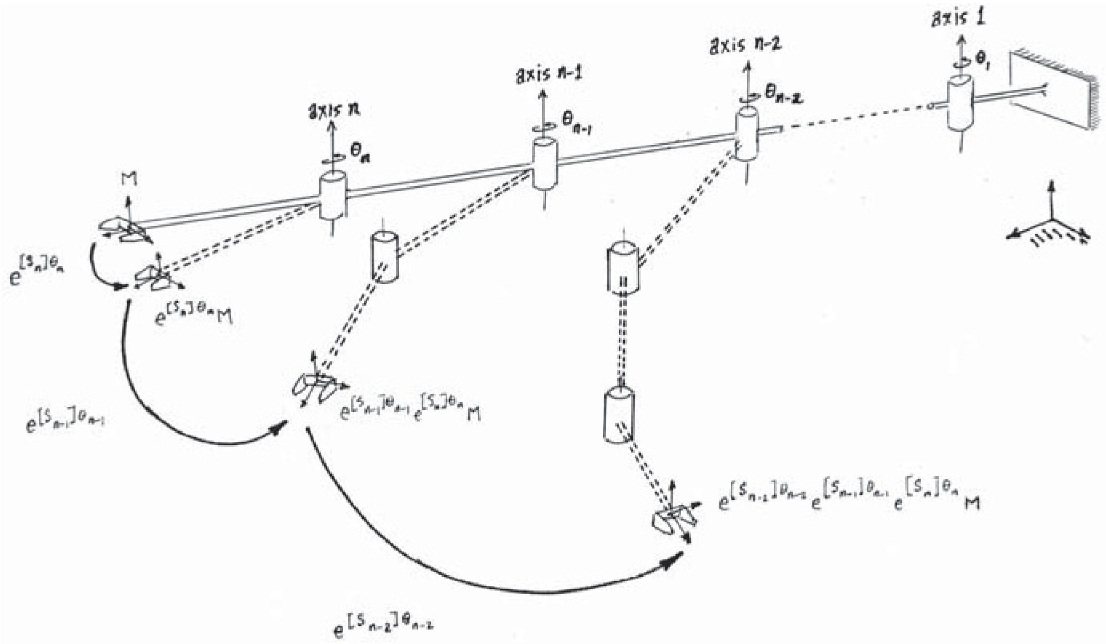
حيث $S = (\omega, v)$ هي عبارة عن التلولب سداسي الأبعاد الممثل للحركة اللولبية، و $[S]$ هي عبارة عن تمثيل S على شكل مصفوفة متماثلة منحرفة ذات الأبعاد 4×4، و $\theta \in R$ هو متغير المفصل. ومن الجدير بالذكر أن نتذكر أنه في حال كون الانزياح ليس انتقالاً صافياً (ليس انسحاباً فقط)، فإن $\omega \in R^3$ هو عبارة عن شعاع واحدة له نفس اتجاه محور الحركة اللولبية، حيث يكون $[\omega] \in R^{3\times3}$ هو تمثيل ω على شكل مصفوفة متماثلة منحرفة، و $v = -\omega \times q + h\omega$، حيث إن $q \in R^3$ هي نقطة من محور الحركة اللولبية، و $h \in R$ هي خطوة اللولب. أما في حال كان الانزياح انتقالاً صافياً (انسحاب)، فإن ω تكون مساوية للصفر، و $v \in R^3$ هو شعاع واحدة يتجه نحو الاتجاه الموجب للانزياح (انسحاب).

إن الحالات الحدية للحركة اللولبية العامة هي الدوران الصافي (والذي يحدث عندما تكون خطوة اللولب مساوية للصفر $h = 0$)، والانتقال الصافي (الانسحاب) (والذي يحدث عندما تكون خطوة اللولب تساوي اللانهاية $h = \infty$). وهاتان الحركتان تحدثان في أكثر نوعين من المفاصل انتشاراً في الروبوتات، وهما المفصل الدوراني والمفصل التمددي. وتكتسب صيغة PoE ميزتها مما سبق في كونها قادرة على التعبير عن حركة المفاصل الدورانية والتمددية على شكل حركات لولبية. والآن سوف نستنتج صيغة PoE للروبوتات ذات السلاسل الفضائية المفتوحة العامة.

5.2.1. الصيغة الأولى:

الفكرة الأساسية الكامنة وراء صيغة PoE هي أن نتصور كل مفصل وكأنه يقوم بتطبق حركة لولبية على الوصلات التابعة له. ولتوضيح ذلك، لندرس روبوت السلسلة المفتوحة الفضائي المبين في الشكل (5.8)، والمكون من n مفصل أحادي درجة الحرية والمتصلين مع بعضهم بشكل تسلسلي. ولنقم باختيار جملة محاور ثابتة وأيضاً جملة محاور للنهاية العاملة والمربوطة بالوصلة الأخيرة لهذا الروبوت، وعلى العكس من قاعدة ديناقت - هارتنبرغ - Denavit

Hartenberg، فإنه لاتوجد هنا أية قيود تحدد طريقة اختيار جملة المحاور الثابتة وجملة محاور النهاية العاملة. لنجعل الروبوت في وضعيته الصفرية وذلك بجعل متغيرات جميع مفاصله مساوية للصفر، مع الاتجاه الموجب للانزياح (الدوران في حالة المفاصل الدورانية، والانسحاب في حالة المفاصل التمددية) لكل مفصل.



الشكل 5.8: توضيح صيغة PoE لروبوت فضائي ذي سلسلة مفتوحة مكون من n وصلة.

لتكن $M \in SE(3)$ تشير إلى هيئة جملة محاور النهاية العاملة عندما يكون الروبوت في الوضعية الصفرية. لنفترض أن المفصل رقم n تمت إزاحته وفقاً لقيمة المتغير الخاص به بمقدار θ_n. بالتالي فإن جملة المحاور الخاصة بالنهاية العاملة سوف تخضع لحركة لولبية من الشكل:

$$T = e^{[S_n]\theta_n}M \qquad (5.18)$$

حيث $T \in SE(3)$ هي الهيئة الجديدة الناتجة عن انزياح جملة محاور النهاية العاملة، و حيث أن $S = (\omega_n, v_n)$ هو شعاع التلولب المعبر عن حركة المفصل n. على سبيل المثال، إذا كان المفصل n دورانياً (وهذا يؤدي إلى حركة لولبية ذات خطوة مساوية للصفر)، فإن $\omega_n \in R^3$ هو شعاع الواحدة المتجه نحو الاتجاه الموجب لمحور المفصل n، و $v_n = -\omega_n \times q_n$ حيث q_n هي نقطة ما على محور المفصل n. أما إذا كان المفصل n تمددياً، فإن $\omega_n = 0$، و $v \in R^3$ هو شعاع الواحدة المتجة بالاتجاه الموجب للتمدد (الانسحاب). ويجب التنويه أن جميع المقادير الشعاعية هنا معبر عنها بالنسبة لجملة الإحداثيات الثابتة.

إذا افترضنا أيضا أن قيمة متغير المفصل n-1 مسموح لها أن تتغير، فإن هذا سيؤدي لحدوث حركة لولبية مطبقة على الوصلة n-1 (وبالتالي على الوصلة n لكونها متصلة مع الوصلة n-1 عن طريق المفصل n). ولهذا فإن جملة محاور النهاية العاملة سوف تخضع لحركة لولبية من الشكل:

$$T = e^{[s_{n-1}]\theta_{n-1}}\left(e^{[s_n]\theta_n}M\right) \qquad (5.19)$$

وبالاستمرار على هذا النحو بجعل جميع قيم متغيرات المفاصل $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ قابلة للتغير، فإننا نستنتج العلاقة التالية:

$$T = e^{[s_1]\theta_1} \ldots\ e^{[s_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{[s_n]\theta_n} M \qquad (5.20)$$

وهذه هي صيغة جداء الأسيات التي تعبر عن التمثيل الكينماتيكي لروبوت ذي سلسلة مفتوحة ويمتلك n درجة حرية. وبصورة خاصة، يطلق على المعادلة (5.20) اسم شكل الفضاء Space Form لصيغة جداء الأسيات. ونلاحظ السمات التالية في صيغة جداء الأسيات:

- ليست هناك أية حاجة لتعيين جمل محاور للوصلات. نحن بحاجة فقط لاختيار جملة محاور ثابتة وجملة محاور خاصة بالنهاية العاملة (ونلاحظ أنه لا توجد أية قيود محددة لكيفية اختيار هذه الجمل)، بالإضافة إلى تعريف الوضعية الصفرية للروبوت والاتجاه الموجب للانزياح لكل مفصل (الدوران في حالة المفاصل الدورانية، والتمدد في حال المفاصل التمددية).

- بعد جعل الروبوت عند وضعيته الصفرية، إذا كان المفصل i دورانياً، فإن $\omega_i \in R^3$ هو شعاع الواحدة المتجة نحو الاتجاه الموجب لمحور المفصل، و $v_i = -\omega_i \times q_i$ حيث تكون $q_i \in R^3$ هي نقطة ما من محور المفصل i. أما إذا كان المفصل i تمددياً، فإن $\omega_i = 0$، و $v_i \in R^3$ هو شعاع الواحدة المتجة نحو الاتجاه الموجب للانسحاب. وعلى العكس من برامترات ديناڤت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg، حيث تكون متغيرات المفاصل هي إما ϕ_i أو d_i تبعاً لنوع المفصل في حال كونه دورانياً أو تمددياً، فإنه في صيغة جداء الأسيات تكون متغيرات المفاصل دائماً متناسقة من حيث طريقة الترميز، حيث يرمز للمتغير بـ θ_i.

بالمقارنة مع طريقة بارامترات ديناڤت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg، فإن حقيقة أننا لا نحتاج لاستعمال جمل محاور للوصلات، وأن جملة المحاور الثابتة وجملة محاور النهاية العاملة يمكن تعيينهما بدون وجود أية محددات، تبسط بشكل كبير عملية التحليل الكينماتيكي الأمامي. وهناك سمات أخرى ستظهر لنا عند دراسة التحليل الاستاتيكي والكينماتيكي للسرعة في الفصل القادم.

5.2.2. أمثلة:

سنقوم الآن بإجراء التحليل الكينماتيكي الأمامي لبعض الروبوتات الفضائية ذات الهيكلية المفتوحة وذلك باستخدام صيغة جداء الأسيات.

مثال: روبوت فضائي ذو سلسلة مفتوحة يحتوي ثلاثة مفاصل دورانية 3R:

سنعود إلى المثال السابق للروبوت ذو السلسلة المفتوحة والمحتوي على ثلاثة مفاصل دورانية المبين في الشكل (5.5). لنقم باختيار جملة محاور ثابتة {0} وجملة محاور للنهاية العاملة {3}

كما هو مشار موضح بالشكل، ولنقم بالتعبير عن جميع الأشعة والتحويلات المتجانسة نسبة لجملة المحاور الثابتة. بالتالي فإن التمثيل الكينماتيكي الأمامي سيكون كالآتي:

$$T = e^{[s_1]\theta_1}e^{[s_2]\theta_2}e^{[s_3]\theta_3}M$$

حيث $M \in SE(3)$ هي هيئة النهاية العاملة عندما يكون الروبوت في وضعيته الصفرية. ومن الشكل فإننا نستطيع أن نجد أن M هي:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث التلولب $S_1 = (\omega_1, v_1)$ للمفصل الأول يعطى بـ $\omega_1 = (0,0,1)$ و $v_1 = (0,0,0)$ (مبدأ إحداثيات جملة المحاور الثابتة هو الخيار الأفضل لاختيار النقطة q_1 الواقعة على محور المفصل رقم 1). ولتحديد التلولب S_2 لمحور المفصل 2، نلاحظ أن محور المفصل 2 يتجه باتجاه $-\hat{y}_0$، بالتالي فإن $\omega_2 = (0,-1,0)$. ولنقم باختيار النقطة $q_2 = (L_1,0,0)$ حيث نجد $v_2 = -\omega_2 \times q_2$ أي أن $v_2 = (0,0,-L_1)$. وأخيراً، لتحديد التلولب S_3 لمحور الفصل 3، نلاحظ أن $\omega_3 = (1,0,0)$. وباختيار النقطة $q_3 = (0,0,-L_2)$، نجد أن $v_3 = -\omega_3 \times q_3 = (0,L_2,0)$.

وفي النهاية، فإننا نحصل على التمثيلات المصفوفية ذات الأبعاد 4×4 لأجل أشعة التلولب للثلاثة مفاصل S_1 و S_2 و S_3:

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

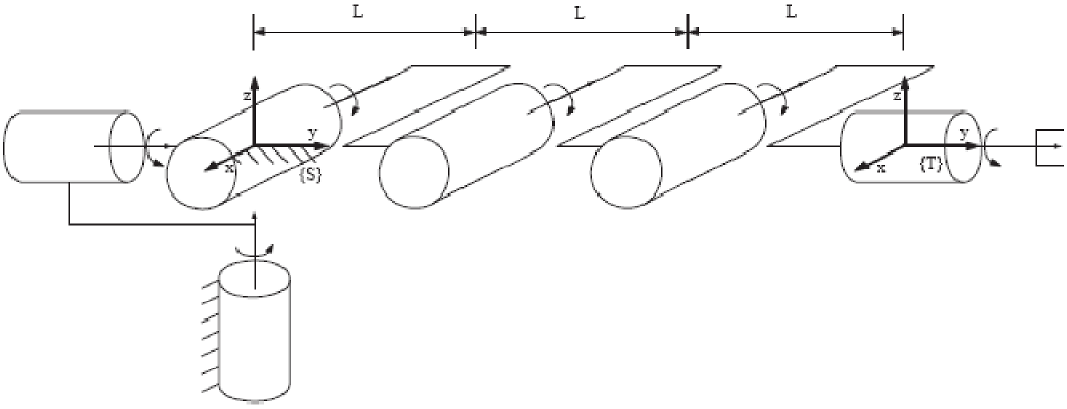
$$[S_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن المفيد أحياناً لنا أن ندرج أشعة التلولب بالشكل الجدولي التالي:

i	ω_i	v_i
1	(0,0,1)	(0,0,0)
2	(0,-1,0)	$(0,0,-L_1)$
3	(1,0,0)	$(0,L_2,0)$

مثال: روبوت فضائي ذو سلسلة مفتوحة يحوي ستة مفاصل دورانية 6R:

سنقوم الآن باستنتاج التمثيل الكينماتيكي الأمامي للروبوت ذي السلسلة المفتوحة والمحتوي على ستة مفاصل دورانية 6R والمبين بالشكل (5.9). إن الوضعية الصفرية للروبوت والاتجاه الموجب لدورانات كل محور مفصل موضحة بالشكل. كما تم تعيين جملة محاور ثابتة {0} وجملة محاور من أجل النهاية العاملة {6} كما هو مبين بالشكل. ومنه فإن جملة محاور النهاية العاملة في الوضعية الصفرية تكون:



الشكل 5.9: التحليل الكينماتيكي الأمامي بطريقة PoE لروبوت ذي سلسلة مفتوحة يحتوي عاى ست مفاصل دورانية 6R.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.21)$$

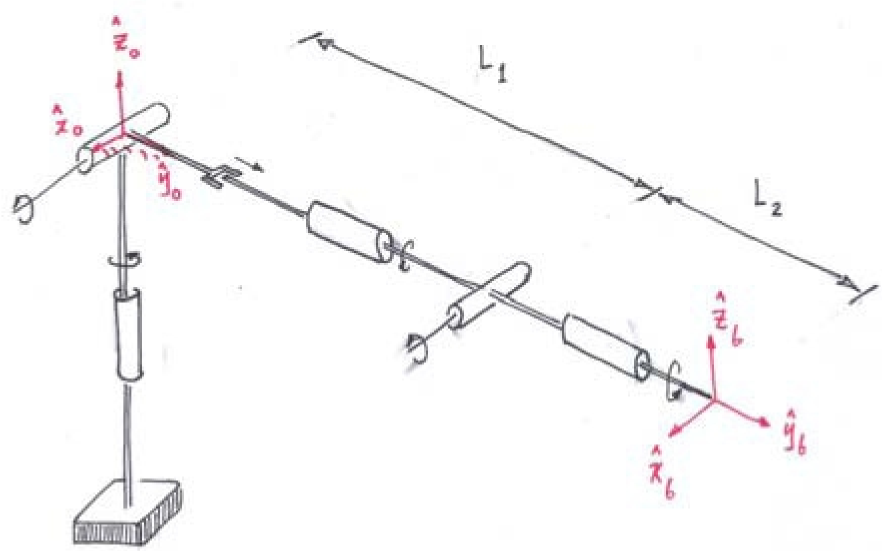
محور الحركة اللولبية للمفصل 1 هو في الاتجاه $\omega_1 = (0,0,1)$. والخيار الأفضل لاختيار النقطة q_1 هي نقطة مبدأ الإحداثيات المتوضعة على محور المفصل 1، بالتالي $v_1 = (0,0,0)$. محور الحركة اللولبية للمفصل 2 يتجه باتجاه المحور $\hat{y}$ لجملة المحاور الثابتة، ومنه نستنتج أن $\omega_2 = (0,1,0)$. وباختيار النقطة $q_2 = (0,0,0)$، فإننا نجد $v_2 = (0,0,0)$. محور الحركة اللولبية للمفصل 3 هو بالاتجاه $\omega_3 = (-1,0,0)$. وباختيار النقطة $q_3 = (0,0,0)$ فإننا نجد بالتالي $v_3 = (0,0,0)$. محور الحركة اللولبية للمفصل 4 هو بالاتجاه $\omega_4 = (-1,0,0)$. وباختيار النقطة

$q_4 = (0,L,0)$ نجد أن $v_4 = (0,0,-L)$. محور الحركة اللولبية للمفصل 5 يتجه بالاتجاه التالي $\omega_5 = (-1,0,0)$. وباختيار النقطة $q_5 = (0,2L,0)$ نجد أن $v_5 = (0,0,-2L)$. محور الحركة اللولبية للمفصل 6 هو بالاتجاه $\omega_6 = (0,1,0)$. وباختيار النقطة $q_6 = (0,0,0)$ بالتالي نجد أن $v_6 = (0,0,0)$. وبشكل موجز فإن أشعة التلولب $S_i = (\omega_i, v_i)$ حيث $i = 1,\ldots,6$ هي كالتالي:

i	ω_i	v_i
1	(0,0,1)	(0,0,0)
2	(0,1,0)	(0,0,0)
3	(-1,0,0)	(0,0,0)
4	(-1,0,0)	(0,0,-L)
5	(-1,0,0)	(0,0,-2L)
6	(0,1,0)	(0,0,0)

مثال: روبوت ذو سلسلة مفتوحة يحوي خمسة مفاصل دورانية ومفصل واحد تمددي RRPRRR:

في هذا المثال سندرس الروبوت الفضائي المبين في الشكل (5.10) والذي يمتلك ستة درجات من الحرية وله خمس مفاصل دورانية ومفصل واحد تمددي RRPRRR. جملة محاور النهاية العاملة في الوضعية الصفرية لهذا الروبوت تعطى بالشكل:



الشكل 5.10: روبوت فضائي ذو سلسلة مفتوحة يحوي خمس مفاصل دورانية ومفصل تمددي RRPRRR.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قيم أشعة التلولب للحركات اللولبية الموافقة لكل مفصل $S_i = (\omega_i, v_i)$ مدرجة في الجدول التالي:

i	ω_i	v_i
1	(0,0,1)	(0,0,0)
2	(1,0,0)	(0,0,0)
3	(0,0,0)	(0,1,0)
4	(0,1,0)	(0,0,0)
5	(1,0,0)	$(0,0,-L_1)$
6	(0,1,0)	(0,0,0)

نلاحظ أن المفصل الثالث هو مفصل تمددي، لذلك تكون $\omega_3 = 0$ و v_3 هو شعاع الواحدة الذي يتجه بالاتجاه الموجب للتمدد (الانسحاب).

5.2.3. العلاقة مع طريقة تمثيل دينافت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg:

إن صيغة جداء الأسيات يمكن أن يتم استنتاجها بصورة مباشرة من خلال بارامترات التمثيل وفق قاعدة دينافت - هارتنبرغ Denavit - Hartenberg للتحليل الكينماتيكي الأمامي. وكما في السابق، سنشير للانزياحات النسبية بين جمل محاور الوصلات المتجاورة بـ:

$$T_{i-1,i} = \mathrm{Rot}(\hat{x}, \alpha_{i-1}) \,.\, \mathrm{Trans}(\hat{x}, a_{i-1}) \,.\, \mathrm{Trans}(\hat{z}, d_i) \,.\, \mathrm{Rot}(\hat{z}, \phi_i)$$

إذا كان المفصل i دورانياً، فإن المصفوفات الثلاث الأولى يمكن اعتبارها مقاديراً ثابتة، وستكون الزاوية ϕ_i هي متغير المفصل. بجعل $\theta_i = \phi_i$ و:

$$M_i = \mathrm{Rot}(\hat{x}, \alpha_{i-1}) \,.\, \mathrm{Trans}(\hat{x}, a_{i-1}) \,.\, \mathrm{Trans}(\hat{z}, d_i) \qquad (5.22)$$

وبكتابة $\mathrm{Rot}(\hat{z},\theta_i)$ على شكل مصفوفة أسية كالتالي:

$$\mathrm{Rot}(\hat{z}, \phi_i) = e^{[A_i]\theta_i}, \quad [A_i] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5.23)$$

ومن خلال التعريفات السابقة نستطيع أن نكتب:

$$T_{i-1,i} = M_i e^{[A_i]\theta_i}$$

أما إذا كان المفصل i تمددياً، فإن الانسحاب d_i يكون هو متغير المفصل، والزاوية ϕ_i ستكون بارامتراً ثابتاً، والترتيب بين $\mathrm{Trans}(\hat{z},d_i)$ و $\mathrm{Rot}(\hat{z},\phi_i)$ يمكن عكسه في التحويل $T_{i-1,i}$ (حيث إن العكس بين الدورانات والانسحابات المأخوذة نسبة لنفس المحور تنتج نفس الحركة). في هذه الحالة مازلنا نستطيع كتابة $T_{i-1,i}$ كالسابق، حيث $\theta_i = d_i$ و:

$$M_i = \mathrm{Rot}(\hat{x}, \alpha_{i-1}) \,.\, \mathrm{Trans}(\hat{x}, a_{i-1}) \,.\, \mathrm{Rot}(\hat{z}, \phi_i) \qquad (5.24)$$

$$[A_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5.25)$$

واعتماداً على ماسبق، فإنه من أجل أي سلسلة مفتوحة مكونة من n وصلة تحتوي على كلا النوعين من المفاصل (مفاصل دورانية ومفاصل تمددية)، فإن التمثيل الكينماتيكي الأمامي يكتب بالشكل الآتي:

$$T_{0,n} = M_1 e^{[A_1]\theta_1} M_2 e^{[A_2]\theta_2} \ldots M_n e^{[A_n]\theta_n} \qquad (5.26)$$

حيث θ_i تشير إلى متغير المفصل، و $[A_i]$ هي إما كما في المعادلة (5.23) أو كما في المعادلة (5.25) استناداً إلى كون المفصل دورانياً أو تمددياً.

الآن سوف نستخدم الخاصية التالية:

$$Me^P M^{-1} = e^{MPM^{-1}}$$

وهذه الخاصة صالحة من أجل أية مصفوفة غير شاذة $M \in R^{n\times n}$ وأية مصفوفة $P \in R^{n\times n}$.
وهذه الخاصية يمكن أيضاً أن تكتب بالشكل:

$$Me^P = e^{MPM^{-1}} M$$

فإذا طبقنا هذه الخاصية على المعادلة (5.26) وبعد تكرار التطبيق n مرة فإننا نحصل على صيغة جداء الأسيات بصيغتها العامة:

$$\begin{aligned} T_{0,n} &= e^{M_1[A_1]M_1^{-1}\theta_1} (M_1 M_2) e^{[A_2]\theta_2} \ldots e^{[A_n]\theta_n} \\ &= e^{M_1[A_1]M_1^{-1}\theta_1} e^{(M_1M_2)[A_2](M_1M_2)^{-1}\theta_2} (M_1 M_2 M_3) e^{[A_3]\theta_3} \ldots e^{[A_n]\theta_n} \\ &= e^{[S_1]\theta_1} \ldots e^{[S_n]\theta_n} M \qquad (5.27) \end{aligned}$$

حيث:

$$[S_i] = (M_1 \ldots M_{i-1})[A_i](M_1 \ldots M_{i-1})^{-1}, \;\; i = 1, \ldots, n \qquad (5.28)$$

$$M = M_1 M_2 \ldots M_n \qquad (5.29)$$

الآن سنعيد دراسة المعنى الفيزيائي لـ S_i عن طريق التذكير بكيفية تحول شعاع التلولب عند تغير جمل المحاور المرجعية. فإذا كان S_a يمثل شعاع التلولب للحركة اللولبية المعطاة وذلك بالنسبة لجملة المحاور {a}، و S_b تمثل شعاع التلولب لنفس الحركة الفيزيائية اللولبية ولكن هذه المرة بالنسبة لجملة المحاور {b}، بالتالي فإن S_a و S_b مرتبطان ببعضهما بالعلاقة التالية:

$$[S_b] = T_{ba}[S_a]T_{ba}^{-1} \qquad (5.30)$$

أو باستخدام مفهوم الدالة الملحقة:

$$S_b = Ad_{T_{ba}}(S_a) \qquad (5.31)$$

ومن خلال ذلك، يمكننا أن نرى أن المعادلة (5.29) تصرح لنا أن A_i هي عبارة عن شعاع التلولب لمحو المفصل i بالنظر إليه من جملة المحاور الخاصة بالمفصل $\{i\}$، في حين أن S_i هو عبارة عن شعاع التلولب لمحور المفصل i بالنظر إليه من جملة المحاور الثابتة $\{0\}$.

5.2.4. الصيغة الثانية:

باعتماد نفس الخاصية التي استخدمناها في الفقرة السابقة عند استنتاج الصيغة العامة لجداء الأسيات، وبتطبيقها على الجانب الأيمن من هذه الصيغة وبعد التكرار لـ n مرة نحصل على:

$$\begin{aligned} T &= e^{[S_1]\theta_1} \dots e^{[S_n]\theta_n} M \\ &= e^{[S_1]\theta_1} \dots M e^{M^{-1}[S_n]M\theta_n} \\ &= e^{[S_1]\theta_1} \dots M e^{M^{-1}[S_{n-1}]M\theta_{n-1}} e^{M^{-1}[S_n]M\theta_n} \\ &= M e^{[B_1]\theta_1} e^{[B_2]\theta_2} \dots e^{[B_n]\theta_n} \qquad (5.32) \end{aligned}$$

حيث إن كل $[Bi] = M^{-1}[S_i]M$، حيث $i = 1,\dots,n$. وهذا هو الشكل البديل لصيغة جداء الأسيات. ونلاحظ أن M^{-1} هو الانزياح النسبي لجملة المحاور الثابتة كما تتم رؤيته من جملة محاور النهاية العاملة ، حيث يمكن القول أن:

$$B_i = Ad_{M^{-1}}(S_i) \qquad (5.33)$$

كل B_i هو شعاع التلولب لمحور المفصل i معبراً عنه في جملة محاور النهاية العاملة، وذلك في الوضعية الصفرية للروبوت. وسوف نطلق على المعادلة (5.32) اسم شكل الجسم Body Frame لصيغة جداء الأسيات.

مثال: روبوت ذو سلسلة مفتوحة يحتوي على ستة مفاصل دورانية 6R:

سنقوم الآن بإيجاد التمثيل الكينماتيكي الأمامي لنفس الربوت ذي الستة مفاصل دورانية 6R والمبين بالشكل (5.9) وذلك باستخدام الشكل الثاني لصيغة جداء الأسيات:

$$T = M e^{[B_1]\theta_1} e^{[B_2]\theta_2} \dots e^{[B_n]\theta_n}$$

لنفرض أنه لدينا نفس جملة المحاور الثابتة ونفس جملة محاور النهاية العاملة ونفس الوضعية الصفرية للروبوت كما كان في المثال السابق الذي درسناه من قبل. إن M تبقى نفسها كما في المعادلة (5.21)، والتي تم الحصول عليها بالنظر لجملة محاور النهاية العاملة من جملة المحاور الثابتة عند الوضعية الصفرية للروبوت. إن أشعة التلولب لكل محاور المفاصل يمكن التعبير

عنها الآن بالنسبة لجملة محاور النهاية العاملة وذلك في الوضعية الصفرية كما في الجدول التالي:

i	$\boldsymbol{\omega_i}$	$\boldsymbol{v_i}$
1	(0,0,1)	(-3L,0,0)
2	(0,1,0)	(0,0,0)
3	(-1,0,0)	(0,0,-3L)
4	(-1,0,0)	(0,0,-2L)
5	(-1,0,0)	(0,0,-L)
6	(0,1,0)	(0,0,0)

الفصل السادس

التحليل الكينماتيكي للسرعة والتحليل الستاتيكي للروبوت

Velocity Kinematics and Statics

إن التحليل الكينماتيكي للسرعة لروبوت ما هو عبارة عن إيجاد العلاقة بين معدلات التغير لمفاصل الروبوت (معدل تغير دوراني والذي يعبر عنه بالسرعة الزاوية، ومعدل تغير تمددي والذي يعبر عنه بالسرعة الخطية) والسرعة الزاوية والخطية للنهاية العاملة لهذا الروبوت. وفي حين أن التحليل الكينماتيكي الأمامي للروبوتات بشكل عام يقود إلى نتائج غير خطية ومعقدة، إلا أننا نجد أن معادلات التحليل الكينماتيكي للسرعة هي خطية: خلال أية فترة لحظية لحركة الروبوت، فإن السرعة الخطية والزاوية للنهاية العاملة للروبوت يمكن ببساطة أن يتم الحصول عليها عن طريق جداء شعاع معدلات التغير للمفاصل بـ (بتابع الهيئة Configuration Dependent) والمسمى بمصفوفة اليعقوبي Jacobian Matrix. وهذه العلاقة الخطية يمكن الاستفادة منها بشكل كبير في العديد من التطبيقات، بدءاً من خوارزميات التحليل الكينماتيكي الخلفي (العكسي) Inverse Kinematics وتوليد المسار Trajectory إلى التخطيط والتحكم بالمناورة. ومصفوفة اليعقوبي Jacobian لها دور مركزي أيضاً في الأمور المتعلقة بالاتصال الستاتيكي والديناميكي Dynamic بين النهاية العاملة للروبوت والبيئة المحيطة.

في هذا الفصل سوف نقوم باستنتاج مصفوفة اليعقوبي Jacobian للروبوتات ذات السلسلة المفتوحة، وسندرس دورها في تحليل السرعة وفي التحليل الستاتيكي وفي تحديد القصور (الشذوذ) الكينماتيكي (القصور الحركي) Kinematic Singularities. إن مادة هذا الفصل تعتمد بشكل رئيسي على دراسة ومعالجة سرعات الجسم الصلب الواردة في الفصل الرابع، لذلك فإنه من الأفضل مراجعة ذاك الفصل أولاً.

6.1. يعقوبي Jacobian الروبوت المناور:

6.1.1. يعقوبي الفضاء Space Jacobian:

في هذه الفقرة سوف نستنتج العلاقة بين شعاع معدلات التغير لمفاصل الروبوت ذي السلسلة المفتوحة $\dot{\theta}$ والسرعة الفضائية للنهاية العاملة للروبوت V_s. لكن بداية سنراجع بعض الخصائص الرئيسية من معادلات الجبر الخطي ومن معادلات التفاضل الخطي:

(i) إذا كان لدينا مصفوفتين $A, B \in R^{n\times n}$ وكان لهاتين المفصفوفتين معكوس، فإنه يكون: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(ii) إذا كانت المصفوفة $A \in R^{n\times n}$ ثابتة، وكانت $\theta(t)$ متغيراً عددياً تابعاً للزمن، فإن:

$$\frac{d}{dt}e^{A\theta} = Ae^{A\theta}\dot{\theta} = e^{A\theta}A\dot{\theta}$$

(iii) إن $(e^{A\theta})^{-1} = e^{-A\theta}$.

والآن لنفترض أن لدينا روبوتاً له سلسلة مفتوحة مكونة من n وصلة، بحيث يكون التمثيل الكينماتيكي الأمامي له معبراً عنه بصيغة جداء الأسيات كالتالي:

$$T(\theta_1, \dots, \theta_n) = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} \dots e^{[S_n]\theta_n} M \qquad (6.1)$$

إن السرعة الفضائية للنهاية لجملة محاور النهاية العاملة بالنسبة لجملة المحاور الثابتة V_s تعطى بالعلاقة التالية $V_s = \dot{T}T^{-1}$، حيث:

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \left(\frac{d}{dt} e^{[S_1]\theta_1}\right) \dots e^{[S_n]\theta_n} M + e^{[S_1]\theta_1} \left(\frac{d}{dt} e^{[S_2]\theta_2}\right) \dots e^{[S_n]\theta_n} M + \cdots \\ &= [S_1]\dot{\theta}_1 e^{[S_1]\theta_1} \dots e^{[S_n]\theta_n} M + e^{[S_1]\theta_1} [S_2]\dot{\theta}_2 e^{[S_2]\theta_2} \dots e^{[S_n]\theta_n} M + \cdots\end{aligned}$$

وأيضاً:

$$T^{-1} = M^{-1} e^{-[S_n]\theta_n} \dots e^{-[S_1]\theta_1}$$

وبإجراء الجداء $\dot{T}T^{-1}$ نجد:

$$\begin{aligned}[V_s] = [S_1]\dot{\theta}_1 &+ e^{[S_1]\theta_1}[S_2]e^{-[S_1]\theta_1}\dot{\theta}_2 \\ &+ e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} [S_3] e^{-[S_2]\theta_2} e^{-[S_1]\theta_1} \dot{\theta}_3 + \cdots\end{aligned}$$

والمعادلة الناتجة أعلاه يمكن التعبير عنها بصورة شعاعية وذلك باستخدام تعريف الدالة الملحقة Adjoint map كالآتي:

$$V_s = S_1\dot{\theta}_1 + Ad_{e^{[S_1]\theta_1}}(S_2)\dot{\theta}_2 + Ad_{e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2}}(S_3)\dot{\theta}_3 + \cdots \qquad (6.2)$$

ونلاحظ أن V_s هي عبارة عن جمع سرعات فضائية عددها n وذلك بالشكل التالي:

$$V_s = V_{s1}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots + V_{sn}(\theta)\dot{\theta}_n \qquad (6.3)$$

حيث كل $V_{si}(\theta) = (\omega_{si}(\theta), v_{si}(\theta))$ تعتمد على قيم المفاصل $\theta \in R^n$. وبشكل مصفوفي يمكن أن نجد:

$$\begin{aligned}V_s &= [V_{s1}(\theta) \quad V_{s2}(\theta) \quad \cdots \quad V_{sn}(\theta)] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \\ &= J_s(\theta)\dot{\theta} \qquad (6.4)\end{aligned}$$

إن المصفوفة $J_s(\theta)$ تسمى يعقوبي Jacobian جملة المحاور الثابتة، أو بصورة أبسط تسمى بيعقوبي الفضاء Space Jacobian.

تعريف 6.1. لنفترض أن لدينا التمثيل الكينماتيكي الأمامي لروبوت ذي سلسلة مفتوحة مكون من n وصلة، وكان هذا التمثيل معبراً عنه بشكل جداء الأسيات التالي:

$$T = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} \dots e^{[S_n]\theta_n} M \qquad (6.5)$$

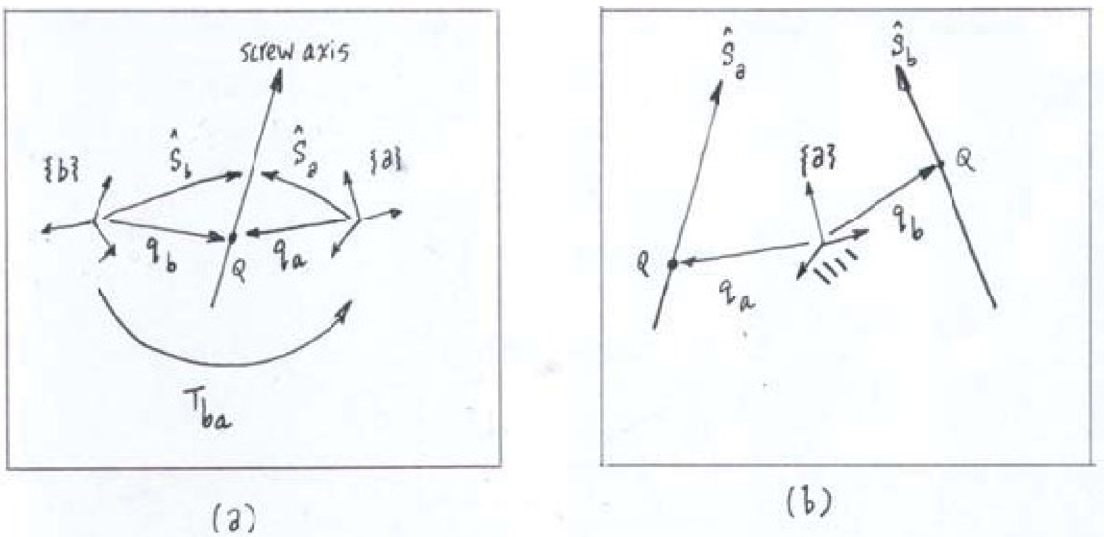
فإن يعقوبي الفضاء $J_s(\theta) \in R^{6\times n}$ يربط شعاع معدلات التغير للمفاصل $\dot{\theta}$ بالسرعة الفضائية للنهاية العاملة V_s كالتالي: $V_s = J_s(\theta)\dot{\theta}$. حيث العمود i من المصفوفة $J_s(\theta)$ يعطى بالعلاقة:

$$V_{si}(\theta) = Ad_{e^{[S_1]\theta_1} \dots e^{[S_{i-1}]\theta_{i-1}}}(S_i) \qquad (6.6)$$

وذلك من أجل $i = 2,\dots,n$، ويكون العمود الأول هو $V_{s1}(\theta) = S_1$.

وبغية فهم المعنى الفيزيائي الكامن في أعمدة مصفوفة اليعقوبي $J_s(\theta)$، فلنتذكر من الفصل الرابع أنه إذا كان لدينا $S_a = (\omega_a, v_a)$ هو الشعاع الذي يصف الحركة اللولبية في جملة المحاور {a}، وكان لدينا $S_b = (\omega_b, v_b)$ هو الشاع المعبر عن نفس الحركة اللولبية في جملة المحاور {b}، فإن S_a و S_b مرتبطان ببعضها من خلال العلاقة التالية (انظر الشكل (6.1 (a))):

$$S_b = Ad_{T_{ba}}(S_a)$$



الشكل 6.1: التفسير الفيزيائي للتحويل اللولبي الملحق Ad_T: (a) وصف الحركة اللولبية نفسها بالنسبة لجملتي محاور مرجعيتين مختلفتين {a} و {b} (b) محور الحركة اللولبية ينتقل من حالته الابتدائية إلى حالة أخرى من خلال التحويل T_{ba}.

وهناك تفسير فيزيائي آخر لهذا التحويل وذلك بالاستناد فقط إلى جملة المحاور {a}. بالنظر إلى الشكل (6.1 (b))، لنفترض أن الشعاع S_a يصف الحالة الابتدائية لمحور الحركة اللولبية بالنسبة لجملة المحاور {a}، والمحور S_b يصف محور الحركة اللولبية بعد أن خضع للانزياح كجسم صلب من خلال التحويل T_{ba}. ومنه نستنتج أن:

$$\omega_b = R_{ba}\omega_a \qquad (6.7)$$

والنقطة q على محور الحركة اللولبية تنزياح من الموضع الابتدائي q_a إلى:

$$q_b = T_{ba}q_a = R_{ba}q_a + p_{ba}$$

ومن خلال التعريف $v_b = -\omega_b \times q_b + h_b\omega_b$ حيث $h_a = h_b$ (خطوة اللولب هي مقدار عددي، وبالتالي فهو مستقل عن طريقة اختيار جمل المحاور المرجعية)، فإننا نجد:

$$\begin{aligned} v_b &= -\omega_b \times q_b + h_b\omega_b \\ &= -R_{ba}\omega_a \times (R_{ba}q_a + p_{ba}) + hR_{ba}\omega_a \\ &= R_{ba}(-[\omega_a]q_a + h_a\omega_a) - R_{ba}[\omega_a]R_{ba}^T p_{ba} \\ &= R_{ba}v_a + [p_{ba}]R_{ba}\omega_a \qquad (6.8) \end{aligned}$$

حيث قمنا في السطرين الأخيرين باستخدام الخاصية $R[\omega]R^T = [R\omega]$ من أجل $R \in SO(3)$ و $\omega \in R^3$. المعادلات (6.7) و (6.8) يمكن جمعهما بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ba} & 0 \\ [p_{ba}]R_{ba} & R_{ba} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_a \\ v_a \end{bmatrix} \qquad (6.9)$$

وهذه المعادلة هي بالضبط:

$$S_b = Ad_{T_{ba}}(S_a)$$

بالعودة إلى معادلة يعقوبي الفضاء (6.2)، نلاحظ أن الحد رقم i من الجانب الأيمن لهذ المعادلة هو من الشكل:

$$Ad_{T_{i-1}}(S_i)$$

حيث:

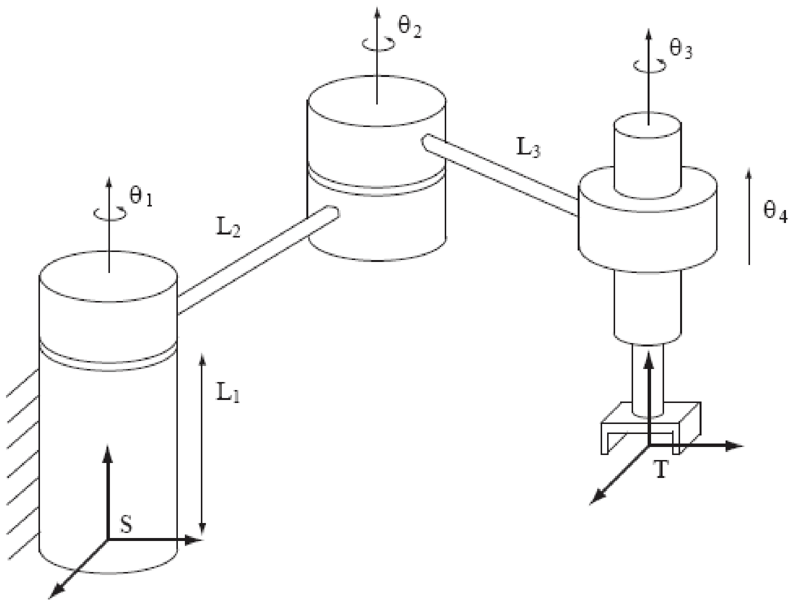
$$T_{i-1} = e^{[S_1]\theta_1}e^{[S_2]\theta_2} \dots e^{[S_{i-1}]\theta_{i-1}}$$

وإذا تذكرنا أن S_i هو شعاع التلولب لمحور المفصل i بالنسبة لجملة المحاور الثابتة عند الوضعية الصفرية للروبوت، وبالتالي فإن الدالة الملحقة لـ S_i والموافقة للتحويل T_{i-1} يمكن النظر إليها على أنها شعاع التلولب لمحور المفصل i وذلك بعد خضوعه للتحويل T_{i-1}. ولكن هذا الأمر فيزيائياً يعني تماماً تحريك المفاصل حتى المفصل رقم $i-1$ من وضعيتها الصفرية إلى القيم الحالية $\theta_1,\dots,\theta_{i-1}$، ولذلك فإن العمو i الذي هو $V_{si}(\theta)$ من المصفوفة $J_s(\theta)$ هو ببساطة محور التلولب لمحور المفصل i معبراً عنه في جملة المحاور الثابتة على شكل تابع لمتغيرات المفاصل $\theta_1,\dots,\theta_{i-1}$.

وبشكل موجز، فإن الإجراء المتخذ من أجل تحديد أعمدة مصفوفة اليعقوبي $J_s(\theta)$ هو نفسه المتخذ من أجل استنتاج أشعة التلولب S_i في صيغة جداء الأسيات، حيث كل عمود $V_{si}(\theta)$ هو عبارة عن شعاع التلولب الذي يصف المحور i معبراً عنه في جملة المحاور الثابتة، ولكن من أجل أية قيمة لـ θ وليس من أجل $\theta = 0$ فقط.

مثال: مصفوفة يعقوبي الفضاء لروبوت فضائي ذي سلسلة مفتوحة يحتوي ثلاثة مفاصل دورانية ومفصل تمددي واحد RRRP:

الآن سنقوم بتوضيح الإجراء المتخذ من أجل إيجاد يعقوبي الفضاء للروبوت الفضائي ذي السلسلة المفتوحة المحتوي على ثلاثة مفاصل دورانية ومفصل تمددي واحد RRRP المبين بالشكل (6.2). وسنشير إلى العمود i من مصفوفة اليعقوبي $J_s(\theta)$ بـ $V_i = (\omega_i, v_i)$.



الشكل 6.2: يعقوبي الفضاء للروبوت الفضائي ذي السلسلة المفتوحة المكونة من ثلاثة مفاصل دورانية ومفصل واحد تمددي RRRP.

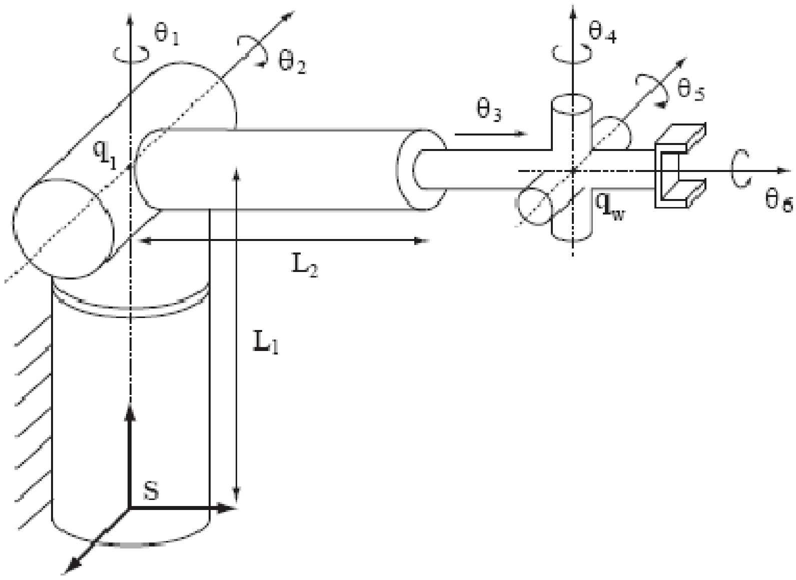
- نلاحظ أن الشعاع ω_1 هو ثابت ويتجه باتجاه المحور $\hat{z}$ حيث $\omega_1 = (0,0,1)$. وباختيار النقطة q_1 لتكون مبدأ الإحداثيات نجد أن $v_1 = (0,0,0)$.
- الشعاع ω_2 هو أيضاً ثابت ويتجه باتجاه المحور $\hat{z}$، بالتالي $\omega_2 = (0,0,1)$. وباختيار النقطة q_2 $(L_2c_1, L_2s_1, 0)$، حيث $c_1 = \cos\theta_1$ و $s_1 = \sin\theta_1$. بالتالي $v_2 = -\omega_2 \times q_2$ أي $v_2 = (L_2s_1, -L_2c_1, 0)$.
- اتجاه المحور ω_3 هو دائماً ثابت وهو باتجاه المحور $\hat{z}$ مهما كانت قيم θ_1 و θ_2، بالتالي نجد $\omega_3 = (0,0,1)$. وباختيار النقطة $q_3 = (L_2c_1+L_3c_{12}, L_2s_1+L_3s_{12}, 0)$ حيث إن $c_{12} = \cos(\theta_1+\theta_2)$، $s_{12} = \sin(\theta_1+\theta_2)$، أي $v_3 = (L_2s_1+L_3s_{12}, -L_2c_1-L_3c_{12}, 0)$.
- وبما أن المفصل الأخير هو مفصل تمددي، فإن $\omega_4 = (0,0,0)$، واتجاه محور المفصل يعطى بـ $v_4 = (0,0,-1)$.

ومنه نجد أن يعقوبي الفضاء يكون:

$$J_s(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & L_2 s_1 & L_2 s_1 + L_3 s_{12} & 0 \\ 0 & -L_2 c_1 & -L_2 c_1 - -L_3 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال: يعقوبي الفضاء لروبوت فضائي ذي سلسلة مفتوحة يحتوي خمسة مفاصل دورانية ومفصل تمددي واحد RRPRRR:

سنقوم الان باستنتاج يعقوبي الفضاء للروبوت الفضائي ذي السلسلة المفتوحة الذي يحتوي خمسة مفاصل دورانية ومفصل تمددي واحد RRPRRR والمبين في الشكل (6.3). جملة محاور القاعدة الثابتة تم اختيارها كماهو موضح بالشكل.



الشكل 6.3: يعقوبي الفضاء للروبوت الفضائي ذي السلسلة المفتوحة المكون من خمس مفاصل دورانية ومفصل وحيد تمددي RRPRRR.

- محور المفصل الأول هو في الاتجاه $\omega_1 = (0,0,1)$. وباختيار النقطة $q_1 = (0,0,L_1)$ نحصل على $v_1 = -\omega_1 \times q_1 = (0,0,0)$.
- محور المفصل الثاني هو بالاتجاه $\omega_2 = (-c_1,-s_1,0)$. وباختيار النقطة $q_2 = (0,0,L_1)$ نحصل على $v_2 = -\omega_2 \times q_2 = (L_1 s_1,-L_1 c_1,0)$.
- المفصل الثالث هو مفصل تمددي، بالتالي $\omega_3 = (0,0,0)$. واتجاه محور هذه المفصل التمددي يعطى بـ:

$$v_3 = Rot(\hat{z},\theta_1)Rot(\hat{x},-\theta_2)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-s_1c_2\\c_1c_2\\-s_2\end{bmatrix}$$

- لندرس الآن القسم الخاص بالمعصم Wrist. مركز المعصم متموضع في النقطة:

$$q_w = \begin{bmatrix}0\\0\\L_1\end{bmatrix} + Rot(\hat{z},\theta_1)Rot(\hat{x},-\theta_2)\begin{bmatrix}0\\L_1+\theta_3\\0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-(L_2+\theta_3)s_1c_2\\(L_2+\theta_3)c_1c_2\\L_1-(L_2+\theta_3)s_2\end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن اتجاهات محاور المعصم تتعلق بـ θ_1 و θ_2، وهذه المحاور هي:

$$\omega_4 = Rot(\hat{z},\theta_1)Rot(\hat{x},-\theta_2)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-s_1s_2\\c_1s_2\\c_2\end{bmatrix}$$

$$\omega_5 = Rot(\hat{z},\theta_1)Rot(\hat{x},-\theta_2)Rot(\hat{z},\theta_4)\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-c_1c_4+s_1c_2s_4\\-s_1c_4+c_1c_2s_4\\s_2s_4\end{bmatrix}$$

$$\omega_6 = Rot(\hat{z},\theta_1)Rot(\hat{x},-\theta_2)Rot(\hat{z},\theta_4)Rot(\hat{x},-\theta_5)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-c_5(s_1c_2c_4+c_1s_4)+s_1s_2s_5\\c_5(c_1c_2c_4-s_1s_4)-c_1s_2s_5\\-s_2c_4c_5-c_2s_5\end{bmatrix}$$

والآن فإن يعقوبي الفضاء يمكن أن يتم حسابه وكتابته بالشكل المفصوفي كالتالي:

$$J_s(\theta) = \begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2 & 0 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6\\0 & -\omega_2\times q_2 & v_3 & -\omega_4\times q_w & -\omega_5\times q_w & -\omega_6\times q_w\end{bmatrix}$$

6.1.2. يعقوبي الجسم Body Jacobian:

في الفقرة السابقة قمنا باستنتاج العلاقة بين معدلات تغير المفاصل والسرعة الفضائية للنهاية العاملة معبراً عنها في جملة المحاور الثابتة $[V_s] = \dot{T}T^{-1}$. والآن سنقوم باستنتاج العلاقة بين معدلات تغير المفاصل والسرعة الفضائية للنهاية العاملة معبراً عنها في جملة محاور النهاية العاملة $[V_b] = T^{-1}\dot{T}$، ولهذا الغرض، فإنه من الملائم أكثر أن نقوم بالتعبير عن التمثيل الكينماتيكي الأمامي باستخدام الطريقة البديلة لصيغة جداء الأسيات:

$$T(q) = Me^{[B_1]\theta_1}e^{[B_2]\theta_2} \dots e^{[B_n]\theta_n} \qquad (6.10)$$

وبحساب $\dot{T}$:

$$\begin{aligned}\dot{T} &= Me^{[B_1]\theta_1} \dots e^{[B_{n-1}]\theta_{n-1}}\left(\frac{d}{dt}e^{[B_n]\theta_n}\right) \\ &\quad + Me^{[B_1]\theta_1} \dots \left(\frac{d}{dt}e^{[B_{n-1}]\theta_{n-1}}\right)e^{[B_n]\theta_n} + \cdots \\ &= Me^{[B_1]\theta_1} \dots e^{[B_n]\theta_n}[B_n]\dot{\theta}_n + Me^{[B_1]\theta_1} \dots e^{[B_{n-1}]\theta_{n-1}}[B_{n-1}]e^{[B_n]\theta_n}\dot{\theta}_{n-1} \\ &\quad + \cdots + Me^{[B_1]\theta_1}[B_1]e^{[B_2]\theta_2} \dots Me^{[B_n]\theta_n}\dot{\theta}_1\end{aligned}$$

وبحساب T^{-1}:

$$T^{-1} = e^{-[B_n]\theta_n} \dots e^{-[B_1]\theta_1}M^{-1}$$

وبإجراء الجداء $T^{-1}\dot{T}$ نجد:

$$\begin{aligned}[V_b] &= [B_n]\dot{\theta}_n + e^{-[B_n]\theta_n}[B_{n-1}]e^{[B_n]\theta_n}\dot{\theta}_{n-1} + \cdots \\ &\quad + e^{-[B_n]\theta_n} \dots e^{-[B_2]\theta_2}[B_1]e^{[B_2]\theta_2} \dots e^{[B_n]\theta_n}\dot{\theta}_1\end{aligned}$$

أو بصورة شعاعية :

$$\begin{aligned}V_b &= B_n\dot{\theta}_n + Ad_{e^{-[B_n]\theta_n}}(B_{n-1})\dot{\theta}_{n-1} + \cdots \\ &\quad + Ad_{e^{-[B_n]\theta_n} \dots e^{-[B_2]\theta_2}}(B_1)\dot{\theta}_1 \qquad (6.11)\end{aligned}$$

وبالتالي فإن V_b يمكن التعبير عنها كمجموع سرعات فضائية عددها n، أي:

$$V_b = V_{b1}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots + V_{bn}(\theta)\dot{\theta}_n \qquad (6.12)$$

حيث كل $V_{bi} = (\omega_{bi}(\theta), v_{bi}(\theta))$ تتعلق بقيم المفاصل θ. وبالشكل المصفوفي نجد:

$$V_b = [V_{b1}(\theta) \quad V_{b2}(\theta) \quad \cdots \quad V_{bn}(\theta)] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$
$$= J_b(\theta)\dot{\theta} \qquad (6.13)$$

المصفوفة $J_b(\theta)$ هي مصفوفة اليعقوبي في جملة محاور النهاية العاملة (الجسم)، وبشكل أكثر بساطة يمكن تسميتها بيعقوبي الجسم.

تعريف 6.2. لنفترض أن لدينا التمثيل الكينماتيكي الأمامي لروبوت ذي سلسلة مفتوحة مكون من n وصلة ومعبراً عنه بصيغة جداء المصفوفات التالية:

$$T = Me^{[B_1]\theta_1}e^{[B_2]\theta_2} \ldots e^{[B_n]\theta_n} \qquad (6.14)$$

فإن يعقوبي الجسم $J_b(\theta) \in R^{6\times n}$ يربط شعاع معدلات تغير المفاصل $\theta^{\cdot} \in R^n$ بالسرعة الفضائية للنهاية العاملة $V_b = (\omega_b, \nu_b)$ من خلال المعادلة:

$$V_b = J_b(\theta)\dot{\theta} \qquad (6.15)$$

والعمود i من المصفوفة $J_b(\theta)$ يعطى بالعلاقة:

$$V_{b,i}(\theta) = Ad_{e^{-[B_n]\theta_n} \ldots e^{-[B_{i+1}]\theta_{i+1}}}(B_i) \qquad (6.16)$$

وذلك من أجل $I = n-1, \ldots, 1$، حيث $V_{bn}(\theta) = B_n$.

وبشكل مماثل لأعمدة مصفوفة يعقوبي الفضاء، فإن هناك معنى فيزيائياً يمكن أن نستخلصه من أعمدة مصفوفة يعقوبي الجسم، حيث إن كل عمود $V_{bi} = (\omega_{bi}(\theta), \nu_{bi}(\theta))$ هو عبارة عن شعاع التلولب لمحور المفصل i معبراً عنه في جملة محاور النهاية العاملة وليس في جملة المحاور الثابتة. والإجراء المتخذ من أجل تحديد أعمدة مصفوفة يقوبي الجسم هو نفسه الإجراء المتخذ من أجل استنتاج التمثيل الكينماتيكي الأمامي باستخدام صيغة جداء الأسيات كما في المعادلة (6.14)، ولكن مع فرق واحد هو أن كل شعاع تلولب لكل مفصل يتم استنتاجه من أجل أية قيمة لـ θ وليس من أجل $\theta = 0$ فقط.

6.1.3. العلاقة بين يعقوبي الفضاء ويعقوبي الجسم:

إذا أشرنا إلى جملة المحاور الثابتة بـ {s}، وجملة محاور النهاية العاملة لذراع الروبوت بـ {b}، فإن التمثيل الكينماتيكي الأمامي يمكن كتابته بالشكل $T_{sb}(\theta)$. السرعة الفضائية لجملة محاور الطرف (النهاية العاملة) يمكن أن يتم التعبير عنها بالنسبة لجملة المحاور الثابتة وجملة محاور النهاية العاملة كالآتي:

$$[V_s] = \dot{T}_{sb}T_{sb}^{-1} \qquad (6.17)$$

$$[V_b] = T_{sb}^{-1}\dot{T}_{sb} \qquad (6.18)$$

حيث V_s و V_b مرتبطتان بالعلاقة:

$$V_s = Ad_{T_{sb}}(V_b)$$

وكلاً من V_s و V_b مرتبطتان باليعقوبي الخاص بها بالشكل:

$$V_s = J_s(\theta)\dot{\theta} \qquad (6.19)$$

$$V_b = J_b(\theta)\dot{\theta} \qquad (6.20)$$

ومن خلال السابق فإنه يمكن أن نكتب:

$$Ad_{T_{sb}}(V_b) = J_s(\theta)\dot{\theta} \qquad (6.21)$$

وبضرب طرفي المعادلة (6.21) بالدالة الملحقة الخاصة بالتحويل T_{bs}، وباستخدام الخاصية $Ad_M \,.\, Ad_N = Ad_{MN}$، نحصل على:

$$\begin{aligned} &Ad_{T_{bs}}\left(Ad_{T_{sb}}(V_b)\right) = Ad_{T_{bs}T_{sb}}(V_b) \\ &= V_b \\ &= Ad_{T_{bs}}\left(J_s(\theta)\dot{\theta}\right) \end{aligned}$$

ونحن نعلم أيضاً أن $V_b = J_b(\theta)\dot{\theta}$، بالتالي فإننا نجد أن $J_s(\theta)$ و $J_b(\theta)$ مرتبطان ببعضهما من خلال العلاقة:

$$J_s(\theta) = Ad_{T_{sb}}\left(J_b(\theta)\right) \qquad (6.22)$$

وبكتابة الدالة الملحقة Ad_T بالشكل المصفوفي $[Ad_T]$ ذو البعد 6×6، فإن المعادلة أعلاه يمكن التعبير عنها بالشكل الآتي:

$$J_s(\theta) = \left[Ad_{T_{sb}}\right]J_b(\theta) \qquad (6.23)$$

ويمكن الحصول على مصفوفة يقوبي الجسم من مصفوفة يعقوبي الفضاء عن طريق العلاقة التالية:

$$J_b(\theta) = Ad_{T_{bs}}\left(J_s(\theta)\right) = \left[Ad_{T_{bs}}\right]J_s(\theta) \qquad (6.24)$$

6.2. التوازن الستاتيكي لروبوتات السلسلة المفتوحة:

يمكننا أن نقول أن الجسم الصلب يقع في حالة توازن ستاتيكي إذا كان غير قادر على الحركة، وإذا كانت محصلة القوى والعزوم المطبقة على الجسم مساوية للصفر. ولنقم الآن بمراجعة مفهوم العزم Moment بشكل موجز وذلك بافتراض أن هناك قوة تؤثر على جسم صلب ما. إذا كان مركز ثقل الجسم الصلب لا يقع على حامل شعاع القوة، فإن هذه القوة سوف تسبب دوراناً

للجسم الصلب، وهذا الدوران يحصل بفعل العزم المتولد عن القوة f حول نقطة مرجعية ما p في الفضاء الفيزيائي، وهذا العزم يعرف على أنه الجداء الخارجي:

$$\vec{m} = r \times f \qquad (6.25)$$

حيث r هو الشعاع من النقطة p إلى النقطة من الجسم الصلب التي تتطبق عليها القوة f. ومن أجل جسم صلب خاضع لمجموعة من القوى والعزوم، فإذا كان مجموع هذه القوى ومجموع هذه العزوم مساوياً للصفر، فإن الجسم الصلب سوف يكون ثابتاً Stationary، ويمكن القول بأنه واقع في حالة توازن ستاتيكي Static equilibrium. ومن الجدير بالذكر أنه عند جمع العزوم فإنه يجب الانتباه أن تكون العزوم مأخوذه بالنسبة لنفس النقطة المرجعية p.

ويمكن القول أن ذراع الروبوت يقع في حالة توازن ستاتيكي إذا كانت جميع وصلاته واقع في حالة توازن ستايكي. وفي هذه الفقرة سوف ندرس (من أجل أذرع الروبوتات الواقعة في حالة توازن ستاتيكي) العلاقة بين القوى الخارجية والعزوم المطبقة على النهاية العاملة، والقوى وعزوم الدوران Torques المطبقة على كل مفصل من مفاصل الروبوت. وهذه الحالة يمكن أن تنشأ، على سبيل المثال، عندما يدفع ذراع روبوتي ذو ست درجات حرية جداراً غير قابل للحركة.

وسنقوم بداية بمراجعة القوى الفضائية (والتي يمكن الإشارة لها على أنها التواءات Wrenches وفق مفهوم نظرية التلولب Screw Theory)، والتي يمكن الحصول عليها عن طريق دمج القوى والعزوم بحيث تشكل مقداراً كمياً سداسي الأبعاد، وذلك بنفس الطريقة التي يتم الحصول على السرعات الفضائية عن طريق دمج السرعات الخطية والزاوية على شكل شعاع سداسي الأبعاد. وكما قمنا بالنسبة للسرعات الفضائية، سنقوم بدراسة كيفية تحول القوى الفضائية وذلك عند التغيير بين جمل المحاور المرجعية.

وبعد ذلك سوف نتطرق لمبدأ العمل الافتراضي Virtual Work، ولكن بالنسبة للسرعات الفضائية والقوى الفضائية. إن تطبيق مبدأ العمل الافتراضي على ذراع الروبوت الذي افترضنا أنه واقع في حالة توازن ستاتيكي سيقودنا إلى النتيجة التي نريد الحصول عليها من هذه الدراسة، والتي تنص على أن أية قوة فضائية مطبقة على النهاية العاملة للروبوت ستكون مرتبطة بشكل خطي مع عزوم الدوران المطبقة على المفاصل.

6.2.1. القوى الفضائية Spatial Forces:

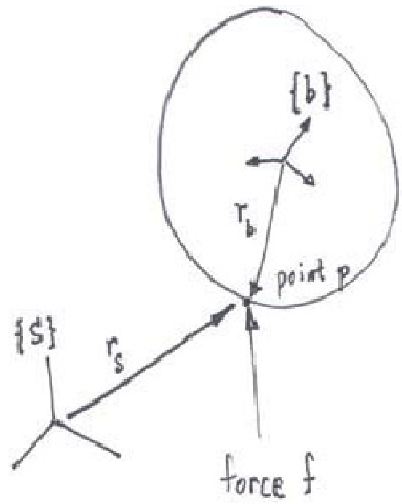
بالضبط وكما وجدنا سابقاً أنه من الجيد دمج السرعة الزاوية لجملة المحاور المتحركة $\omega \in R^3$ مع السرعة الخطية لهذه لجملة $v \in R^3$ بحيث يشكلان شعاع السرعة الفضائية $V = (\omega, v)$ السداسي الأبعاد، فإنه لنفس السبب سيكون من المفيد أن نعرف وبشكل مماثل مايسمى القوة الفضائية Spatial Force والذي هو عبارة عن شعاع سداسي الأبعاد ناتج عن دمج شعاع القوة ثلاثي الأبعاد $f \in R^3$ مع شعاع العزم ثلاثي الأبعاد $m \in R^3$ بالشكل الآتي:

$$F = \begin{bmatrix} m \\ f \end{bmatrix} \qquad (6.26)$$

ويمكن كتابة المعادلة أعلاه بالشكل $F = (m,f)$ أيضاً.

ولنقم الآن بإيجاد تمثيل هذه القوة الفضائية بالنسبة لجملة محاور مرجعية محددة. ولهذا الغرض، لنفرض أن لدينا جسماً صلباً مربوطاً بجملة محاور متحركة $\{b\}$. وبغية التعبير عن كل شيء بالنسبة لجملة المحاور المتحركة $\{b\}$، لنفترض أن $f_b \in R^3$ تشير إلى شعاع القوة المطبقة على النقطة p الموجودة على الجسم الصلب. وهذه القوة بالتالي سوف تولد عزماً بالنسبة لمبدأ إحداثيات جملة المحاور $\{b\}$، ويكون هذا العزم في جملة المحاور المتحركة $\{b\}$:

$$m_b = r_b \times f_b \qquad (6.27)$$



الشكل 6.4: العلاقة بين F_b و Fs.

حيث $r_b \in R^3$ هو الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور $\{b\}$ إلى النقطة p. وسوف نقوم بدمج القوة f_b والعزم m_b على شكل قوة فضائية سداسية الأبعاد $F_b = (m_b,f_b)$، وسوف نسميها بالقوة الفضائية بالنسبة لجملة محاور الجسم.

ولنفترض الآن أننا نريد التعبير عن هذه القوة وهذا العزم بالنسبة لجملة المحاور الثابتة (جملة محاور الفضاء) $\{s\}$. لذلك لنفرض أن $f_s \in R^3$ يشير إلى شعاع القوة المطبقة على النقطة p من الجسم الصلب ولكن بالنسبة لجملة المحاور الثابتة $\{s\}$. والعزم الناتج من هذه القوة بالنسبة لمبدأ إحداثيات الجملة $\{s\}$ والمعبر عنه في جملة المحاور $\{s\}$ سيكون:

$$m_s = r_s \times f_s \qquad (6.28)$$

حيث $r_s \in R^3$ هو الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور $\{s\}$ إلى النقطة p. وكما فعلنا بالنسبة لـ F_b، لنقم بدمج كل من m_s و f_s على شكل قوة فضائية سداسية الأبعاد $F_s = (m_s,f_s)$، وسوف نسميها بالقوة الفضائية بالنسبة لجملة محاور الفضاء.

سنقوم الآن بتحديد العلاقة بين $F_b = (m_b,f_b)$ و $F_s = (m_s,f_s)$. فبالنظر للشكل (6.4)، ليكن التحويل T_{sb} معطى بالعلاقة:

$$T_{sb} = \begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويمكن أن نلاحظ بوضوح أن $f_b = R_{bs}f_s$، ويمكن أن نكتب هذه المعادلة بشكلها الآخر كالتالي:

$$f_b = R_{sb}^T f_s \qquad (6.29)$$

العزم m_b يعطى بالعلاقة $m_b = r_b \times f_b$، حيث $r_b = R_{bs}(r_s\text{-}p_{sb})$، وهذه النتيجة تأتي من كون المقدار $r_s\text{-}p_{sb}$ معبراً عنه في جملة المحاور الثابتة {s}، ويجب تحويله بحيث يكون معبراً عنه في جملة محاور الجسم {b} وذلك عن طريق الجداء بـ R_{bs}. وأيضاً نستطيع أن نكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$r_b = R_{sb}^T(r_s - p_{sb})$$

ومنه فإن العزم $m_b = r_b \times f_b$ يمكن الآن كتابته بدلالة f_s و m_s كالتالي:

$$\begin{aligned} m_b &= R_{sb}^T(r_s - p_{sb}) \times R_{sb}^T f_s \\ &= [R_{sb}^T r_s]R_{sb}^T f_s - [R_{sb}^T p_{sb}]R_{sb}^T f_s \\ &= R_{sb}^T[r_s]f_s - R_{sb}^T[p_{sb}]f_s \\ &= R_{sb}^T m_s + R_{sb}^T[p_{sb}]^T f_s \qquad (6.30) \end{aligned}$$

حيث أنه في السطر الأخير قمنا باستخدام الخاصية التالية $[p_{sb}]^T = -[p_{sb}]$. وبكتابة كل من m_b و f_b بدلالة m_s و f_s، فإننا نجد ومن خلال المعادلتين (6.29) و (6.30):

$$\begin{bmatrix} m_b \\ f_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sb} & 0 \\ [p_{sb}]R_{sb} & R_{sb} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_s \\ f_s \end{bmatrix} \qquad (6.31)$$

أو بدلالة القوى الفضائية وباستخدام خاصية الدالة الملحقة:

$$F_b = \mathrm{Ad}_{T_{sb}}^T(F_s) = [\mathrm{Ad}_{T_{sb}}]^T F_s \qquad (6.32)$$

ومن المعادلة السابقة يمكن أن نلاحظ أنه في حال تغيير جمل المحاور، فإن السرعات الفضائية يتم تحويلها عن طريق مفهوم الدالة الملحقة، في حين أن القوى الفضائية يتم تحويلها باستخدام منقول هذه الدالة. ويمكن إيجاز هذه النتيجة من خلال الخاصية التالية:

الخاصية 6.1. لنفترض أن لدينا قوة ما f، لتكن m العزم المتولد عن القوة f بالنسبة لنقطة ما p في الفضاء الفيزيائي. وكان معطى لدينا جملة محاور مرجعية {a}، حيث $f_a \in R^3$ و $m_a \in R^3$ وتعطى بالعلاقة $m_a = r_a \times f_a$، وهما تمثيل القوة f والعزم m في جملة المحاور {a}، وحيث إن $r_a \in R^3$ هو الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور {a} إلى النقطة p معبراً عنه في جملة المحاور {a}. وكان معطى لنا أيضاً جملة محاور مرجعية أخرى {b} بحيث يكون $f_b \in R^3$ و $m_b = r_b \times f_b \in R^3$ هما تمثيل القوة f و العزم m في جملة المحاور {b}، حيث $r_b \in R^3$ هو الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور {b} إلى النقطة p معبراً عنه في جملة المحاور {b}.

وبتعريف القوى الفضائية $F_a = (m_a, f_a)$ و $F_b = (m_b, f_b)$، فإن F_a و F_b مرتبطتان ببعضهما من خلال العلاقات التالية:

$$F_b = \mathrm{Ad}^T_{T_{ab}}(F_a) = [\mathrm{Ad}_{T_{ab}}]^T F_a \qquad (6.33)$$

$$F_a = \mathrm{Ad}^T_{T_{ba}}(F_b) = [\mathrm{Ad}_{T_{ba}}]^T F_b \qquad (6.34)$$

6.2.2. التحليل الستاتيكي ومبدأ العمل الافتراضي Virtual Work:

عندما يكون الروبوت في حالة توازن ستاتيكي، فإننا نستطيع أن نجد أن يعقوبي التمثيل الكينماتيكي يربط أيضاً القوى والعزوم المطبقة على النهاية العاملة للروبوت بعزوم الدوران والقوى المطبقة على مفاصل الروبوت. وهذه الحقيقة يمكن الوصول إليها باستخدام مبدأ العمل الافتراضي Virtual Work، والذي سنتحدث عنه الآن. إذا قمنا باختيار جملة محاور مرجعية ثابتة، وافترضنا أنه لدينا جسماً صلباً يتحرك بسرعة خطية v وسرعة زاوية ω، وكان هذا الجسم خاضعاً لمحصلة قوى f ومحصلة عزوم m، فإن العمل المنجز من قبل الجسم الصلب خلال فترة زمنية ما $[t_0,t_1]$ يعطى بالتكامل التالي:

$$\text{Work} = \int_{t_0}^{t_1} f^T v + m^T \omega \, dt \qquad (6.35)$$

وبدلالة القوى والسرعات الفضائية فإن المعادلة (6.35) يمكن أيضاً كتابتها بالشكل:

$$\text{Work} = \int_{t_0}^{t_1} F^T V \, dt \qquad (6.36)$$

حيث $F = (m,f)$ و $V = (\omega,v)$. إن العمل المنجز من قبل نظام مكون من أجسام صلبة هو ببساطة عبارة عن مجموع الأعمال المنجزة من قبل كل من هذه الأجسام الصلبة.

ومن أجل جسم صلب واحد، لنفترض أن القوة المحصلة والعزم المحصل يتم تطبيقهما على الجسم الصلب خلال فترة زمنية متناهية في الصغر δt Infinitesimal، بحيث تؤدي إلى انزياح متناهٍ في الصغر للجسم الصلب. إذا كان الجسم الصلب في حالة توازن ستاتيكي، فإن الجسم يكون ثابتاً لهذا فإنه لا يقدم أي عمل. وهذا الانزياح المتناهي في الصغر خلال الفترة δt يمكن أن نفترضه على أنه انزياح افتراضي Virtual Displacement. ومبدأ العمل الافتراضي ينص على أنه في حالة التوازن الستاتيكي، فإن عمل أية قوى أو عزوم خارجية مطبقة على الجسم الصلب هو دائماً يساوي الصفر من أجل أية انزياحات افتراضية مسموح بها للجسم الصلب. وهذا المبدأ يمكن أيضاً تعميمه على الأذرع الروبوتية، وبشكل أشمل أكثر، على أي نظام مكون من أجسام صلبة متصلة مع بعضها البعض. فمن أجل أية انزياحات افتراضية مسموح بها للنظام (على سبيل المثال، ذاك النظام الذي لايحدث فيه خلل في بعض مقيداته الحركية)، فإن العمل الافتراضي الكلي للقوى الخارجية والعزوم الخارجية المطبقة على الجسم سيكون مساويا للصفر.

والآن لنفترض أن لدينا ذراعاً روبوتياً مكوناً من n وصلة بحيث يكون واقعاً في حالة توازن ستاتيكي، وبفرض أن هناك قوة ما وعزم ما يتم تطبيقهما على الطرف (النهاية العاملة). ومن الآن فإن جميع المقادير الكمية سيتم تعريفها بالنسبة لجملة محاور النهاية العاملة (الجسم): ليكن لدينا $F_b = (m_b, f_b)$ هي عبارة عن القوة الفضائية الخارجية المطبقة خلال فترة زمنية متناهية في الصغر $[t_0, t_0+\delta t]$، و $V_b = (\omega_b, v_b)$ هي السرعة الفضائية (اللحظية) للنهاية العاملة للروبوت، بالتالي فإن العمل الافتراضي المنجز من قبل هذا الروبوت يعطى بالمعادلة (6.35). وبفرض عدم وجود ضياعات في الروبوت، فمن مبدأ العمل الافتراضي فإن هذا العمل المتناهي في الصغر يجب أن يكون هو نفسه الناتج من عزوم الدوران المطبقة على المفاصل:

$$\text{Virtual Work} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} F_b^T V_b \, dt = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} \tau^T \dot{\theta} \, dt$$

حيث $\dot{\theta} \in R^n$ هو شعاع سرعات المفاصل، و $\tau \in R^n$ هو شعاع عزوم الدوران للمفاصل. وكما نعلم فإن $V_b = J_b(\theta)\dot{\theta}$، فإننا نجد:

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t} F_b^T J_b(\theta) \dot{\theta} \, dt = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} \tau^T \dot{\theta} \, dt$$

ولأن المعادلة يجب أن تكون محققة من أجل جميع الفترات الزمنية المتناهية في الصغر في كلا طرفي المعادلة، فإن المقادير التي تتم مكاملتها يجب أن تكون متساوية:

$$F_b^T J_b(\theta) \dot{\theta} = \tau^T \dot{\theta}$$

بالإضافة إلى ذلك، فإنه وبسبب كون جميع المقادير الكيمة أعلاه يجب أن تكوم محققة من أجل جميع الانزياحات الافتراضية المسموح بها $\dot{\theta}\delta t$ (وهنا $\dot{\theta}$يمكن أن يكون لها قيم عشوائية) فإننا نجد ما يلي:

$$\tau = J_b^T(\theta) F_b \qquad (6.37)$$

لنقم الآن بتكرار نفس طريقة استنتاج المعادلة (6.37)، ولكن هذه المرة سنقوم بالتعبير عن جميع المقادير الكمية بالنسبة لجملة المحاور الثابتة (الفضاء). لتكن $V_s = (\omega_s, v_s)$ تشير إلى السرعة الفضائية للنهاية العاملة، و $F_s = (m_s, f_s)$ هي القوة الفضائية المطبقة على النهاية العاملة (أو يمكن القول بأنها مطبقة على مبدأ إحداثيات جملة محاور النهاية العاملة)، وكل هذه المقادير يتم التعبير عنها بالنسبة لجملة المحاور الثابتة. وهنا f_s هي القوة الخارجية المطبقة معبراً عنها في جملة المحاور الثابتة، في حين m_s هو العزم الخارجي المطبق حول مبدأ إحداثيات جملة المحاور الثابتة. فإذا تذكرنا من الفقرة السابقة أن F_b و F_s يرتبطان ببعضهما من خلال العلاقة:

$$F_b = [\mathrm{Ad}_{T_{sb}}]^T F_s$$

وأن $J_b(\theta)$ و $J_s(\theta)$ يرتبطان ببعضهما من خلال العلاقة:

$$J_b(\theta) = [Ad_{T_{bs}}]J_s(\theta)$$

فإن المعادلة (6.37) يمكن كتابتها بالشكل:

$$\begin{aligned}\tau = J_b^T(\theta)F_b &= \left([Ad_{T_{bs}}]J_s(\theta)\right)^T [\mathrm{Ad}_{T_{sb}}]^T F_s \\ &= J_s^T(\theta)\left([\mathrm{Ad}_{T_{sb}}][Ad_{T_{bs}}]\right)^T F_s \\ &= J_s^T(\theta)F_s \qquad (6.38)\end{aligned}$$

وبذلك فإنه يمكن أن نكتب العلاقة الستاتيكية بصيغة عامة بالشكل التالي:

$$\tau = J^T(\theta)F \qquad (6.39)$$

مع الأخذ بالحسبان أن $J(\theta)$ و F يتم التعبير عنهما بالنسبة لنفس جملة المحاور. وغالباً ما نهتم في علم الروبوتيكس Robotics بتحديد قيم عزوم الدوران في المفاصل اللازمة لتوليد القوة المعطاة F وذلك بافتراض أن الروبوت واقع في حالة توازن ستاتيكي، ويمكن للمعادلة الستاتيكية السابقة أن تعطينا أجوبة مباشرة لهذا السؤال.

ولكن يمكن أن يتم طرح السؤال بصيغة معاكسة، أي، ماهي القوى الفضائية المتولدة عند طرف الروبوت (النهاية العاملة) الناتجة عن تطبيق عزوم الدوران المعطاة للمفاصل؟ فإذا كانت J^T هي عبارة عن مصفوفة مربعة وكان لها معكوس، فإنه من الواضح أن $F = J^{-T}(\theta)\tau$. وعلى أية حال، إذا كان بعد شعاع المفاصل n أكبر من بعد القوة F (ويساوي ستة)، فإن معكوس المصفوفة J^T سيكون غير موجوداً. وهذا ما يعني فيزيائياً أن ذراع الروبوت لديه درجات حرية فائضة. وبسبب الدرجات الحرية الفائضة هذه، فإنه يمكن لبعض وصلات الروبوت أن تتحرك حتى لو كانت النهاية العاملة للروبوت ثابتة (على سبيل المثال، الميكانيزم رباعي الوصلات المستوي يمكن اعتباره على أنه ميكانيزم ذو سلسلة مفتوحة مكون من ثلاثة مفاصل دورانية 3R بحيث تكون نهايته العاملة مثبتة بمفصل على القاعدة). وهذه التحركات الداخلية الناجمة عن عزوم الدوران المطبقة على المفاصل ستجعل من شرط التوازن الستاتيكي غير محققاً. ويطلق على الروبوتات التي يكون فيها مجموع درجات الحرية لمفاصلها أكبر من بعد فضاء المهمة أو العمل اسم الروبوتات الفائضة حركياً (كينماتيكياً)، وسنقوم في الفصل القادم بدراسة التحليل الكينماتيكي الخلفي (العكسي) Inverse Kinematics لأذرع الروبوتات الفائضة حركياً.

6.3. القصور (الشذوذ) الحركي Kinematic Singularities:

إن مصفوفة اليعقوبي الناتجة من التحليل الكينماتيكي الأمامي تسمح لنا بتحديد الوضعيات التي تخسر فيها النهاية العاملة للروبوت قابلية الحركة بشكل لحظي في اتجاه محدد، أو قابلية الدوران اللحظي حول محور أو محاور محددة، وهذه الوضعيات تسمى بالقصور الحركي Kinematic Singularities. رياضياً، إن الوضعية التي يكون فيها الروبوت قاصر حركياً هي تلك التي تقل فيها مرتبة Rank مصفوفة اليعقوبي للروبوت. ولنفهم السبب، لنفترض أن لدينا مصفوفة يعقوبي الجسم $J_b(\theta)$، والتي يشار إلى أعمدتها بـ V_{bi} حيث $i = 1,\dots n$، بالتالي:

$$V_b = [V_{b1}(\theta) \quad V_{b2}(\theta) \quad \cdots \quad V_{bn}(\theta)] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$
$$= V_{b1}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots + V_{bn}(\theta)\dot{\theta}_n$$

ومن هذه المعادلة نجد أن مجموعة السرعات الفضائية اللحظية الممكنة لجملة محاور النهاية العاملة للروبوت تعطى من خلال تركيبة خطية لـ V_{bi}. وطالما أن $n \geq 0$ ، فإن المرتبة الأعظمية التي يمكن أن تحققها مصفوفة يعقوبي الجسم $J_b(\theta)$ هو ستة. ومواضع القصور الحركي تحدث عند قيم محددة لـ θ والتي تجعل مرتبة يعقوبي الجسم $J_b(\theta)$ تنخفض إلى مرتبة أقل من ستة، وعند هذه المواضع تخسر النهاية العاملة للروبوت القابلية لتوليد السرعات الفضائية اللحظية في اتجاه واحد أو أكثر.

إن التعريف الرياضي للقصور الحركي الآنف الذكر لايتعلق بنوع مصفوفة اليعقوبي التي نختارها سواء كانت مصفوفة يعقوبي الجسم أو مصفوفة يعقوبي الفضاء. ولمعرفة السبب، لنتذكر العلاقة بين $J_s(\theta)$ و $J_b(\theta)$ المعطاة بالعلاقة:

$$J_s(\theta) = \begin{bmatrix} R_{sb} & 0 \\ [p_{sb}]R_{sb} & R_{sb} \end{bmatrix} J_b(\theta)$$

بالتالي فإن مرتبة مصفوفة اليعقوبي $J_s(\theta)$ تساوي مرتبة الطرف اليميني من المعادلة السابقة. ونستطيع أن نؤكد أن مصفوفة المجموعة الملحقة $[Ad_T]$ للتحويل T_{sb} لها دوماً معكوس. ويمكن برهنة ذلك من خلال دراسة المعادلة الخطية التالية:

$$\begin{bmatrix} R_{sb} & 0 \\ [p_{sb}]R_{sb} & R_{sb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

ونلاحظ أن لها حل وحيد هو $x = y = 0$، مما يدل على أن مصفوفة المجموعة الملحقة السابقة لها دوماً معكوس. وبما أن جداء مصفوفة بمصفوفة أخرى لها معكوس لا يغير من مرتبتها، فهذا يؤدي إلى أن:

$$\operatorname{rank} J_s(\theta) = \operatorname{rank} J_s(\theta)$$

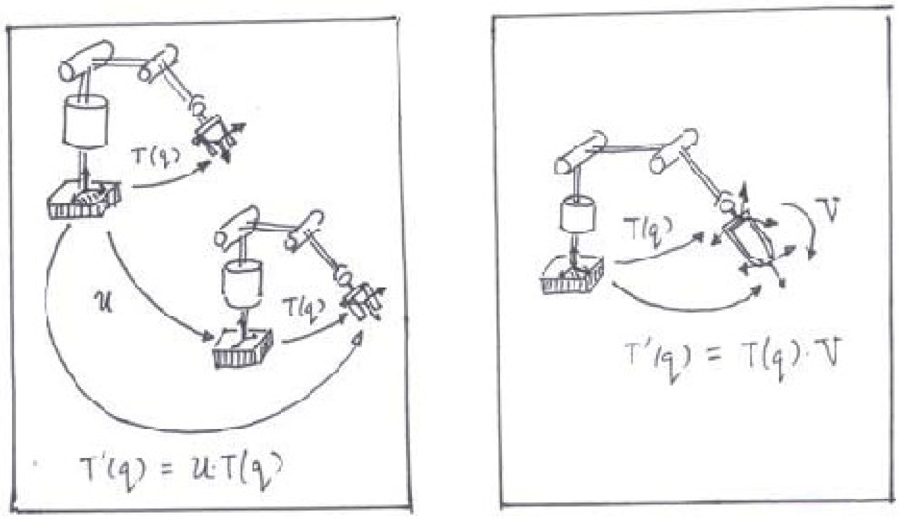
أي يمكن القول أن وضعيات القصور الحركي الناتجة عن مصفوفة يعقوبي الجسم هي نفس وضعيات القصور الحركي الناتجة عن مصفوفة يعقوبي الفضاء.

ويمكن القول أيضاً بأن وضعيات القصور الحركي لا تتعلق بكيفية اختيار جملة المحاور الثابتة. بمعنى أنه إذا قمنا باختيار جملة محاور ثابتة مختلفة غير الجملة التي اخترناها من قبل مثلاً، الأمر الذي يكافئ نقل ذراع الروبوت كاملاً من مكان لآخر، فإن ذلك لن يؤثر بالطبع فيما إذا كانت الوضعية المدروسة للروبوت قاصرة حركياً أم لا. وهذه الحقيقة الواضحة يمكن برهنتها من خلال النظر إلى الشكل (6.5 (a)). حيث إن التمثيل الكينماتيكي الأمامي بالنسبة لجملة

المحاور الثابتة الأصلية يشار إليه بـ T(θ)، في حين أن التمثيل الكينماتيكي الأمامي بالنسبة لجملة المحاور الثابتة المنقولة (أي بعد تغيير مكانها) يشار إليه بـ T\`(θ) = PT، حيث يكون التحويل P ϵ SE(3) هو مقدار ثابت. بالتالي فإن يعقوبي الجسم لـ T\`(θ)، والمشار له بـ J_b\`(θ)، يتم الحصول عليه كالتلي:

$$T^{`-1}\dot{T}^{`} = (T^{-1}P^{-1})\big(P\dot{T}\big) = T^{-1}\dot{T}$$

وهذا يعني أن J_b\`(θ) = J_b(θ)، أي أن وضعيات القصور الحركي للروبوت الأصلي والروبوت الذي تم تغيير مكانه هي نفسها.



الشكل 6.5: وضعيات القصور الحركي مستقلة عن كيفية اختيار جمل المحاور الثابتة وجمل محاور الجسم. (a) اختيار جملة محاور ثابتة مختلفة، والذي يكافئ تغيير مكان قاعدة ذراع الروبوت (b) اختيار جملة محاور مختلفة للجسم.

وهناك حقيقة أخرى أقل وضوحاً إلى حد ما، وهي تلك التي تقول أن وضعيات القصور الحركي هي أيضاً مستقلة عن كيفية اختيار جملة محاور الجسم. بالعودة إلى الشكل (6.5 (b))، لنفترض أن التمثيل الكينماتيكي الأمامي لجملة محاور الجسم الأصلية معطى بـ T(θ)، في حين أن التمثيل الكينماتيكي الأمامي لجملة محاور الجسم المنقولة (أي بعد تغيير مكانها) معطى بالعلاقة التالية: T\`(θ) = T(θ)Q، حيث Q ϵ SE(3) هي مقدار ثابت. وهنا سوف نأخذ بالحسبان مصفوفة يعقوبي الفضاء (ونحن نعلم أن وضعيات القصور الحركي الناتجة عن يعقوبي الفضاء هي نفسها الناتجة عن يقوبي الجسم)، ولتكن $J_s$\`(θ) تشير إلى يعقوبي الفضاء لـ T\`(θ). وبإجراء حساب بسيط يمكن أن نجد:

$$\dot{T}^{`}T^{`-1} = \big(\dot{T}Q\big)(Q^{-1}T^{-1}) = \dot{T}T^{-1}$$

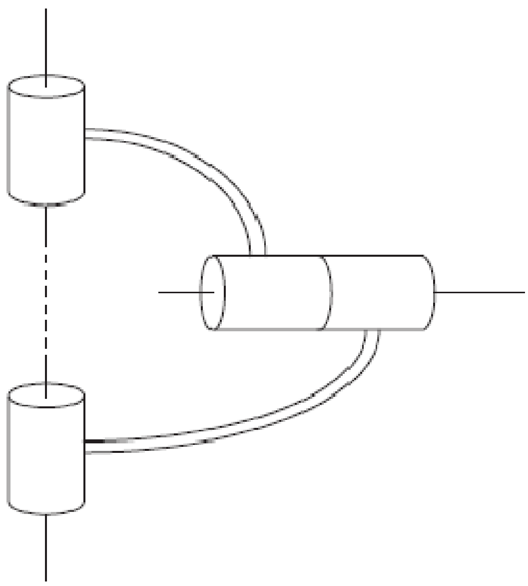
وهذا يعني أن J_s\`(θ) = J_s(θ)، أي أن وضعيات القصور الحركي تبقى نفسها في حال تغيير جملة محاور النهاية العاملة.

في الجزء المتبقي من هذه الفقرة سوف نقوم بدراسة بعض حالات القصور الحركي الشائعة والتي تحدث في روبوتات السلسلة المفتوحة التي تمتلك ست درجات من الحرية والمكونة من مفاصل دورانية أو تمددية. ونحن نعلم الآن أنه يمكن استخدام إما يعقوبي الفضاء أو يعقوبي الجسم من أجل إجراء التحليل، وسوف نستخدم يعقوبي الفضاء في دراسة الأمثلة أدناه.

الحالة I: مفصلان دورانيان محوراهما منطبقان على خط واحد Collinear:

الحالة الأولى التي سنقوم بدراستها هي تلك التي يكون فيها محورا مفصلين دورانين منطبقين على خط واحد كما في الشكل (6.6). وهذين المحورين يمكن ترقيمهما بـ 1 و 2. والأعمدة الموافقة لهذين المفصلين في مصفوفة اليعقوبي تكون كالتالي:

$$V_{s1}(\theta) = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ -\omega_1 \times q_1 \end{bmatrix}, \quad V_{s2}(\theta) = \begin{bmatrix} \omega_2 \\ -\omega_2 \times q_2 \end{bmatrix}$$

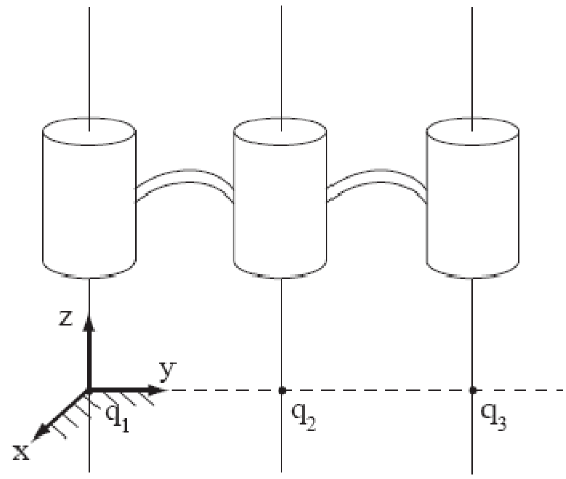


الشكل 6.6: حالة قصور حركي وذلك عندما يكون محورا مفصلين منطبقين على خط واحد.

ولأن محوري المفصلين منطبقين على خط واحد، فإننا نجد أن $\omega_1 = \pm\, \omega_2$، ولنأخذ بالحسبان هنا الإشارة السالبة فقط. وأيضاً $\omega_i \times (q_1 - q_2) = 0$ من أجل $i = 1,2$. بالتالي فإن $V_{s1} - V_{s2} = 0$، مما يدل على أن V_{s1} و V_{s2} يقعان على نفس الخط في الفضاء سداسي الأبعاد. ولذلك، فإن المجموعة $\{V_{s1}, V_{s2}, \ldots, V_{s6}\}$ لا يمكن أن تكون مستقلة خطياً، ومرتبة مصفوفة اليعقوبي $J_s(\theta)$ ستكون أقل من ستة.

الحالة II: عندما تكون محاور ثلاثة مفاصل متوازية وواقعة في مستوٍ واحد Coplanar:

الحالة الثانية التي سنقوم بدراستها هي تلك الحالة التي تكون فيها محاور ثلاثة مفاصل متوازية وواقعة في مستوٍ مشترك كما في الشكل (6.7). فإذا قمنا بترقيم محاور المفاصل هذه بـ 1 و 2 و 3، وباختيار جملة محاور ثابتة كما في الشكل، فإننا نجد:

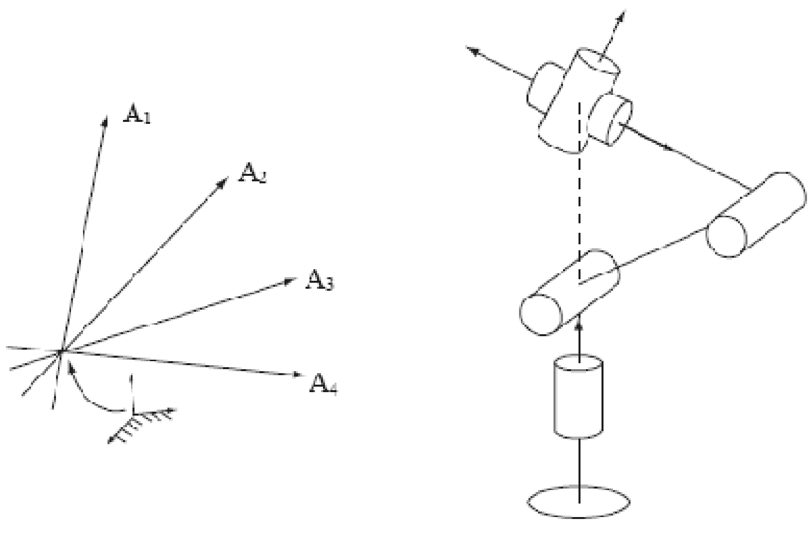


الشكل 6.7: حالة قصور حركي وذلك عندما تكون محاور ثلاثة مفاصل متوازية وواقعة في مستوٍ واحد.

$$J_s(\theta) = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_1 & \omega_1 & \cdots \\ 0 & -\omega_1 \times q_2 & -\omega_1 \times q_3 & \cdots \end{bmatrix}$$

وبما أن q_2 و q_3 هما نقطتان على نفس محور شعاع الواحدة، فإنه ليس صعباً أن نجد أن الأشعة الثلاثة أعلاه ليست مستقلة خطياً.

الحالة III: عندما تكون محاور أربعة مفاصل دورانية متقاطعة في نقطة واحدة:



الشكل 6.8: حالة قصور حركية عندما تكون محاور أربعة مفاصل دورانية متقاطعة في نقطة واحدة.

هنا سوف نقوم بدراسة الحالة التي تكون فيها محاور أربعة مفاصل دورانية متقاطعة في نقطة مشتركة كما في الشكل (6.8). ومرة أخرى لنقم بترقيم هذه المحاور من 1 إلى 4. وفي هذه الحالة سنقوم باختيار جملة المحاور الثابتة بحيث يكون مبدأ إحداثياتها هو نقطة التقاطع المشتركة بين المحاور الأربعة تلك، وبذلك نجد أن $q_1 = \ldots = q_4$. وبالتالي:

$$J_s(\theta) = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الأربعة أعمدة الأولى ليست مستقلة خطياً، وذلك لأن واحداً منها يمكن أن يكتب على شكل تركيبة خطية بدلالة الثلاثة أعمدة الأخرى. ويمكن أن تحدث مثل هذه الحالة من القصور الحركي، على سبيل المثال، عندما يكون مركز المعصم لذراع روبوت مرفقي يقع مباشرة فوق الكتف.

الحالة IV: أربعة مفاصل دورانية تقع في مستوٍ واحد:

سوف ندرس الآن الحالة التي تكون فيها محاور أربعة مفاصل تقع في مستوٍ مشترك. لنقم بترقيم هذه المحاور من 1 إلى 4، ولنقم باختيار جملة محاور ثابتة بحيث تكون جميع محاور المفاصل متوضعة في المستوي x-y. في هذه الحالة إن شعاع الواحدة $\omega_i \in R^3$ المتجه باتجاه محور المفصل i سيكون من الشكل:

$$\omega_i = \begin{bmatrix} \omega_{ix} \\ \omega_{iy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبشكل مشابه، فإن أي نقطة مرجعية $q_i \in R^3$ تقع على محور المفصل i ستكون من الشكل:

$$q_i = \begin{bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإننا نجد:

$$v_i = -\omega_i \times q_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{iy}q_{ix} - \omega_{ix}q_{iy} \end{bmatrix}$$

وستكون الأعمدة الأربع الأولى من مصفوفة يعقوبي الفضاء $J_s(\theta)$ هي:

$$\begin{bmatrix} \omega_{1x} & \omega_{2x} & \omega_{3x} & \omega_{4x} \\ \omega_{1y} & \omega_{2y} & \omega_{3y} & \omega_{4y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{1y}q_{1x} - \omega_{1x}q_{1y} & \omega_{2y}q_{2x} - \omega_{2x}q_{iy} & \omega_{3y}q_{3x} - \omega_{3x}q_{3y} & \omega_{4y}q_{4x} - \omega_{4x}q_{4y} \end{bmatrix}$$

والتي من الواضح أنها ليست مستقلة خطياً.

الحالة V: عندما تكون محاور ستة مفاصل دورانية متقاطة مع خط مشترك:

الحالة الأخيرة التي سندرسها هي تلك التي تكون فيها محارو ستة مفاصل دورانية متقاطعة مع خط مشترك. لنقم باختيار جملة محاور ثابتة بحيث يكون الخط المشترك يمتد على طول المحور $\hat{z}$، ولنقم باختيار نقطة التقاطع بين هذا الخط المشترك ومحور المفصل i كنقطة مرجعية $q_i \in R^3$ للمحور i، بالتالي فإن كل q_i هي من الشكل $q_i = (0,0,q_{iz})$، ويكون:

$$v_i = -\omega_i \times q_i = \left(\omega_{iy} q_{iz}, -\omega_{ix} q_{iz}, 0\right)$$

حيث $i = 1,\ldots,6$. ويعقوبي الفضاء $J_s(\theta)$ بالتالي يصبح بالشكل:

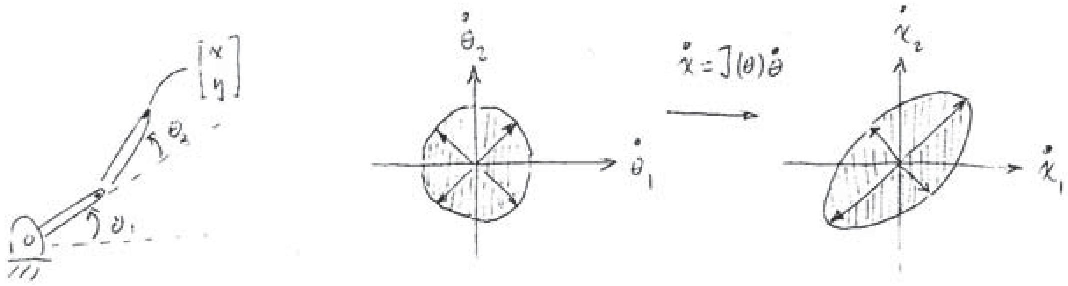
$$J_s(\theta) = \begin{bmatrix} \omega_{1x} & \omega_{2x} & \omega_{3x} & \omega_{4x} & \omega_{5x} & \omega_{6x} \\ \omega_{1y} & \omega_{2y} & \omega_{3y} & \omega_{4y} & \omega_{5y} & \omega_{6y} \\ \omega_{1z} & \omega_{2z} & \omega_{3z} & \omega_{4z} & \omega_{5z} & \omega_{6z} \\ \omega_{1y} q_{1z} & \omega_{2y} q_{2z} & \omega_{3y} q_{3z} & \omega_{4y} q_{4z} & \omega_{5y} q_{5z} & \omega_{6y} q_{6z} \\ -\omega_{1x} q_{1z} & -\omega_{2x} q_{2z} & -\omega_{31x} q_{3z} & -\omega_{4x} q_{4z} & -\omega_{5x} q_{5z} & -\omega_{6x} q_{6z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

والتي من الواضح أنها حالة قصور حركي.

6.4. قابلية المناورة Manipulability:

في الفقرة السابقة رأينا أنه في وضعية القصور الحركي، تخسر النهاية العاملة للروبوت القدرة على الحركة أو الدوران في اتجاه واحد أو أكثر. إن فكرة القصور الحركي هي عبارة عن طرح ذي وجهين، فهي تحدد فيما إذا كانت الهيئة المدرسة للروبوت تشكل حالة قصور حركي أم لا، وهي أيضاً معنية بالإجابة على السؤال فيما إذا كان بالإمكان قياس مدى تقارب الهيئة المدروسة من حالة القصور الحركي. وجواب هذا السؤال هو نعم؛ في الحقيقة، ليس فقط بالإمكان قياس مدى تقارب الهيئة المدروسة من حالة القصور الحركي، إنما أيضاً تحديد الاتجاهات التي تتضاءل فيها قابلية النهاية العاملة للروبوت على الحركة، وإلى أي مدى يصل هذا التضاؤل. إن إهليلج (قطع ناقص) قابلية المناورة The Manipulability Ellipsoid يسمح لنا هندسياً بتصوير الاتجاهات التي تستطيع فيها النهاية العاملة للروبوت الحركة بأقل "جهد" (سنشرح معنى ذلك في هذه الفقرة)، وفي المقابل، فإن الاتجاهات العامودية على هذه الاتجاهات ستتطلب الحركة وفقها جهداً أعظمياً.

سنوضح مفهوم إهليلج قابلية المناورة من خلال المثال الذي يدرس ميكانيزم السلسلة المفتوحة المستوي والحاوي على مفصلين دورانيين 2R كما هو مبين في الشكل (6.9). وبالأخذ بالحسبان الإحداثيات الديكارتية للطرف العامل فقط، فإن التحليل الكينماتيكي الأمامي للسرعة سيكون من الشكل $\dot{x} = J(\theta)\dot{\theta}$:



الشكل 6.9: إهليلج قابلية المناورة لميكانيزم السلسلة المفتوحة المكون من مفصلين دورانيين 2R.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}L_1\cos\theta_1 & L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2)\\ L_1\sin\theta_1 & L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} \quad (6.40)$$

لنفترض أن هيئة الروبوت الموافقة لـ θ لا تعد حالة قصور حركي، بالتالي فإن $J(\theta)$ سيكون لها معكوس. وبما أن $J(\theta)$ تمثل تحويلاً خطياً من سرعات المفاصل إلى سرعات النهاية العاملة للروبوت، فنستطيع من خلال ذلك أن نستنتج أن الدائرة الواحدية Unit Circle في فضاء سرعات المفاصل هي على شكل إهليج في فضاء سرعات النهاية العاملة للروبوت. ولمعرفة السبب، فإن الدائرة الواحدية يمكن تشخيصها بالقيد $\|\dot{\theta}\|^2 = 1$، وهذا القيد نفسه يمكن التعبير عنه بدلالة سرعات الطرف العامل للروبوت بـ $\|J^{-1}(\theta)\dot{x}\|^2 = 1$. فإذا كانت عناصر المصفوفة $J^{-1}(\theta)$ هي:

$$J^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

فإن القيد على سرعات النهاية العاملة سيكون:

$$\alpha\dot{x}_1^2 + \beta\dot{x}_1\dot{x}_2 + \gamma\dot{x}_2^2 = 1$$

حيث $\alpha = a^2+b^2$ و $\beta = 2(ab+cd)$ و $\gamma = b^2+d^2$. وكما نعلم فإن هذه المعادلة هي معادلة إهليج (قطع ناقص) مركزه هو مبدأ الإحداثيات (حيث إن $\beta^2-4\alpha\gamma < 0$ محقق دوماً).

المحور الرئيسي لهذا الإهليلج يحدد الاتجاه الذي وفقه تستطيع النهاية العاملة للروبوت أن تتحرك (أو أن تولد سرعات) بأقل قدر ممكن من الجهد (الجهد هنا بدلالة السرعات المدخلة). وفي المقابل، فإن المحور الثانوي يحدد الاتجاه الحركة الذي يتطلب القدر الأعظمي من الجهد. وعندما تكون هيئة ذراع الروبوت هي وضعية قصور حركي، فإن هذا الإهليلج ينطبق ليتحول إلى مستقيم يتجه باتجاه الحركة المسموحة. ومدى تقارب هيئة الروبوت المدروسة لحالة القصور الحركي يمكن قياسها بعدة طرق، مثلاً، عن طريق نسبة الأطوال بين محوري الإهليلج الرئيسي والثانوي، والقيمة الصغرى لهذه النسبة هي 1 والتي تشير إلى أن النهاية العاملة للروبوت تستطيع الحركة بشكل منتظم وبسهولة في كل الاتجاهات ، ومثل هذه الهيئات يطلق عليها أحياناً اسم الهيئة متماثلة المناحي Isotropic. وبالتالي فإنه وفي الهيئات التي تغيب فيها القدرة على

معرفة الاتجاهات المثلى لحركة النهاية العاملة، كحالة الهيئة متماثلة المناحي، تكون هي الخيار المناسب من أجل أداء المهمات العامة.

الصياغة السابقة يمكن تعميمها على حالات الروبوتات الفضائية ذات السلسلة المفتوحة، ودون الخوض في تفاصيل الاستنتاج (والتي تطلب بعض العمليات الرياضية في الجبر الخطي والبرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل) سنقوم بصياغة إهليلج قابلية المناورة وذلك من أجل سلسلة مفتوحة ذات n درجة حرية $(n \geq 6)$. ولذلك لتكن $J_b(\theta) \in R^{6\times n}$ هي مصفوفة يعقوبي الجسم (لا يهم فيما إذا اخترنا يعقوبي الجسم أو يعقوبي الفضاء، ولكن في العادة يتم اختيار يعقوبي الفضاء حتى نجعل الأمور أبسط وأكثر وضوحاً)، والتي يمكن تحليلها إلى مركبة السرعة الخطية ومركبة السرعة الزاوية $J_b(\theta) \in R^3$ و $J_\omega(\theta) \in R^3$ كالتالي:

$$\omega_b = J_\omega(\theta)\dot{\theta} \qquad (6.41)$$

$$v_b = J_v(\theta)\dot{\theta} \qquad (6.42)$$

وهنا يمكن لأحدهم أن يسأل لماذا قمنا بتحليل اليعقوبي بهذه الطريقة. والسبب هو أن مفهوم إهليلج قابلية المناورة في فضاء السرعات الفضائية (ω, v) سداسي الأبعاد سيكون غير دقيقاً، وذلك لأن الواحدات الفيزيائية للسرعات الزاوية تختلف عن الواحدات الفيزيائية للسرعات الخطية. كما أن أي إهليلج يجمع بين مقادير مختلفة فيزيائياً من حيث الكميات (كاختلاف واحدات السرعة الخطية من الناحية الفيزيائية) سوف يعتمد بشكل جوهري على مقياس الطول للفضاء الفيزيائي، واختيار هذا المقياس لايمكن أن نقول بأنه عشوائي ولكنه يرجع للتقديرات والمعطيات الهندسية. ومن جهة أخرى، فإن الإهليلج المحدد فقط بالسرعات الخطية $v_b \in R^3$ سيكون له معنى مهم (وكذلك الأمر بالنسبة للإهليلج المحدد فقط بالسرعات الزاوية $\omega \in R^3$).

سنقوم الآن بصياغة إهليلج قابلية المناورة وذلك من أجل السرعة الخطية المرتبطة بـ $J_v(\theta)$، ويمكن أن يصاغ إهليلج قابلية المناروة وذلك من أجل السرعة الزاوية بشكل مطابق أيضاً. فإذا افترضنا أن $J_v(\theta)$ ليست شاذة Nonsingular عند الهيئة الموافقة لـ θ، فإن $J_v(\theta)$ ستقودنا من كرة واحدية Unit Sphere في الفضاء R^n، مشخصة من خلال القيد $\|\dot{\theta}\|^2 = 1$، إلى إهليلج ثلاثي الأبعاد في الفضاء R^3. ويمكن الحصول على المحاور الرئيسية لهذا الإهليلج بكونها الأشعة الذاتية Eigenvectors لـ $J_v J_v^T \in R^{3\times 3}$، وطول كل محور رئيسي يعطى من خلال القيمة الذاتية الموافقة.

ويمكن رسم الإهليلج ثلاثي الأبعاد في فضاء سرعات المفاصل كالتالي: أولاً، نقوم باستنتاج الجداء $J_v^T J_v \in R^{n\times n}$ حيث رتبتها هي 3 (وذلك وفقاً لفرضيتنا أن $J_v(\theta)$ ذات مرتبة أعظمية هي 3). وبالتالي فإن ثلاثة فقط من القيم الذاتية لهذا الجداء ليست أصفاراً، وهي في الواقع، القيم الذاتية الثلاثة لـ $J_v J_v^T$. والأشعة الذاتية الموافقة لهذه القيم الذاتية هي بالتالي أشعة سرعة المفاصل التي ترسم المحاور الرئيسية للإهليلج في فضاء السرعات الخطية.

وفي حالة غياب أية اتجاهات مفضلة للنهاية العاملة للروبوت، فإنه يمكن القول بأن الإهليلج الموافق هو أقرب ما يكون إلى كرة وسيكون هو المرغوب فيه. والهيئات التي يكون فيها الإهليلج

كروياً يطلق عليها الهيئات متماثلة المناحي، والتي تتميز بقيمها الذاتية المتطابقة والتي توافق أطوال محاور الإهليلج الرئيسية.

الفصل السابع

التحليل الكينماتيكي الخلفي لروبوتات السلسلة المفتوحة

Inverse Kinematics of Open Chain Robots

بشكل عام، ومن أجل ميكانيزمات الروبوتات ذات السلسلة المفتوحة والتي تمتلك n درجة من الحرية بحيث يكون التمثيل الكينماتيكي الأمامي لها معطى بـ $T(\theta)$، حيث $\theta \in R^3$، فإن قضية التحليل الكينماتيكي الخلفي (العكسي أو الغير مباشر) يمكن أن تصاغ بالشكل الآتي: إذا كان لدينا معلوماً التحويل المتجانس $X \in SE(3)$، فالمطلوب منا هو إيجاد الحلول θ التي نحقق العلاقة $T(\theta) = X$. ولتبيان السمات الأساسية لمسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي، لنفترض أن لدينا ميكانيزم السلسلة المفتوحة ثنائي الوصلات المستوي المبين في الشكل (7.1) كمثال توضيحي. وبالأخذ بالحسبان أن الذي يهمنا فقط هو موقع النهاية العاملة للروبوت وبإهمال الاتجاهات الخاصة به، فإن التمثيل الكينماتيكي الأمامي يمكن التعبير عنه بالشكل:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

بفرض أن $L_1 > L_2$، بالتالي فإن مجموعة النقاط الممكن الوصول لها، أو فضاء العمل، هو عبارة عن الطوق المحصور بين نصف القطر الداخلي $L_1–L_2$ ونصف القطر الخارجي L_1+L_2. فإذا كان معلوماً لدينا موقع النهاية العاملة (x,y)، فإنه ليس من الصعب أن نحدد فيما إذا كان هناك حلاً واحداً أو حلين أو لا يوجد حلول للعلاقة (7.1) وذلك تبعاً للمكان الذي تقع فيه (x,y) سواء كان خارج الطوق أو داخله أو على محيطه (الحالة التي يوجد فيها حلين تعطى من خلال هيئة المرفق للأعلى وهيئة المرفق للأسفل الموضحة بالشكل (7.1 (a))).

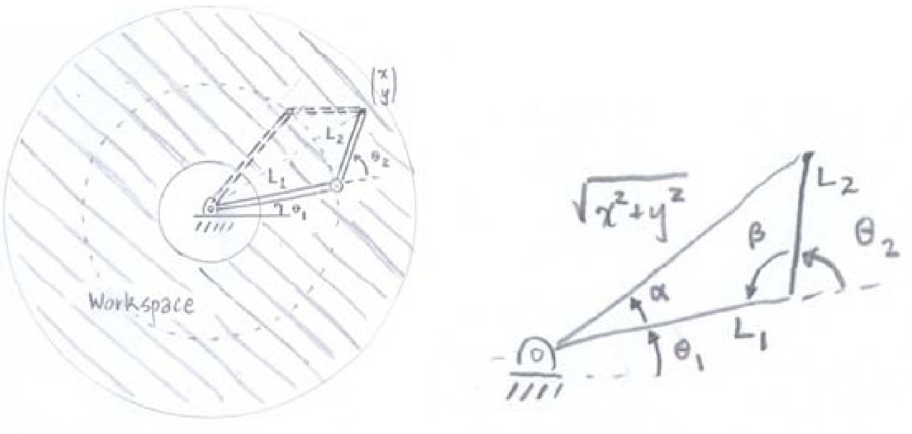
إن إيجاد الحل الصريح (θ_1,θ_2) من أجل (x,y) المعطاة هو أيضاً ليس صعباً. بالنظر إلى الشكل (7.1 (b))، وبفرض أن (x,y) تقع في الربع الأول، أي أن كل من x و y ذو قيمة موجبة (الحلول من أجل بقية الأرباع تتبع مباشرة لنفس الحل)، بالتالي فإن الزاوية β المحصورة ضمن المجال $[0,\pi]$، يمكن الحصول عليها من خلال قانون التجيب Law of Cosines:

$$L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_1 \cos\beta = x^2 + y^2$$

ومنه نستنتج أن:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - x^2 - y^2}{2L_1L_2}\right)$$

$$\theta_2 = \pi - \beta$$



الشكل 7.1: التمثيل الكينماتيكي الخلفي لروبوت السلسلة المفتوحة المكون من مفصلين دورانيين 2R. (a) فضاء العمل وهيئة المرفق للأعلى وهيئة المرفق للأسفل (b) الحل الهندسي.

وأيضاً من خلال قانون التجيب نجد:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2 + L_1^2 + L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

وبما أن $\tan(\theta_1+\alpha) = y/x$، فإننا نجد:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{y}{x} - \alpha$$

القيم السابقة لـ θ_1 و θ_2 هي الحلول الموافقة لهيئة المرفق للأسفل، أما الحلول الموافقة لوضعية المرفق للأعلى فتعطى بالشكل:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \alpha, \qquad \theta_2 = \pi + \beta$$

إذا كانت الدائرة x^2+y^2 تقع خارج المجال $[L_1-L_2, L_1+L_2]$، فإنه لا وجود لأية حلول. ومرة أخرى، فإن الحالة التي تكون (x,y) تقع في الأرباع الأخرى تتبع مباشرة للحل بالنسبة للربع الأول.

إن هذا المثال التوضيحي يبين أنه من أجل روبوتات السلاسل المفتوحة، تكون لمسألة التمثيل الكينماتيكي الخلفي لها حلولاً متعددة، وهذا على النقيض من مسألة التمثيل الكينماتيكي الأمامي، حيث يوجد انزياح محدد للنهاية العاملة للروبوت T من أجل قيم المفاصل المعطاة θ. في الحقيقة، فإن هناك عدد لا نهائي من الحلول فيما يخص مسألة التمثيل الكينماتي الخلفي لروبوت مستوٍ ذي سلسلة مفتوحة بثلاثة وصلات من أجل النقاط (x,y) المعطاة والواقعة داخل فضاء العمل، في هذه الحالة فإنه يمكن القول أن السلسلة تمتلك درجة حرية زائدة، وهذا ما يطلق عليه بالفائض الحركي Kinematically Redundant.

في هذا الفصل سنقوم بدارسة التحليل الكينماتيكي الخلفي للروبوتات الفضائية ذات السلسلة المفتوحة التي تمتلك ست درجات من الحرية. وسيكون هناك عدد منتهٍ من الحلول في هذه الحالة، وسنقوم أولاً بإجراء بعض الفرضيات التبسيطية حول البنية الكينماتيكية التي ستؤدي إلى الوصول لحلول تحليلية. وكما سنرى، فإن هذه الفرضيات ليست تقييدية، ولكنها تشمل معظم روبوتات السلسلة المفتوحة ذات الست درجات من الحرية والواسعة الاستخدام. وبعد ذلك سنقوم بدراسة طريقة نيوتن - رافسون Newton - Raphson من أجل إيجاد الحلول بطريقة غير خطية لمسائل التحليل الكينماتيكي الخلفي، والنتيجة التي سنحصل عليها بهذه الطريقة هي عبارة عن تكرار لخوارزمية رقيمة تقودنا في نهاية المطاف إلى حل تقاربي بدءاً من تخمين مبدئي للحل الحقيقي. وهذا الفصل يتضمن أيضاً مع المناقشة طريقة محاولة الوصول إلى الحلول من أجل السلاسل المفتوحة الفائضة حركياً.

7.1. التحليل الكينماتيكي الخلفي (العكسي أو غير المباشر):

سنقوم بداية بكتابة التمثيل الكينماتيكي الأمامي لروبوتات السلسة المفتوحة الفضائية التي تمتلك ستة درجات من الحرية باستخدام صيغة جداء الأسيات كالآتي:

$$T(\theta) = e^{[s_1]\theta_1}e^{[s_2]\theta_2}e^{[s_3]\theta_3}e^{[s_4]\theta_4}e^{[s_5]\theta_5}e^{[s_6]\theta_6}M$$

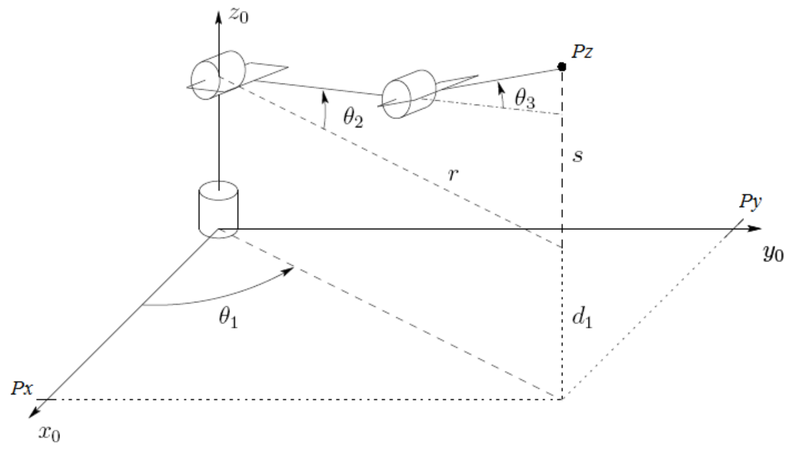
فإذا كان معلوماً لدينا $X \in SE(3)$، بالتالي فإن مسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي تعنى بإيجاد الحلول $\theta \in R^6$ والتي تحقق $T(\theta) = X$. وفيما يلي سوف نقوم ببعض الفرضيات التبسيطية فيما يتعلق بالبنية الكينماتيكية للسلسلة المفتوحة بحيث تقودنا إلى الحلول التحليلية للمسألة.

7.1.1. نموذج الذراع الروبوتي من نوع PUMA المحتوي على ستة مفاصل دورانية:

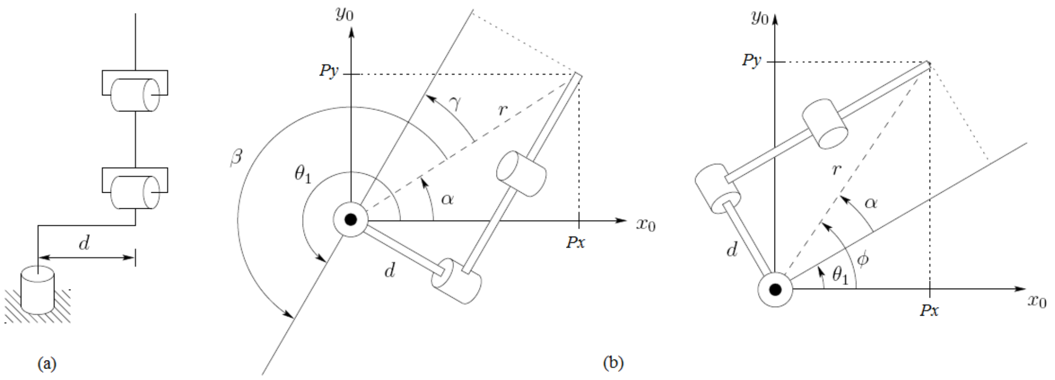
سنقوم بداية بدراسة نموذج PUMA وهو ذراع روبوتي يحتوي ستة مفاصل دورانية 6R كماهو مبين في الشكل (7.2). إن مثل هذه النماذج من الأذرع الروبوتية تتميز بـ: (i) محاور المفاصل الثلاثة الأخيرة تتقاطع بشكل متعامد في نقطة مشتركة (مركز المعصم) بحيث تشكل ما يسمى المعصم المتعامد Orthogonal Wrist، (ii) محوري المفصلين الأولين يتقاطعان بشكل متعامد بحيث يشكلان مفصل الكتف، (iii) محور مفصل المرفق يكون موازياً لمحور مفصل الكتف الأفقي. ومثل هذا النوع من الأذرع يمكن أن يكون لها تباعد Offset عند الكتف (انظر الشكل (7.3)). إن مسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي للأذرع الروبوتية من نوع PUMA يمكن تجزئتها إلى قسمين، الأولى تتعلق بالموقع والثانية تتعلق بالاتجاه، والتي سنناقشهما الآن.

سنقوم الآن بدراسة الحالة البسيطة لذراع الروبوت من نوع PUMA بحيث يكون التباعد عند الكتف مساوياً للصفر. بالنظر إلى الشكل (7.2) وبالتعبير عن جميع الأشعة بالنسبة لجملة المحاور الثابتة، وبتسمية مركبات مركز المعصم $p \in R^3$ بـ (p_x,p_y,p_z)، فإذا أسقطنا النقطة p على المستوي x-y، فإننا نجد:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{p_y}{p_x}$$



الشكل 7.2: التحليل الكينماتيكي الخلفي بالنسبة للموقع لذراع روبوت يحوي ست مفاصل دورانية 6R من نوع PUMA.



الشكل 7.3: (a) ذراع مرفقي مع وجود تباعد (b) المخطط الكينماتيكي.

حيث يمكن أن نستخدم التابع atan2(.) بدلاً من $\tan^{-1}$. ونلاحظ أن هناك حلاً آخراً متاحاً لـ θ_1 يعطى بالشكل:

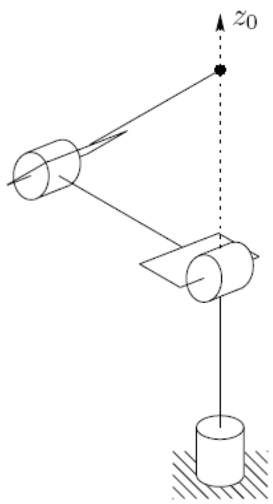
$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{p_x}{p_y} + \pi$$

بحيث يكون π-θ_2 هو البديل عن الحل الأصلي لـ θ_2. وطلما أن $p_x,p_y \neq 0$، فإن كلا الحلين متاحان. ولكن عندما يكون $p_x = p_y = 0$ فإن الذراع سيكون في هيئة قاصرة (شاذة) حركياً (انظر الشكل (7.4))، وسيكون هناك عدد لا نهائي من الحلول الممكنة لـ θ_2.

أما إذا كان هناك تباعد ما $d_1 \neq 0$ كمافي الشكل (7.3)، فإنه وفي الحالة العامة سيكون هناك حلان لـ θ_1 يعبران عن حالة الذراع اليميني أو الذراع اليساري (الشكل (7.3 (b)))). وكما هو واضح من الشكل فإننا نجد أن $\theta_1 = \phi$-α، حيث:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{p_x}{p_y}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2 - d_1^2}}{d_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_1^2}}{d_1}\right)$$



الشكل 7.4: هيئة قصور حركي وذلك عندما لا يكون هناك تباعد Offset في ذراع الروبوت من نوع PUMA المحتوي على ستة مفاصل دورانية.

والحل الثاني يعطى بالعلاقة:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{p_x}{p_y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_1^2}}{d_1}\right)$$

تحديد الزوايتين θ_2 و θ_3 لذراع الروبوت من النموذج PUMA يمكن الآن اختزالها لمسألة تحليل كينماتيكي خلفي لسلسة مفتوحة مستوية ثنائية الوصلات:

$$\cos\theta_3 = \frac{r^2 + s^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$
$$= \frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z^2 - d_1^2) - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

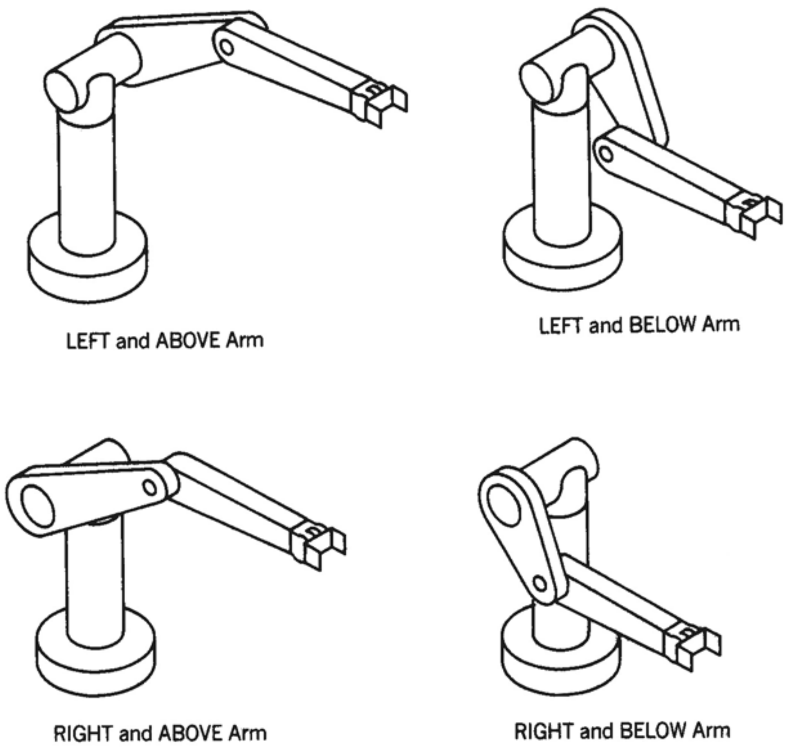
حيث a_1، a_2 هما أطوال وصلتي المرفق. وإذا جعلنا $\cos\theta_3 = D$، فإن θ_3 تعطى بـ:

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\pm\frac{\sqrt{1 - D^2}}{D}\right)$$

والزاوية θ_2 يمكن الحصول عليها بطريقة مشابهة كالتالي:

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{s}{r}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{a_2 \sin\theta_3}{a_1 + a_2\cos\theta_3}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{p_z - d_1}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{a_2 \sin\theta_3}{a_1 + a_2\cos\theta_3}\right)$$

إن الحلين الناتجين للزاوية θ_3 يوفقان هيئتي ذراع الروبوت ثنائي المفاصل المستوي عند وضعيتي المرفق للأعلى والمرفق للأسفل. في الحالة العامة، فإن أذرع الروبوتات من النوع PUMA مع وجود تباعد ما عند الكتف سيكون لها أربعة حلول ممكنة عند التحليل الكينماتيكي الخلفي كما هو مبين في الشكل (7.5)، الوضعيتين العلويتين تسميان حلول الوضع الأيسر للذراع (في حالتي المرفق للأعلى والمرفق للأسفل)، في حين أن الوضعيتين السفليتين تسميان حلول الوضع الأيمن للذراع (في حالتي المرفق للأعلى و المرفق للأسفل).

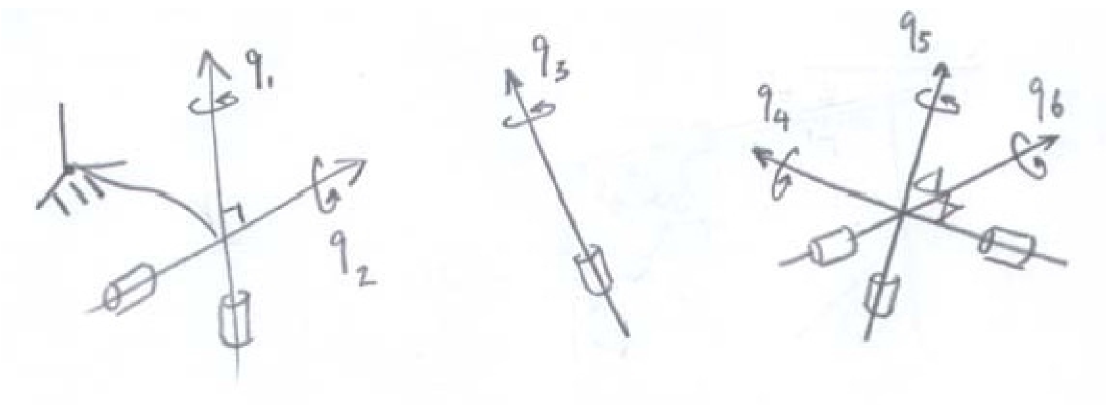


الشكل 7.5: الحلول الأربعة الممكنة للتحليل الكينماتيكي الخلفي لذراع روبوت من نوع PUMA مع وجود تباعد عند الكتف.

سنقوم الآن بحل مسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي فيما يتعلق بقضية الاتجاه، أي إيجاد قيم كل من الزوايا $(\theta_4,\theta_5,\theta_6)$ بما يوافق اتجاه النهاية العاملة المعطاة. وهذه المسألة سهلة للغاية: فبسبب كون المفاصل الدورانية الثلاثة الأخيرة تشكل معصماً بمحاور متعامدة، فإن قيم المفاصل يمكن تحديدها عن طريق استخدام مجموعة زوايا أويلر Euler التي تمت مناقشتها سابقاً في الفصل الرابع من هذه الكتاب (على سبيل المثال، التركيبات ZYX و ZYZ، وذلك حسب كيفية تجميع محاور هذه المفاصل عند الوضعية الصفرية).

7.1.2. أذرع الروبوت من النوع PUMA المعممة المكونة من ستة مفاصل دورانية 6R:

الآن سنقوم بالتخفيف من بعض الفرضيات الموجود في أذرع الروبوت من النوع PUMA والتي تحتوي على ستة مفاصل دورانية. الذراع الروبوتي من النوع PUMA المعمم له السمات التالية: (i) محورا المفصلين الأولين يتقاطعان بشكل متعامد، (ii) محاور المفاصل الثلاثة الأخيرة تتقاطع بشكل متعامد في نقطة مشتركة. بالنظر إلى الشكل (7.6)، لنقم باختيار جملة محاور ثابتة بحيث تكون نقطة المبدأ لها هي نفسها نقطة تقاطع محوري المفصلين 1 و 2، ولتكن $r_w \in R^3$ هي عبارة عن تمثيل نقطة تقاطع محاور المفاصل الثلاثة الأخيرة بالنسبة لجملة المحاور الثابتة. الفرضيات المتعلقة بمحاور المفاصل سوف تقودنا إلى العلاقات التالية بين أشعة التلولب للمفاصل $S_i = (\omega_i, -\omega_i \times r_i)$ حيث $i = 1,\ldots,6$، و r_i تشير إلى النقطة المرجعية على محور المفصل i:



الشكل 7.6: ذراع روبوت فضائي ذو سلسلة مفتوحة مكونة من ستة مفاصل دورانية 6R من النوع PUMA المعمم.

- $\omega_1^T \omega_2 = 0$.
- $\omega_4^T \omega_5 = 0$ و $\omega_5^T \omega_6 = 0$.

ومسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي يمكن أن تصاغ على أنها إيجاد الحلول θ للمعادلة:

$$e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} e^{[S_4]\theta_4} e^{[S_5]\theta_5} e^{[S_6]\theta_6} = XM^{-1} \qquad (7.2)$$

حيث:

$$S_1 = (\omega_1, 0)$$

$$S_2 = (\omega_2, 0)$$

$$S_3 = (\omega_3, -\omega_3 \times r_3)$$

$$S_4 = (\omega_4, -\omega_4 \times r_w)$$

$$S_5 = (\omega_5, -\omega_5 \times r_w)$$

$$S_6 = (\omega_6, -\omega_6 \times r_w)$$

والطرف الأيمن من المعادلة معلوم لدينا، وسنشير لهذا المقدار المعلوم بـ $X_1 = XM^{-1}$. وبالتالي فإن حل مسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي سيتم وفقاً لثلاث خطوات:

الخطوة 1: الحل من أجل إيجاد θ_3:

سنقوم أولاً بضرب طرفي المعادلة (7.2) بـ r_w، وهنا جداء شعاع بمصفوفة تحويل متجانس يمكن أن يفهم بالحالة العادية كالتالي:

$$Tr_w = Rr_w + p, \quad T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن الحركات اللولبية الثلاث الموافقة لـ S_4 و S_5 و S_4 هي حركات ذات خطوة صفرية (حيث كل المفاصل دورانية)، و r_w هي نقطة واقعة على جميع محاور المفاصل الموافقة لهذه الحركات (حيث إنها نقطة تقاطع مشتركة)، فمن ذلك نستنتج أن

$$e^{[S_4]\theta_4} e^{[S_5]\theta_5} e^{[S_6]\theta_6} r_w = r_w$$

وبالتالي فإننا نجد:

$$e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} r_w = X_1 r_w = p_1 \qquad (7.3)$$

حيث إن الشعاع $p_1 = X_1 r_w$ هو مقدار معلوم.

والآن بأخذ طويلة جانبي المعادلة (7.3)، وبما أن التلولبين S_1 و S_2 هما دورانان صافيان، وبالاستفادة من الخاصية $||Rv||=||v||$ والمحققة دوماً من أجل أي دوران R وأي شعاع v، فإن المعادلة (7.3) تصبح:

$$\left\| e^{[S_3]\theta_3} r_w \right\| = \|p_1\|$$

وهي عبارة عن مسألة من الشكل العام:

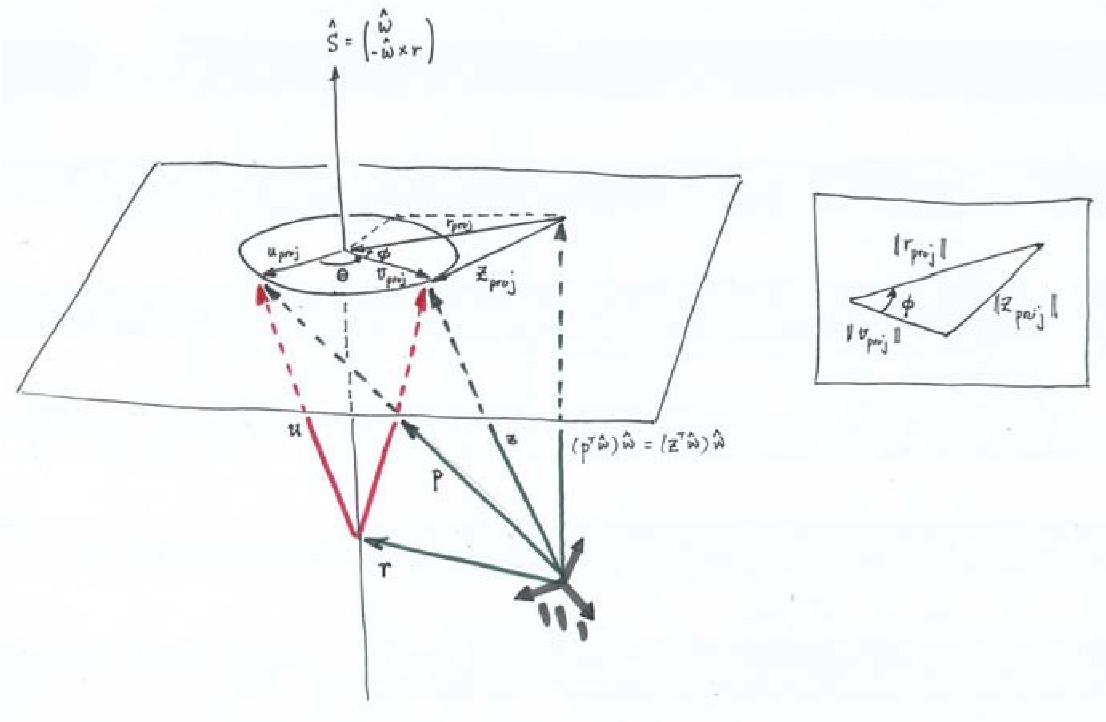
$$\left\| e^{[S]\theta} p \right\| = c$$

حيث $S = (\omega,-\omega\times r)$ و $p \in R^3$ والمقدار العددي $c > 0$ كلها مقادير معلومة، وبالتالي فإن الهدف هو إيجاد كل قيم $\theta \in [0,\pi]$ والتي تحقق المعادلة. ولحل هذه المعادلة، وبالنظر إلى الشكل (7.7)، فإننا نستطيع تعريف الأشعة $z,u,v \in R^3$ كالتالي:

$$z = e^{[S]\theta} p$$

$$u = p - r$$

$$v = z - r$$



الشكل 7.7: حل المعادلة $\|e^{[S]\theta}p\| = c$ لإيجاد قيم θ.

حيث $c = \|z\|$ وهو مقدار معلوم. سنقوم الآن بإسقاط الأشعة p,u,v,r,z على المستوي العمودي على محور الحركة اللولبية والحاوي على النقطة p. وبعد الإسقاط سوف نجد أن:

$$p_{proj} = p - (p^T\omega)\omega$$

$$u_{proj} = u - (u^T\omega)\omega$$

$$v_{proj} = v - (v^T\omega)\omega$$

$$r_{proj} = r - (r^T\omega)\omega$$

$$z_{proj} = z - (z^T\omega)\omega$$

وبصورة بديهية يمكن أن نلاحظ أن u_{proj} و r_{proj} هي مقادير معلومة. ومن الشكل فإنه من الممكن أن نلاحظ أن:

$$\|(z^T\omega)\omega\| = \|(p^T\omega)\omega\| = |p^T\omega|$$

وبما أن $z_{proj} = z-(z^T\omega)\omega$ و $\|z\|^2 = c^2$، فإنه يمكن أن نجد:

$$\|z_{proj}\|^2 = c^2 - (p^T\omega)$$

وبصورة بديهية أيضاً فإن هذا المقدار معلوم. لنقم الآن بإيجاد الزاوية $\psi = \theta+\phi$، حيث ϕ معرفة كما هو مبين بالشكل. ولدينا أيضاً:

$$u_{proj}^T\left(-r_{proj}\right) = \left\|u_{proj}\right\| \cdot \left\|r_{proj}\right\| \cos(\theta + \phi) \qquad (7.4)$$

$$u_{proj} \times \left(-r_{proj}\right) = \hat{\omega}\left(\left\|u_{proj}\right\| \cdot \left\|r_{proj}\right\| \sin(\theta + \phi)\right) \qquad (7.5)$$

ومن المعادلة الأخيرة نجد:

$$\omega^T\left(u_{proj} \times \left(-r_{proj}\right)\right) = \left\|u_{proj}\right\| \cdot \left\|r_{proj}\right\| \sin(\theta + \phi) \qquad (7.6)$$

ومن المعادلتين (7.4) و (7.6) نجد أن:

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega^T\left(u_{proj} \times r_{proj}\right)}{u_{proj}^T r_{proj}}\right) \qquad (7.7)$$

والآن يمكن أن نحدد الزاوية ϕ من قانون التجيب، فبالنظر إلى الشكل (7.7) يمكن أن نكتب:

$$\left\|r_{proj}\right\|^2 + \left\|v_{proj}\right\|^2 - 2\left\|r_{proj}\right\| \cdot \left\|v_{proj}\right\| \cos\phi = \left\|z_{proj}\right\|^2$$

وبما أن $\|z_{proj}\|^2 = c^2-(p^T\omega)^2$ هو مقدار معلوم، و $\|v_{proj}\| = \|u_{proj}\|$ هو أيضاً مقدار معلوم، فإن الزاوية ϕ يمكن الحصول عليها كالتالي:

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\left\|r_{proj}\right\|^2 + \left\|v_{proj}\right\|^2 - \left\|z_{proj}\right\|^2}{2\left\|r_{proj}\right\| \cdot \left\|v_{proj}\right\|}\right) \qquad (6.8)$$

ومن الشكل (7.7) فإنه من الواضح أنه من الممكن أن يكون هناك حلان من أجل θ:

$$\theta = \psi \pm \phi$$

إذا كانت $\phi = 0$ فإن الحلين سينطبقان في حل واحد، في حين أنه لا تكون للمعادلة حلول فيما إذا كانت الزاوية ϕ غير موجودة (أي غير قابلة للإيجاد هندسياً).

الخطوة 2: الحل من أجل إيجاد θ_1 و θ_2:

بعد إيجاد θ_3، فإن المعادلة (7.3) يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$e^{[s_1]\theta_1}e^{[s_2]\theta_2}p_2 = p_1 \qquad (7.9)$$

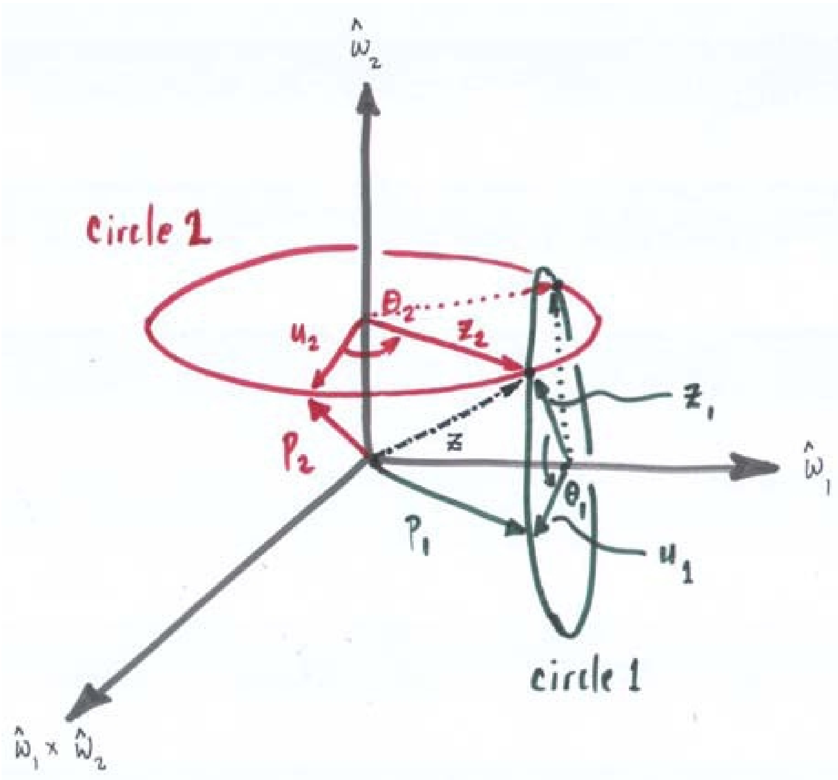
حيث p_1 هو مقدار معلوم، وأيضاً:

$$p_2 = e^{[s_3]\theta_3}r_w$$

هو مقدار معلوم. ومن الواضح أن $S_1 = (\omega_1,v)$ و $S_2 = (\omega_2,v)$ هما عبارة عن أشعة تلولب تمثل دوران صافٍ فقط، و ω_1 و ω_2 متعامدان مع بعضهما. بالتالي فإن مركبة الدوران في المعادلة (6.9) هي التي سوف يتم أخذها بالحسبان:

$$e^{[\omega_1]\theta_1}e^{[\omega_2]\theta_2}p_2 = p_1 \qquad (7.10)$$

بالنظر إلى الشكل (7.8)، من الواضح أنه كشرط ضروري حتى يكون الحل لـ (θ_1,θ_2) موجوداً هو أن يكون $||p_1|| = ||p_2||$. وبفرض أن هذا الشرط محقق، فإن الحلول بالتالي تحدد بتقاطع الدائرتين المشار إليهما بالشكل (7.8). وفي الحالة العامة، يمكن أن يكون هناك على الأكثر حلين، مع احتمالية وجود حل واحد أو عدم وجود أية حلول.



الشكل 7.8: حل المعادلة (7.10) من أجل إيجاد θ_1 و θ_2.

وبفرض أنه يوجد حلول للمعادلة، ليكن $z \in R^3$ هو الشعاع p_2 الذي يدور حول ω_1 بمقدار الزاوية θ_2. ويمكن الحصول أيضاً على الشعاع z عن طريق تدوير p_1 حول ω_1 بمقدار الزاوية θ_1. وبشكل رياضي يمكن أن نكتب:

$$z = e^{[\omega_2]\theta_2}p_2 = e^{-[\omega_1]\theta_1}$$

ومن الواضح أن $\{\omega_1,\omega_2,\omega_1\times\omega_2\}$ تشكل جملة محاور متعامدة بحيث تحدد الفضاء R^3. ونلاحظ أيضاً أن مركبة الشعاع z على ω_1 هي نفسها مركبة الشعاع p_1 على ω_1، و أن مركبة الشعاع z على ω_2 هي نفسها مركبة الشعاع p_2 على ω_2. بالتالي فإن الشعاع z يمكن كتابته معبراً عنه في جملة المحاور المتعامدة السابقة كالاتي:

$$z = (p_1^T \omega_1)\omega_1 + (p_2^T \omega_2)\omega_2 \pm c(\omega_1 \times \omega_2)$$

حيث $c \geq 0$ هو ثابت عددي. بالتالي طول الشعاع z يعطى بالعلاقة:

$$||z|| = (p_1^T \omega_1)^2 + (p_2^T \omega_2)^2 + c^2$$

وبما أن الشعاع z يمكن اعتباره ناتجاً عن دوران الشعاع p_2 (وأيضاً هو ناتج عن دوران الشعاع p_1)، فإننا نجد أن $||z|| = ||p_2|| = ||p_1||$. وبالاستفادة من ذلك يمكن إيجاد مقدار c^2، ومنه فإن الشعاع z يكتب بالشكل:

$$z = (p_1^T \omega_1)\omega_1 + (p_2^T \omega_2)\omega_2 \pm \sqrt{||p_2||^2 - (p_1^T \omega_1)^2 - (p_2^T \omega_2)^2}(\omega_1 \times \omega_2)$$

إذا كان $c = 0$، فإن هناك حلاً وحيداً لـ (θ_1,θ_2)، وفي حال كون c غير قابل للإيجاد هندسياً، فإنه ليست هناك أية حلول لـ (θ_1,θ_2).

وحيث أنه يوجد حلان محتملان لـ z، فإن الذي تبقى الآن هو إيجاد θ_1 و θ_2 من أجل كل حل محتمل لـ z. وهذا يعتبر سهلاً نسبياً: فبجعل u_1 و z_1 هما مساقط p_1 و z على الترتيب على الدائرة 1، و u_2 و z هما مساقط p_2 و z على الدائرة 2، فإننا نستنتج أن:

$$\theta_1 = \cos^{-1}(u_1^T z_1)$$

$$\theta_2 = \cos^{-1}(u_2^T z_2)$$

الخطوة 3: الحل لإيجاد θ_4 و θ_5 و θ_6:

وبعد إيجاد حلول θ_1 و θ_2، فإن المتبقي الآن هو إيجاد حلول θ_4 و θ_5 و θ_6. ولدينا:

$$e^{[s_4]\theta_4} e^{[s_5]\theta_5} e^{[s_6]\theta_6} = e^{-[s_1]\theta_1} e^{-[s_2]\theta_2} e^{-[s_3]\theta_3} X M^{-1} = X_2 \qquad (7.11)$$

حيث الطرف الأيمن X_2 هو مقدار معلوم. وإذا تذكرنا أن $\omega_4^T\omega_5 = 0$ و $\omega_5^T\omega_6 = 0$ فإننا نجد أن ω_4 و ω_6 إما أن يكونا متعامدين أو متوازيين. ولنفترض في الوقت الحالي أن ω_4 و ω_6 متعامدان، وبشكل أدق $\omega_6 = \omega_4 \times \omega_5$ (الحالة التي يكونان فيها متوازيين سندرسها فيما بعد). وبتعريف التحويل:

$$T_w = \begin{bmatrix} R_w & r_w \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_w = [\omega_4 \quad -\omega_5 \quad \omega_4] \in \mathrm{SO}(3)$$

وبضرب طرفي المعادلة (7.11) بـ T_w^{-1} نجد:

$$T_w^{-1} e^{[s_4]\theta_4} e^{[s_5]\theta_5} e^{[s_6]\theta_6} = T_w^{-1} X_2$$

$$e^{T_w^{-1}[s_4]T_w\theta_4} e^{T_w^{-1}[s_5]T_w\theta_5} e^{T_w^{-1}[s_6]T_w\theta_6} = T_w^{-1} X_2 T_w$$

ونلاحظ أن $T_w^{-1}[S_i]T_w$ هي عبارة عن التمثيل المصفوفي ذات الأبعاد 4×4 للدالة الملحقة وفقاً للتحويل T_w^{-1}، وبعد الحساب نستنتج أن:

$$Ad_{T_w^{-1}}(S_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ad_{T_w^{-1}}(S_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ad_{T_w^{-1}}(S_4) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وطالما أن $T_w^{-1}X_1T_w$ تساوي الصفر، فإن الحلول لـ θ_4 و θ_5 و θ_6 يمكن الحصول عليها الآن كالآتي:

$$Rot(\hat{z},\theta_1)\cdot Rot(\hat{y},\theta_2)\cdot Rot(\hat{x},\theta_3) = R$$

حيث R هي المركبة الدورانية للتحويل $T_w^{-1}X_1T_w$. وبالتالي فإن الحلول لـ θ_4 و θ_5 و θ_6 هي نفسها الموافقة لزوايا أويلر Euler ذات التركيب ZYX التي تشخص المصفوفة R:

$$\theta_5 = \operatorname{atan2}\left(-r_{31}, \pm\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\theta_4 = \operatorname{atan2}(r_{21}, r_{11})$$

$$\theta_6 = \operatorname{atan2}(r_{32}, r_{33})$$

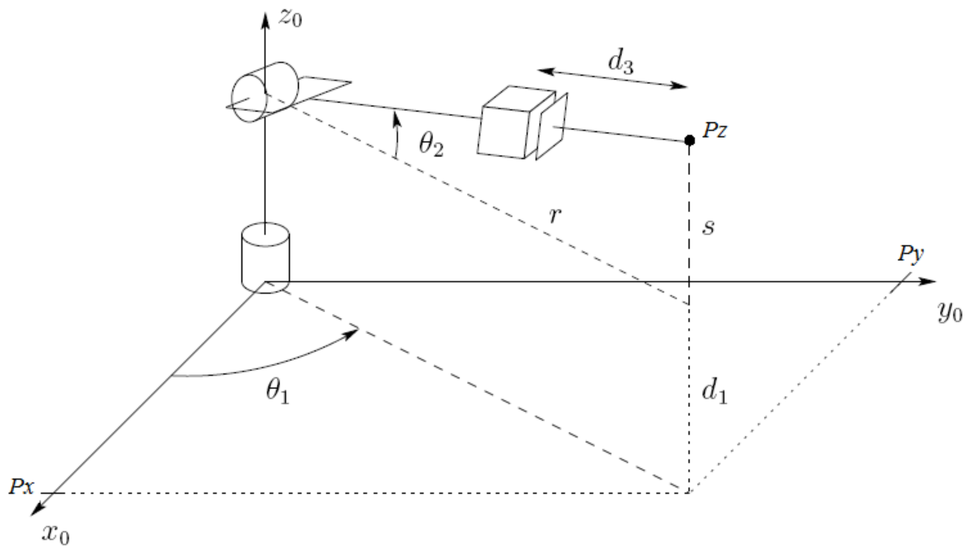
حيث r_{ij} هو العنصر ij من المصفوفة R. وهنا نجد (كما مر معنا) أن هناك حلين للزاوية θ_5 وفقاً لاختيار إشارة هذه الزاوية.

الاستنتاج السابق يمكن إعادته من أجل دراسة الحالة التي يكون فيها ω_4 و ω_6 متوازيين، وهنا سوف تكون الحلول لـ θ_4 و θ_5 و θ_6 موافقة لزوايا أويلر Euler ذات التركيب ZYZ.

وكما هو الحال في ذراع الروبوت من نوع PUMA الذي يحتوي على ستة مفاصل دورانية 6R، فإن هناك حلين محتملين على الأكثر للزاوية θ_3، وكذلك الحال بالنسبة لـ (θ_1,θ_2) و $(\theta_4,\theta_5,\theta_6)$، وبالتالي فإنه ومن أجل أذرع الروبوت من النوع PUMA المعممة يكون مجموع الحلول المحتملة لمسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي هو $8 = 2\times2\times2$ على الأكثر.

7.1.3. الأذرع الروبوتية من نوع Stanford:

إذا استعيض عن مفصل المرفق الدوراني في ذراع الروبوت ذي الستة مفاصل دورانية 6R من نوع PUMA بمفصل تمددي كما في الشكل (7.9)، فإننا نحصل على ذراع الروبوت من نوع Stanford. وهنا سوف نقوم بدراسة التحليل الكينماتيكي الخلفي فيما يتعلق بالموقع فقط كما في الشكل (7.9)، وبالنسبة للتحليل الكينماتيكي الخلفي فيما يخص الاتجاه فإنه مطابق تماماً لحالة ذراع الروبوت من نوع PUMA ولن نقوم بإعادته هنا.



الشكل 7.9: المفاصل الثلاثة الأولى في الذراع الروبوتي من نوع Stanford.

متغير المفصل الأول θ_1 يمكن إيجاده بطريقة مماثلة لتلك التي في حالة ذراع الروبوت من نوع PUMA: $\theta_1 = \tan^{-1}(p_y/p_x)$ (حيث p_y و p_x معطاة لنا وكلاهما ليسا صفراً). ومتغير المفصل الثاني بالتالي يمكن إيجاده من الشكل (7.9) كالتالي:

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{s}{r}\right)$$

حيث $r^2 = p_x^2+p_y^2$، و $s = p_z-d_1$. وهناك حل ثانٍ لـ θ_1 و θ_2 يعطى بالشكل:

$$\theta_1 = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$\theta_2 = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{s}{r}\right)$$

ومسافة الانسحاب للمفصل التمددي d_3 يمكن إيجادها من العلاقة:

$$(d_3 + a_1)^2 = r^2 + s^2$$

$$d_3 = \sqrt{r^2 + s^2} - a_1$$
$$= \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2} - a_1$$

وبإهمال الحل الناتج عن الجدر التربيعي السالب لـ d_3، فإننا نحصل على حلين للتحليل الكينماتيكي الخلفي طالما أن مركز المعصم p لا يتقاطع مع المحور z لجملة المحاور الثابتة. وإذا كان هناك تباعد ما عند الكتف، فإنه وكما في حالة ذراع الروبوت من نوع PUMA سيكون هناك حلان آخران فيما إذا كان الذرع يمينياً أو يسارياً.

في أذرع الروبوت من نوع PUMA المعممة، إذا تم تبديل مفصل المرفق الدوراني بمفصل تمددي، فإن ذراع الروبوت الناتج هنا سيكون واحداً من أذرع الروبوت من نوع Stanford المعممة. والتحليل الكينماتيكي الخلفي سيتم وفقاً لنفس المراحل المشروحة بالنسبة لأذرع الروبوت من نوع PUMA المعممة، والاختلاف الوحيد الذي يحدث سيكون في الخطوة الأولى (المتعلقة بإيجاد θ_3). ومحور الحركة اللولبية للمفصل الثالث سيصبح $S_3 = (0,v_3)$، حيث يكون $\|v_3\| = 1$، ويتم إيجاد الزاوية θ_3 من خلال حل المعادلة التالية:

$$\left\|e^{[S_3]\theta_3}p\right\| = c$$

وذلك من أجل شعاع ما معطى لنا $p \in R^3$ ومقدار عددي موجب c. حل المعادلة أعلاه يمكن اختزالها لحل المعادلة من الدرجة الثانية التالية بالنسبة لـ θ_3:

$$\theta_3^2 + 2(p^T v_3)\theta_3 + (\|p\|^2 - c^2) = 0$$

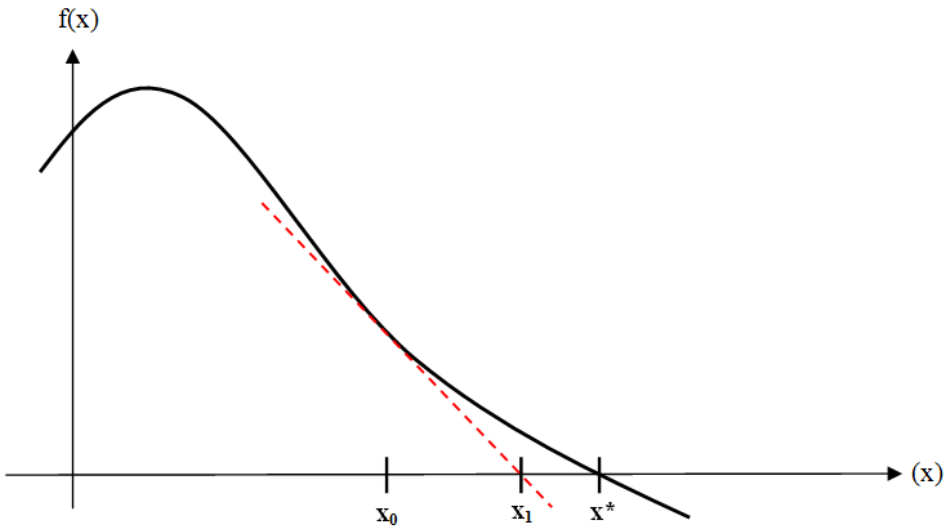
ومن الطبيعي هنا أن نستثني الحل السالب عند حل هذه المعادلة.

7.2. التحليل الكينماتيكي الخلفي الرقمي:

في الحالة التي لا تسمح فيها معادلات التحليل الكينماتيكي الخلفي بالحصول على حلول تحليلية، فإنه يتم اللجوء إلى إحدى الطرق الرقمية. وحتى في الحالات التي يمكن الحصول فيها على حلول تحليلية، فإن الطرق الرقمية غالباً ما تستخدم لتحسين دقة هذه الحلول. على سبيل المثال، بالنسبة للأذرع الروبوتية من نوع PUMA، في حال كون محاور المفاصل الثلاثة الأخيرة لا تتقاطع بالضبط في نقطة واحد مشتركة، أو في حال كون محاور مفاصل الكتف ليست متعامدة بالضبط مع بعضها. ففي هذه الحالات، وبدلاً من إهمال الحلول الناتجة عن التحليل الكينماتيكي الخلفي، فإنه يمكن استخدام هذه الحلول كنقطة بداية في عملية الإجراء التكراري للحل الرقمي لمسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي.

وهناك العديد من الطرق التكرارية تهدف إلى إيجاد حلول جذور المعادلات الغير خطية، وغايتنا في هذه الفقرة ليست مناقشة هذه الطرق بالتفصيل (يمكن الرجوع إلى أي مرجع في التحليل

الرقمي من أجل الحصول على تفصيلات أكثر) وإنما تطوير الطرق التي من خلالها نستطيع تحويل معادلات التحليل الكينماتيكي الخلفي إلى الشكل المناسب بحيث نستطيع حلها باستخدام الطرائق الرقمية.



الشكل 7.10: طريقة نيوتن – رافسون Newton – Raphson من أجل إيجاد جذور المعادلات غير الخطية.

وعلى أية حال، فإنه من المفيد أن نلقي الضوء على الأقل على إحدى الطرق الأساسية في هذا الخصوص، وهذه الطريقة هي طريقة نيوتن - رافسون Newton - Raphson. لنفترض أننا نريد إيجاد جذور المعادلة الغير الخطية $f(x) = 0$ حيث $f : R^n \to R^n$ وبفترض أن هذا التابع قابل للاشتقاق مرتين. وبالنسبة للمرتبة الأولى للاشتقاق، فإن التابع $f(x)$ يمكن أن يتقارب حول النقطة $x_0 \in R^n$ كالتالي:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) \qquad (7.12)$$

حيث:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x_0) & \cdots & \frac{df_1}{dx_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1}(x_0) & \cdots & \frac{df_n}{dx_n}(x_0) \end{bmatrix} \in R^{n\times n} \qquad (7.13)$$

وبجعل $f(x) = 0$ وبفرض أن المصفوفة الواردة في المعادلة (7.13) لها معكوس، فإننا نجد:

$$x = x_0 - \left(\frac{df}{dx}(x_0)\right)^{-1} f(x_0) \qquad (7.14)$$

فإذا كان التابع $f(x)$ يتقارب بجوار x_0 وفقاً لتابع خطي، فإن الجذر يعطى من خلال المعادلة أعلاه.

إن الفكرة الأسياسية التي تكمن وراء طريقة نيوتن - رافسون Newton - Raphson هي إجراء تقاربات خطية متتالية للتابع $f(x)$ (انظر الشكل (7.10)). فبإعطاء تخمين مبدأي للحل x_0، فإننا نقوم بمقاربة التابع $f(x)$ بجوار x_0 من خلال تابع خطي ومن ثم إيجاد الجذر x_1. ومن ثم نقوم مرة أخرى بمقاربة التابع $f(x)$ ولكن بجوار x_1 ومن ثم إيجاد الجذر x_2. وهذا التكرار يستمر بشكل متتابع حتى يتم تحقيق معيار التقارب Convergence Criterion.

يوجد هناك العديد من التحسينات والتطويرات التي تم إجراؤها على طريقة نيوتن - رافسون Newton - Raphson، ولكننا لن نتطرق إلى مناقشتها هنا، ويبقى موضوعنا الأساسي هو تحويل معادلات التحليل الكينماتيكي الخلفي إلى الشكل المناسب بحيث تصبح قابلة للحل بصورة رقمية. فمن أجل روبوت ذي سلسلة مفتوحة ويمتلك ست درجات من الحرية، فإننا أولاً سنقوم بإعادة صياغة المعادلات الكينماتيكية إلى الشكل $f : R^6 \rightarrow R^6$. وهناك الكثير من الطرق لفعل ذلك.

إذا كان لدينا التابع $T(\theta) = X$، حيث $\theta \in R^6$ و $T(.)$ هو عبارة عن التمثيل الكينماتيكي الأمامي، و $X \in SE(3)$ هو موضع النهاية العاملة المعطاة لنا، فإننا أولاً نقوم بتحويل هذه المعادلات إلى الشكل $T(\theta)X^{-1} = I$ أو إلى الشكل $X^{-1}T(\theta) = I$. وبهدف تخفيض المعادلات إلى ست معادلات مستقلة فإن إحدى الطرق هي بأخذ لوغاريتم الطرفين، أي:

$$\log X^{-1}T(\theta) = G(\theta) = 0 \qquad (7.15)$$

وهنا يتضح لنا بسرعة أن $G(\theta)$ التي تم الحصول عليها عن طريق اللوغاريتم ستكون معقدة بشكل كبير. وفي الحقيقة، فإننا لن نلاحظ أي تحسن ملحوظ بغية التخفيف من هذا التعقيد في حال قمنا باستخدام تمثيل آخر، كاستخدام التمثيل بوساطة زوايا أويلر Euler على سبيل المثال. وإضافة إلى ذلك فإن استخدام أية طريقة رقيمة سوف تتطلب في إجراء تفاضل للتابع $G(\theta)$، وقد يقتضي الأمر إلى اللجوء إلى إجراء عدة تفاضلات من أجل الوصول إلى تشخيص تقريبي للتابع.

وإحدى الطرق لتجاوز هذه الصعوبات هو محاولة صياغة التمثيل الكينماتيكي لروبوتات السلسلة المفتوحة بطريقة نيوتن - رافسون Newton - Raphson وذلك باستخدام مصفوفة اليعقوبي. وسنقوم بذلك باستخدام يعقوبي الجسم. ونحن نعلم أن يعقوبي الجسم يتم الحصول عليه من العلاقة التالية:

$$[V_b] = T^{-1}\dot{T} = \left[J_b(\theta)\dot{\theta}\right]$$

حيث $J_b \in R^{6\times6}$. ولنقم بكتابة هذه المعادلة بالشكل التفاضلي التالي:

$$[V_b]\Delta t = T^{-1}\Delta T = [J_b(\theta)\Delta\theta] \qquad (7.16)$$

ولنفترض بأن لدينا تخمين أولي للحل $\theta_0 \epsilon R^n$. ولأن هدفنا الأساسي هو إيجاد الحلول θ التي تحقق $T(\theta) = X$ من أجل X المعطاة لنا، فإننا سنقوم بوضع X^{-1} بدلاً T^{-1} في المعادلة السابقة، و $X\text{-}T(\theta)$ بدلاً من ΔT، وبإجراء التعديلات على المعادلة (7.16) فإنه يمكن كتابتها بالشكل:

$$[V_b]\Delta t = X^{-1}\big(X - T(\theta_0)\big) = I - X^{-1}T(\theta_0) \qquad (7.17)$$

ولنقم الآن بإجراء التقارب من المرتبة الأولى لـ $X^{-1}T(\theta)$ بدلالة الشكل الأسي:

$$X^{-1}T(\theta_0) = e^{[S]}$$
$$= I + [S] + \frac{[S]^2}{2!} + \cdots$$

حيث $[S] = \log X^{-1}T(\theta)$. وبإهمال الحد الثاني والحدود الأخرى ذات المرتبة الأعلى نجد:

$$X^{-1}T(\theta_0) \approx I + [S]$$

وبالتعويض في المعادلة (7.17) نستنتج:

$$J_b(\theta)\Delta\theta = S, \qquad [S] = \log X^{-1}T(\theta)$$

النتيجة السابقة تطرح لنا الخوارزمية التالية من أجل حل $T(\theta) = X$:

(i) المعطيات: $X \epsilon SE(3)$ معلومة لدينا وكذلك التخمين الابتدائي $\theta \epsilon R^6$.

(ii) طالما أن $\|X\text{-}T(\theta)\| > \sigma$، حيث σ هو عبتة التقارب (الحد الذي عنده تكون النتيجة النهائية لعمليات التقارب مقبولة)، نقوم بالتالي:

- نحسب $[S] = \log X^{-1}T(\theta)$.
- نحل $J_b(\theta)\Delta\theta = S$ من أجل إيجاد $\Delta\theta$.
- نحسب $\theta+\Delta\theta$ ونجعل هذا المقدار هو θ ومن ثم نكرر الخطوات السابقة.

الخوارزمية السابقة يمكن أيضاً صياغتها من أجل يعقوبي الفضاء $J_s(\theta)$، وستكون خوارزمية الطريقة الرقمية لحل مسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي كالتالي:

(i) المعطيات: $X \epsilon SE(3)$ معلومة لدينا وكذلك التخمين الابتدائي $\theta \epsilon R^6$.

(ii) طالما أن $\|X\text{-}T(\theta)\| > \sigma$، حيث σ هو عبتة التقارب، نقوم بالتالي:

- نحسب $[S] = \log T(\theta)X^{-1}$.
- نحل $J_b(\theta)\Delta\theta = S$ من أجل إيجاد $\Delta\theta$.
- نحسب $\theta+\Delta\theta$ ونجعل هذا المقدار هو θ ومن ثم نكرر الخطوات السابقة.

7.3. التحليل الكينماتيكي الخلفي لروبوتات السلسلة المفتوحة الفائضة حركياً:

سننهي هذا الفصل بنظرة سريعة إلى كيفية حل مسائل التحليل الكينماتيكي الخلفي وذلك لروبوتات السلسلة المفتوحة ذات الفائض الحركي. ويمكن القول أن الروبوت الفضائي ذي السلسلة المفتوحة هو فائض حركياً في حال كان يمتلك حركية أكثر من ستة، في هذه الحالة فإن مسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي $X = T(\theta)$ حيث $\dim(\theta) > 6$، تمتلك في الحالة العامة عدداً لا نهائياً من الحلول من أجل أية قيمة معطاة لـ X. والتشخيص التحليلي لجميع الحلول الممكنة هو صعب جداً، حتى مع وجود فرضيات للتبسيط على البنية الحركية للروبوت. ولذلك سيكون تركيزنا في هذا الفصل على حل الصيغة التفاضلية لمسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي: السرعة الفضائية المرغوبة للنهاية العاملة للروبوت معطاة لنا، والمطلوب هو إيجاد سرعات المفاصل المناسبة $\dot{\theta}$ والتي تحقق $V = J(\theta)\dot{\theta}$ (هذه المعادلة يمكن التعبير عنها بالنسبة لجملة محاور الجسم أو بالنسبة لجملة محاور الفضاء). ولأن $J(\theta) \in R^{6\times n}$ حيث $n > 6$، فإن هناك $(n-6)$ عائلة من الحلول لـ $\dot{\theta}$.

إن إحدى الحلول من أجل $\dot{\theta}$ والتي لها معنى فيزيائي مقنع إلى حد ما، هو الحل الموافق للطويلة الأصغرية (أي الحل الموافق لسرعات المفاصل الأصغرية الأمر الذي يكسب الروبوت حركة انسيابية سلسة) والذي سنقوم بدراسته الآن. فمن ضمن مجموعة الحلول لـ $V = J(\theta)\dot{\theta}$، لنفترض أننا نبحث عن الحل $\dot{\theta}$ والذي يمتلك الطويلة الأصغرية $||\dot{\theta}||$ بحيث تكون المعادلة السابقة محققة، حيث تعرف الطويلة $||.||$ بشكلها العام من خلال العلاقة التالية:

$$\|\dot{\theta}\| = \sqrt{\dot{\theta}^T Q \dot{\theta}}$$

وذلك من أجل مصفوفة ما متماثلة وموجبة ومنتهية $Q \in R^{n\times n}$. فعلى سبيل المثال، إذا كانت جميع محركات المفاصل متطابقة، فإن المصفوفة Q ستكون هي المصفوفة الواحدية. وإذا كانت محركات المفاصل من قياسات مختلفة (على سبيل المثال، أن تكون المحركات مختلفة من حيث مقدار السرعات الممكن إحرازها)، بالتالي فإن المصفوفة Q يتم اختيارها بحيث تكون مصفوفة قطرية، ويكون كل عنصر من عناصر أقطارها متوافقاً مع قياس المحرك الموافق بشكل نسبي مع بقية المحركات.

إن الحل المعتمد على الطويلة الأصغرية يعطى بالعلاقة التالية (يمكن الرجوع إلى أي مرجع في الجبر الخطي للتحقق من ذلك):

$$\dot{\theta} = QJ^T(JQJ^T)^{-1}V$$

حيث $\dot{\theta}$ تحقق المعادلة $V = J(\theta)\dot{\theta}$ ويمكن التأكد من ذلك من خلال التعويض المباشر. ونلاحظ أن $JQJ^{-1} \in R^{n\times n}$، ومنه فإنه طالما كانت رتبة المصفوفة $J(\theta)$ هي الرتبة الأعظمية (المساوية لـ 6) (والتي تكافئ هيئة ذراع الروبوت التي لا تتشكل فيها حالة قصور حركي)، فإن JQJ^{-1} هي مصفوفة غير شاذة دوماً. وإذا كانت قيم المفاصل $\theta(t)$ هي المطلوبة، فإنه يمكن استخدام العلاقة التالية:

$$\theta(t+\Delta t)=\theta(t)+\Delta t\left(QJ\big(\theta(t)\big)^{T}\left(J\big(\theta(t)\big)QJ\big(\theta(t)\big)^{T}\right)^{-1}\right)V(t)$$

حيث $V(t)$ هي السرعة الفضائية المرغوب تحقيقها للنهاية العاملة للروبوت. وهذا الحل لمسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي مفيد جداً عندما يكون المطلوب هو تحقيق مسارات محددة لجملة محاور النهاية العاملة للروبوت، أي أن $X \epsilon SE(3)$ يعطى لنا خلال فترة زمنية محددة $[t_0,t]$، والمطلوب هو تحديد مسارات المفاصل $\theta(t)$ الموافقة.

الفصل الثامن

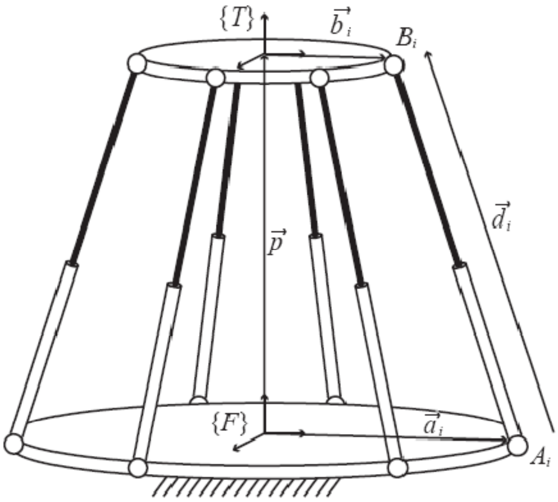
التحليل الكينماتيكي لروبوتات السلسلة المغلقة

Kinematics of Closed Chain Robots

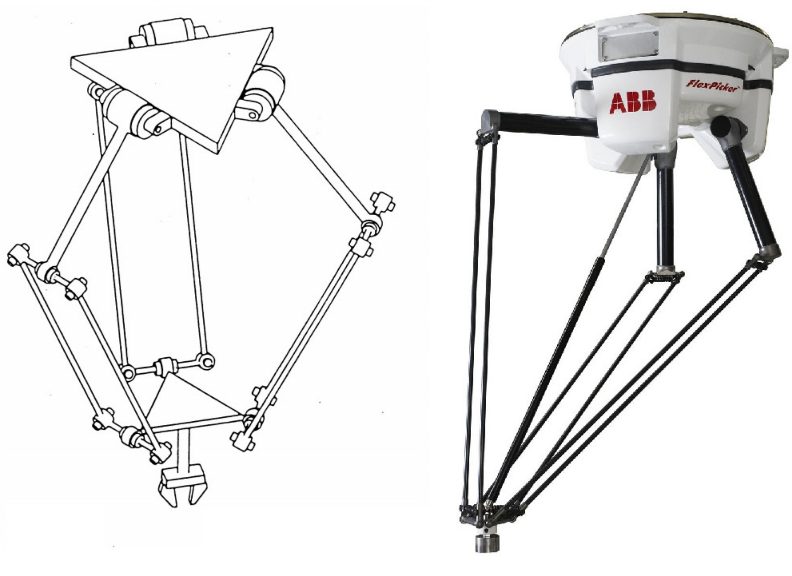
إن أية سلسلة حركية لمجموعة من الوصلات تحوي حلقة واحدة أو أكثر يطلق عليها اسم السلسلة المغلقة Closed Chain. وهناك العديد من الأمثلة لمثل هذا النوع من السلاسل المغلقة كانت قدر مرت معنا في الفصل الثاني من هذا الكتاب، بدءاً من ميكانيزم الوصلات الرباعي Four Bar Linkage المستوي وصولاً إلى الميكانيزمات الفضائية ذات السلاسل المغلقة مثل منصة ستيوارت - جوف Stewart - Gough. وفي هذا الفصل سوف نقوم بدراسة التحليل الكينماتيكي لروبوتات السلاسل المغلقة مع التركيز على صنف من هذه الروبوتات والذي عادة ما يطلق عليه اسم الروبوتات المتوازية (التفرعية) Parallel Robots، وهي روبوتات ذات سلسلة مغلقة تتألف من قاعدة ثابتة وأخرى متحركة متصلتين مع بعضهما من خلال مجموعة من "الأرجل"، وهذه الأرجل غالباً ما تكون مندرجة ضمن صنف السلاسل المفتوحة، ولكن في بعض الأحيان تكون هذه الأرجل مندرجة ضمن صنف السلاسل المغلقة.

الأشكال من (8.1) إلى (8.3) توضح بعض الأمثلة لبعض الروبوتات المتوازية والمعروفة على نطاق واسع من التطبيقات. إن منصة ستيورات - جوف Stewart - Gough هي عبارة عن ميكانيزم يمتلك ست درجات من الحرية، وهو يستخدم بشكل واسع في تطييبقات محاكاة الحركة كما يستخدم كحساس سداسي المحاور للقوة والعزم. وهذه المنصة بشكل عام تكون على نمطين: النمط الأول هو 6×UPS، فيه تكون الأرجل الستة كل منها مكون من مفصل عام واحد U ومفصل تمددي واحد P ومفصل كروي S. النمط الثاني هو 6×SPS، وفيه تكون الأرجل الستة كل منها مكون من مفصلين كروين على الأطراف ومفصل تمددي واحد بينهما، ونلاحظ أنه في النمط الثاني فإن الدوران الالتوائي (حول محاور الأرجل الستة) ليس له أي تأثير على حركة القاعدة المتحركة. عندما تستخدم منصة ستيوات - جوف Stewart - Gough كحساس للقوة والعزم، فإن المفاصل التمددية الستة ستواجه قوى خطية داخلية في كل مرة يتم فيها تطبيق أي قوة خارجية على القاعدة المتحركة، وبقياس هذه القوى الخطية الداخلية يمكننا تقدير قيمة القوة الخارجية المطبقة. إن روبوت دلتا Delta هو عبارة عن ميكانيزم ذي ثلاث درجات من الحرية، ويتميز هذا الروبوت بأن القاعدة المتحركة له تبقى موازية للقاعدة الثابتة للروبوت. وبسبب كون المحركات الثلاثة متصلة مع المفاصل الدورانية الموجودة في القاعدة الثابتة العلوية، فإن الأجزاء المتحركة ستكون خفيفة نسبياً، الأمر الذي يسمع لروبوت دلتا Delta بتنفيذ حركات سريعة جداً. إن روبوت إيكلييس Eclipse هو عبارة عن ميكانيزم آخر يمتلك ست درجات من الحرية ويصنف ضمن الروبوتات المتوازية، وفي هذا الروبوت فإن القاعدة المتحركة تمتلك قابلية تغير الاتجاه بمقدار $\pm 90^\circ$ بالنسبة للأرض، وأيضا قابلية الدوران بمقدار 360° حول المحور الشاقولي.

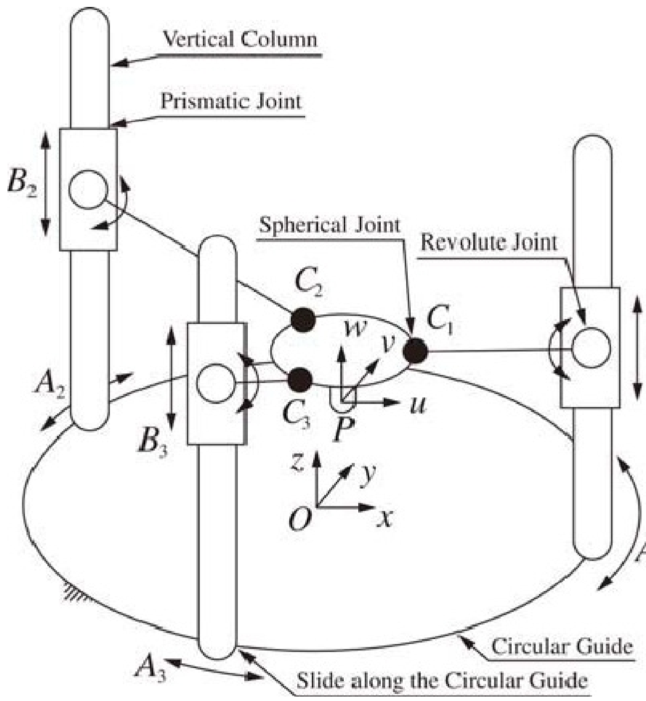
إن ميكانيزمات السلاسل المغلقة تتيح المجال لوجود عدد ضخم من التصاميم بالمقارنة مع ميكانيزمات السلاسل المغلقة، وليس من المفاجئ أن نعلم أن التحليل الكينماتيكي لها يعتبر أكثر تعقيداً من التحليل الكينماتيكي لميكانيزمات السلاسل المفتوحة. وهذا التعقيد يتبع لسمتين موجودتين في ميكانيزمات السلسلة المغلقة: (i) فضاء الهيئة المنحني (على سبيل المثال، السطح متعدد الأبعاد يمكن صياغته في فضاء شعاعي من مرتبة بُعدية أعلى)، (ii) ليست كل المفاصل مزودة بمحركات، أي يمكن القول أنها ليست محرَّكة Non-actuated (Passive). إن وجود مثل هذه المفاصل غير المحرَّكة مع حقيقة كون عدد المفاصل المحرَّكة Actuated قد يتجاوز درجة حرية الميكانيزم (مثل هذه الميكانيزمات يطلق عليها اسم الميكانيزمات ذات التحريك الفائض Redundantly Actuated) لا يجعل فقط مسألة التفاضل الكينماتيكي أمراً صعباً، بل إن ذلك يقدم أنواع جديدة من حالات القصور الحركي لم تظهر لنا عند دراستنا للروبوتات ذات ميكانيزمات السلسلة المفتوحة.



الشكل 8.1: منصة ستيوارت – جوف Stewart – Gough.



الشكل 8.2: روبوت دلتا Delta.



ميكانيزم إيكليبس Eclipse.

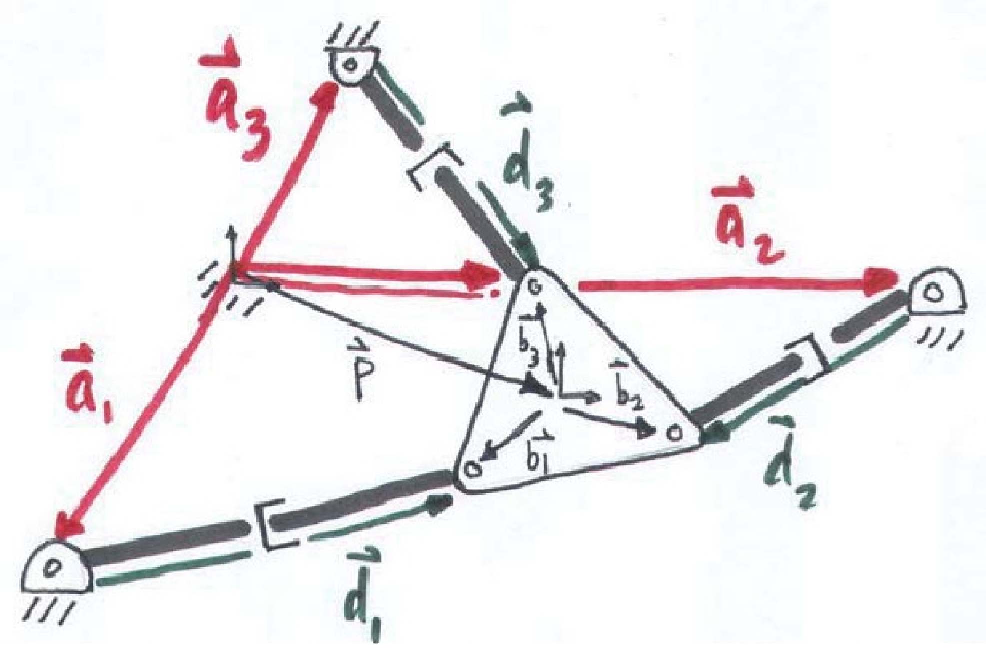
ولنتذكر أيضاً أنه عند دراسة روبوتات السلاسل المفتوحة، فإن التحليل الكينماتيكي يمكن أن يتم باستخدام طرائق سهلة نوعاً ما فيما يخص التحليل الكينماتيكي الأمامي (على سبيل المثال، عن طريقة صيغة جداء الأسيات) وما يتلو ذلك من التحليل الكينماتيكي الخلفي. أما بالنسبة لروبوتات السلسلة المغلقة بشكل عام، فإنه عادة يكون من الصعب الحصول على مجموعة معادلات صريحة ومباشرة تمثل التحليل الكينماتيكي الأمامي بالشكل $X = T(\theta)$، حيث $X \in SE(3)$ هي جملة محاور النهاية العاملة، و $\theta \in R^n$ هي عبارة عن متغيرات المفاصل. والوسيلة الفعال الأكثر اتباعاً من أجل إجراء التحليل الكينماتيكي لروبوتات السلسلة المغلقة تستند على مجموعة من الأدوات والمنهجيات التي تقوم قدر الإمكان باستغلال أية صفة تناظر أو تماثل وأية صفات خاصة أخرى لميكانيزم الروبوت.

ولذلك فإنه وفي هذا الفصل سوف نستعرض سلسلة من القضايا الدراسية المتمحورة حول بعض ميكانيزمات الروبوتات المتوازية الشائعة على نطاق واسع، وسيصبح لدينا في نهاية المطاف مجموعة من الأفكار عن أدوات ومنهجيات التحليل الكينماتيكي والتي يمكن توظيفها من أجل دراسة ميكانيزمات ذات سلسلة مغلقة أعم وأشمل. وسنقوم بدراسة ميكانيزمات الروبوتات المتوازية والتي تكون فيها عدد درجات الحرية المحرَّكة مساوٍ للحركية الكينماتيكية للميكانيزم. وسنقوم أيضاً بدراسة ومناقشة طرائق التحليل الكينماتيكي الأمامي والخلفي لهذه الروبوتات متبوعة بتشخيص واستنتاج مصفوفة اليعقوبي المقيدة، وكذلك الأمر بالنسبة لليعقوبي في حالة التحليل الكينماتيكي الأمامي والخلفي. وسيخلص الفصل في النهاية إلى دراسة حالات متنوعة من القصور الحركي والتي من الممكن أن تحدث في روبوتات السلسلة المغلقة.

8.1. التحليل الكينماتيكي الأمامي والخلفي:

في هذه الفقرة سنقوم بدراسة الطرائق من أجل إجراء التحليل الكينماتيكي الخلفي والأمامي لروبوتات السلسلة المغلقة. وبدلاً من محاولة صياغة منهجية عامة قابلة للتطبيق على جميع أنواع روبوتات السلسلة المغلقة، سنقوم بمناقشة حالتين: الميكانيزم المستوي المتوازي 3×RPR (الميكانيزم الفضائي النظير له يدرس بنفس الطريقة)، ومنصة ستيوارت - جوف - Stewart Gough ذات النمط 3×SPS. وآلية التحليل لهذين الميكانيزمين تستند إلى بعض تقنيات الاختزال التي تؤدي إلى شكل مختزل لمعادلات التحكم الحركية. وسوف نشرح بشكل مختصر كيف يمكن لهذه الطرق أن تعمم من أجل تحليل الميكانيزمات المتوازية على نطاق أوسع.

8.1.1. الميكانيزم المتوازي المستوي 3×RPR:



الشكل 8.4: الميكانيزم المتوازي المستوي 3×RPR الذي يمتلك ثلاث درجات من الحرية.

المثال الأول الذي سنقوم بدراسته هو الميكانيزم المتوازي المستوي 3×RPR المبين في الشكل (8.4). ومن السهل جداً أن نجد من خلال صيغة جروبلر Gruebler للحالة المستوية أن هذا الميكانيزم يمتلك ثلاث درجات من الحرية (أو ثلاث درجات حركية). لنقم بتعيين جملة محاور ثابتة {s} وجملة محاور للنهاية العاملة {b} كما هو مبين في الشكل. بشكل عام، إن المفاصل التمددية الثلاثة في هذا الميكانيزم هي التي تكون محرَّكة. لنقم بالإشارة إلى طول كل من الأرجل الثلاثة بالرمز s_i حيث $i = 1,2,3$. إن مسألة التحليل الكينماتيكي الأمامي تعنى بتحديد موقع واتجاه جملة محاور النهاية العاملة من خلال المعطيات $s = (s_1,s_2,s_3)$.

ليكن الشعاع p هو الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور الثابتة {s} إلى مبدأ إحداثيات جملة محاور النهاية العاملة {b}. ولتكن الزاوية ϕ هي الزاوية المقيسة من المحور $\hat{x}$ لجملة المحاور الثابتة {s} إلى المحور $\hat{x}$ لجملة محاور النهاية العاملة {b}. وبعد ذلك لنقم بتعريف الأشعة التالية a_i,b_i,d_i حيث $i = 1,2,3$ كما هو موضح بالشكل. ومن هذه التعريفات يمكن أن نجد:

$$\vec{d}_i = \vec{p} + \vec{b}_i - \vec{a}_i \qquad (8.1)$$

حيث $i = 1,2,3$. وليكن:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_i = \begin{bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \end{bmatrix}$$

وهي عبارة عن إحداثيات الأشعة p,a_i,d_i في جملة المحاور الثابتة، وليكن:

$$\vec{b}_i = \begin{bmatrix} b_{ix} \\ b_{iy} \end{bmatrix}$$

هي إحداثيات الشعاع b_i في جملة محاور النهاية العاملة.

ونلاحظ أن الأشعة a_i و b_i حيث $i = 1,2,3$ هي أشعة ثابتة، وأنه باستثناء الشعاع b_i، فإن جميع الأشعة الأخرى يتم التعبير عنها بالنسبة لجملة المحاور الثابتة $\{s\}$. ومن أجل التعبير عن المعادلة (8.1) بالنسبة لجملة المحاور الثابتة $\{s\}$، فإن من الضروري أولاً أن نوجد تمثيل الشعاع b_i بالنسبة لجملة المحاور الثابتة $\{s\}$، وهذا سهل، فبتعريف مصفوفة الدوران:

$$R_{sb} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

فإننا نجد أن:

$$\begin{bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{ix} \\ b_{iy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \end{bmatrix}$$

حيث $i = 1,2,3$، وبما أن $s_i^2 = d_{ix}^2 + d_{iy}^2$، نستنتج أن:

$$s_i^2 = \left(p_x + b_{ix}\cos\phi - b_{iy}\sin\phi - a_{ix}\right)^2 + \left(p_y + b_{ix}\sin\phi + b_{iy}\cos\phi - a_{iy}\right)^2$$

حيث $i = 1,2,3$.

ونلاحظ من المعادلة السابقة أنه من السهل جداً استخلاص التمثيل الكينماتيكي الخلفي: بإعطاء قيم كل من (p_x,p_y,ϕ)، فإن أطوال الأرجل (s_1,s_2,s_3) يمكن بشكل مباشر إيجادها من المعادلات السابقة (القيم السالبة لـ s_i في معظم الحالات لا يمكن تحقيقها فيزيائياً ويمكن إهمالها). وعلى النقيض، فإن مسألة التمثيل الكينماتيكي الأمامي ليست بهذه السهولة، وفي هذه الحالة فإن المطلوب هو تحديد موقع واتجاه النهاية العاملة (p_x,p_y,ϕ) من خلال قيم المعطيات (s_1,s_2,s_3). ويمكن استخدام قاعدة ظل نصف الزاوية والمستخدمة بشكل واسع في عمليات التحليل

الكينماتيكي وتعويضها في جملة المعادلات الثلاث السابقة وذلك من خلال تعريف المتغير العددي t كالتالي:

$$t = \tan\frac{\phi}{2}$$

$$\sin\phi = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos\phi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

وبعد إجراء سلسلة من العلميات الجبرية، فإن جملة كثيرات الحدود السابقة يمكن في النهاية اختزالها إلى معادلة كثيرات حدود واحدة من الدرجة السادسة بدلالة t، والتي تصرح أن الميكانيزم المتوازي المستوي 3×RPR له على الأكثر ستة حلول من أجل التمثيل الكينماتيكي الأمامي (إثبات أن هذه الحلول الستة هي حلول قابلة للتحقيق يتطلب إجراء عمليات رياضية أكثر ولن نتطرق لها هنا).

8.1.2. منصة ستيوارت - جوف Stewart - Gough:

سنقوم الآن في هذه الفقرة بدراسة التحليل الكينماتيكي الخلفي وكذلك الأمامي لمنصة ستيوارت - جوف Stewart - Gough ذات النمط 6×SPS والمبينة في الشكل (8.1). في هذا التصميم، تكون القاعدة المتحركة والقاعدة الثابتة متصلتين مع بعضهما من خلال ست بنى تسلسلية ذات التراتبية SPS (أي مفصلين كرويين على الأطراف وبينهما مفصل تمددي)، بحيث تكون المفاصل الكروية هي المفاصل غير المحرَّكة والمفاصل التمددية هي المفاصل المحرَّكة. إن طريقة استنتاج المعادلات الكينماتيكية قريبة إلى حد ما من تلك في حالة الميكانيزم المتوازي المستوي 3×RPR. ليكن لدينا {s} و {b} هما عبارة عن جملة المحاور الثابتة وجملة محاورالنهاية العاملة بالترتيب، وليكن لدينا الشعاع d_i وهو الشعاع من المفصل A_i إلى المفصل B_i. وبالنظر إلى الشكل (8.1) فإننا نعرف الأشعة التالية:

- الشعاع $p \in R^3$ معبراً عنه في جملة المحاور الثابتة {s}.
- الشعاع $a_i \in R^3$ معبراً عنه في جملة المحاور الثابتة {s}.
- الشعاع $b_i \in R^3$ معبراً عنه في جملة محاور النهاية العاملة {b}.
- الشعاع $d_i \in R^3$ معبراً عنه في جملة المحاور الثابتة {s}.
- مصفوفة الدوران $R \in SO(3)$ وهي تمثل اتجاه جملة محاور النهاية العاملة بالنظر إليها من جملة المحاور الثابتة {s}.

وبهدف استنتاج المعادلات الكينماتيكية المقيدة، فإنه يمكن أن نكتب بصورة شعاعية:

$$\vec{d}_i = \vec{p} + \vec{b}_i - \vec{a}_i, \qquad i = 1, \ldots, 6$$

وبكتابة المعادلة أعلاه بحيث تكون جميع الحدود ممثلة بالنسبة لجملة المحاور الثابتة $\{s\}$:

$$d_i = p + Rb_i - a_i, \qquad i = 1, \ldots, 6$$

وبالإشارة إلى طول كل رجل من أرجل الروبوت بالرمز s_i نستطيع أن نكتب:

$$s_i^2 = d_i^T d_i = (p + Rb_i - a_i)^T (p + Rb_i - a_i)$$

حيث $i = 1,\ldots,6$. ونلا حظ أن الأشعة المعرفة أعلاه a_i و b_i هي عبارة عن أشعة معلومة ثابتة. وبكتابة المعادلة الكينماتيكية بهذه الطريقة، فإن مسألة التحليل الكينماتيكي الخلفي تصبح سهلة: معلوم لدينا كل من p و R، بالتالي فإن أطوال الأرجل الستة s_i يمكن حسابها مباشرة من المعادلات أعلاه (القيم السالبة لـ s_i في معظم الحالات ستكون غير قابلة للتحقق فيزيائياً ويمكن إهمالها).

ومسألة التحليل الكينماتيكي الأمامي كما نلاحظ في ليست بهذه السهولة. وهنا يكون معلوماً لدينا أطول الأرجل الستة s_i، والمطلوب إيجاد $p \in R^3$ و $R \in SO(3)$. وهذه المعادلات الكينماتيكية الستة بالإضافة إلى قيد مصفوفة الدوران $R^T R = I$، ستشكل مجموعة من اثنتي عشرة معادلة باثني عشر مجهولاً. وهناك العديد من الطرق من أجل إيجاد جميع الحلول لمثل مجموعة كثيرات الحدود هذه، على سبيل المثال، الطرائق المستندة إلى طريق سيلفستر Sylevester للاختزال الديالي Sylvester Dialytic Elimination Method وغيرها. ومن الجدير بالذكر أن ننوه إلى العمل الذي قام به كل من راغافان Raghavan و روث Roth، حيث أثبتا أن هناك على الأكثر أربعين حلاً لمسألة التحليل الكينماتيكي الأمامي، وأيضاً هاستي Husty، الذي أوجد خوارزمية يمكن حوسبتها من أجل إيجاد جميع الحلول الأربعين تحليلياً.

8.1.3. الميكانيزمات المتوازية العامة:

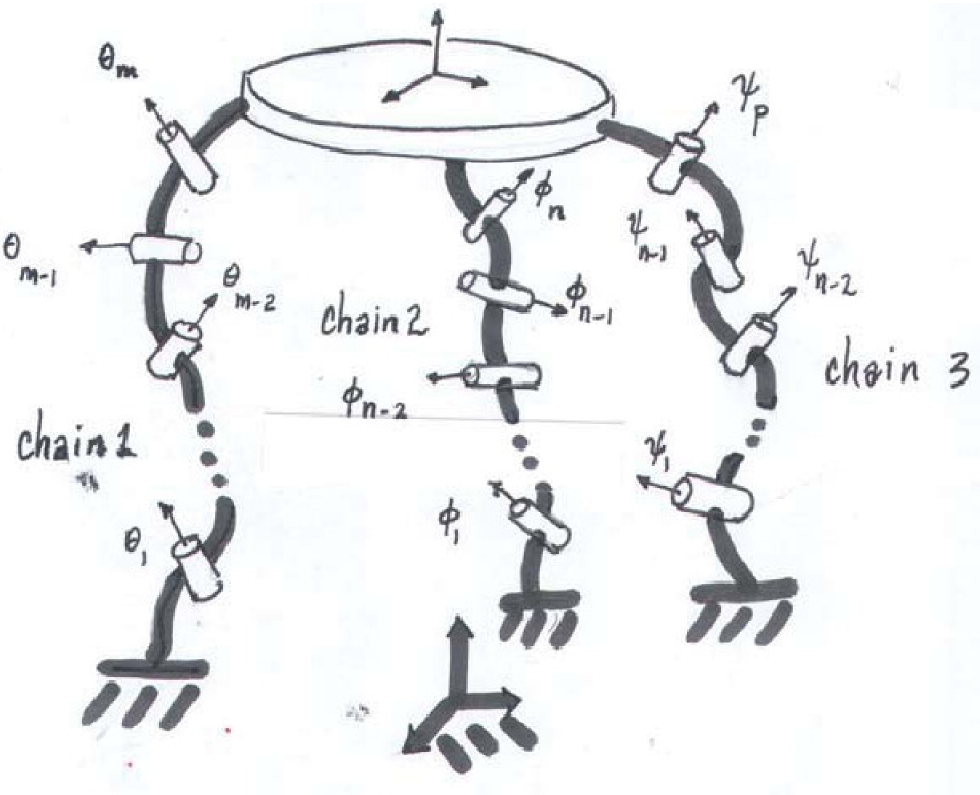
عند دراستنا للميكانيزم المتوازي المستوي 3×RPR ولمنصة ستيوارت - جوف Stewart - Gough، استطعنا أن نستفيد من بعض سمات الميكانيزمين من أجل التقليل من عدد المعادلات الكينماتيكية، على سبيل المثال، ففي حالة منصة ستيوارت - جوف Stewart - Gough، قمنا بتبسيط التحليل على اعتبار أن كل رجل من أرجل الميكانيزم يمكن نمذجته على هيئة خطوط مستقيمة. وفي هذه الفقرة الموجزة سندرس حالة عامة أكثر، حيث ستكون الأرجل فيها تمتلك بنى من سلاسل مفتوحة لا على التعيين.

لنفترض أن لدينا الميكانيزم المتوازي المبين في الشكل (8.5). وفي هذا الميكانيزم نلاحظ أن القاعدتين المتحركة والثابتة متصلتان مع بعضهما عن طريق ثلاث سلاسل مفتوحة . فإذا أشرنا إلى التمثيل الكينماتيكي الأمامي لهذه السلاسل الثلاث بـ $T_1(\theta)$ و $T_2(\phi)$ و $T_3(\psi)$ بالترتيب، حيث $\theta \in R^m$ و $\phi \in R^n$ و $\psi \in R^p$. فإن شروط الحلقة المغلقة تكتب بالشكل التالي:

$$T_1(\theta) = T_2(\phi) \qquad (8.2)$$

$$T_1(\phi) = T_2(\psi) \qquad (8.3)$$

المعادلتين (8.2) و (8.3) كل منهما مؤلفة من 12 معادلة (9 لمركبات الدوران و 3 لمركبات الموقع)، و ستة من هذه المعادلات هي معادلات مستقلة (حيث إن المعادلات التسع لمركبات الدوران يمكن اختزالها لجملة من ثلاث معادلات مستقلة استناداً إلى قيد مصفوفة الدوران التالي $R^TR = I$)، وبالتالي فإن هناك 24 معادلة منهم 12 معادلة مستقلة بـ $n + m + p$ متغير مجهول، وحركية هذا الميكانيزم هي $d = 12 - (n + m + p)$.



الشكل 8.5: ميكانيزم متوازي فضائي عام.

في مسألة التحليل الكينماتيكي الأمامي، فإذا كان معلوماً لدينا عدد المتغيرات لكل من (θ,ϕ,ψ)، فإنه يمكن حل المعادلتين (8.2) و (8.3) لتحديد هذه المتغيرات، وسنلاحظ أن هناك العديد من الحلول لهاتين المعادلتين. وعندما تصبح متغيرات مفاصل أي سلسلة من السلاسل الثلاث المفتوحة معلومة لدينا، فإن التمثيل الكينماتيكي الأمامي لهذه السلسلة يمكن أن يكون مكافئاً لتحديد التمثيل الكينماتيكي الأمامي للسلسلة المغلقة.

في مسألة التمثيل الكينماتي الخلفي، فإن انزياح النهاية العاملة يكون معلوماً لدينا $T \in SE(3)$. وبجعل $T = T_1 = T_2 = T_3$ فإن المطلوب هو حل المعادلات (8.2) و (8.3) من أجل جميع المتغيرات (θ,ϕ,ψ). وكما بينا في الأمثلة المدروسة سابقاً، ففي أغلب الميكانيزمات المتوازية يمكن الاستفادة من بعض السمات التي يتصف بها الميكانزم من أجل إلغاء بعض المعادلات، وتبسيطها من أجل تقديمها بشكل مختزل.

8.2. التحليل الكينماتيكي التفاضلي:

سنقوم الآن بدراسة التحليل الكينماتيكي التفاضلي للروبوتات ذات الميكانيزمات المتوازية. وعلى عكس التحليل الكينماتيكي التفاضلي في الروبوتات ذات السلسلة المفتوحة، والذي يكون الهدف من منه هو ربط السرعات المعطاة لمفاصل الروبوت بالسرعة الفضائية للنهاية العاملة، فإن التحليل الكينماتيكي التفاضلي لروبوتات السلاسل المغلقة هو معقد أكثر، وذلك بسبب حقيقة كون مفاصل الروبوت ليست كلها محرَّكة. وفقط سرعات المفاصل المحرَّكة هي التي تعتبر كسرعات دخل، أما سرعات المفاصل الأخرى غير المحرَّكة فإنه يجب إيجادها من معادلات القيود الكينماتيكية. وسرعات المفاصل الغير محرَّكة هذه تلزمنا عادة في النهاية من أجل تحديد السرعة الفضائية لجملة محاور النهاية العاملة لربوت السلسلة المدروس.

في روبوتات السلسلة المفتوحة، يكون لمصفوفة اليعقوبي في التمثيل الكينماتيكي الأمامي دور في التحليل الستاتيكي وتحليل السرعات. أما في روبوتات السلسلة المغلقة، فإنه بالإضافة لوجود مصفوفة اليعقوبي في التمثيل الكينماتيكي الأمامي، فإن هناك مصفوفة يعقوبي أخرى تأتي من معادلات القيود الكينماتيكية (ولهذا السبب فإننا نطلق على مصفوفة اليعقوبي هذه اسم مصفوفة يعقوبي القيد Constraint Jacobian) ومصفوفة اليعقوبي هذه أيضاً لها دور أساسي في التحليل الستاتيكي وتحليل السرعات. وكما هو الحال في عملية التحليل الكينماتيكي الأمامي والخلفي لميكانيزمات الروبوتات المتوازية، فإنه يمكن أن نستفيد غالباً من بعض سمات الميكانيزمات بحيث يمكن تبسيط أو اختزال الإجراء اللازم من أجل الحصول على مصفوفات اليعقوبي. ولذلك فإننا سوف نبدأ بدراسة منصة ستيورات - جوف Stewart - Gough، وسوف نرى أن يعقوبي التمثيل الكينماتيكي الخلفي يمكن الحصول عليه بسهولة عن طريق التحليل الستاتيكي. وبعد ذلك سوف ندرس تحليل السرعات من أجل الميكانيزمات المتوازية بشكل عام.

8.2.1. منصة ستيوارت – جوف Stewart – Gough:

سابقاً، رأينا أن التحليل الكينماتيكي لمنصة ستيوارت - جوف Stewart - Gough يمكن إيجاده بصورة تحليلية، حيث يكون معلوماً لدينا كل من اتجاه النهاية العاملة للروبوت $R \in SO(3)$ وموقعها $p \in R^3$، وبالتالي فإن أطوال الأرجل $s \in R^6$ يمكن إيجادها تحليلياً باستخدام تابع من الشكل $s = g(R,p)$. ومبدئياً، فإن هذه المعادلة يمكن اشتقاقها والقيام ببعض العمليات الرياضية لنحصل في نهاية الأمر على الصيغة التفاضلية، أي:

$$\dot{s} = G(R,p)V_s \qquad (8.4)$$

حيث $\dot{s} \in R^6$ تشير إلى سرعات الأرجل، و $V_s \in R^6$ هي عبارة عن السرعة الفضائية للنهاية العاملة بالنسبة لجملة المحاور الثابتة. و $G(R,p)$ هي عبارة عن مصفوفة يعقوبي التمثيل الكينماتيكي الخلفي. ونلاحظ هنا أن عملية الاشتقاق هذه تمت باستخدام بعض العمليات الجبرية فحسب.

وهنا سنقوم بدراسة منهجية مختلفة تعتمد على التحليل الستاتيكي. واستناداً إلى اعتبارات العمل الافتراضي Virtual Work والتي قمنا باستخدامها من قبل من أجل تحديد العلاقة الستاتيكية في

الروبوتات ذات السلسلة المفتوحة، فإن العلاقة الستاتيكية في روبوتات السلسلة المغلقة (معبراً عنها في جملة المحاور الثابتة) هي أيضاً تعطى بالشكل $\tau = J_s^T F_s$، حيث τ هو شعاع عزوم الدوران المدخلة، و F_s هي القوة الفضائية الخارجية المطبقة على النهاية العاملة (معبراً عنها في جملة المحاور الثابتة)، و J_s هي عبارة عن مصفوفة اليعقوبي الناتجة من التمثيل الكينماتيكي الأمامي.

وفي حالة منصفة ستيوات - جوف Stewart - Gough، فنلاحظ أن القوى الوحيدة التي يتم تطبيقها على القاعدة المتحركة تحدث عند المفاصل الكروية. فإذا كانت:

$$f_i = \omega_i \tau_i$$

هي عبارة عن القوة الخطية ثلاثية الأبعاد التي يتم تطبيقها من قبل الرِجل i، حيث $\omega_i \in R^3$ هي عبارة عن شعاع الواحدة المحدد لاتجاه تطبيق هذه القوة، و $\tau_i \in R$ وهو عبارة عن قيمة هذه القوة الخطية، مع التأكيد أن القوة f_i معبر عنها في جملة المحاور الثابتة. والعزم المتولد عن القوة f_i والمشار له بالرمز m، يعطى بالعلاقة:

$$m_i = r_i \times f_i$$

حيث $r_i \in R^3$ تشير إلى الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور الثابتة إلى نقطة تأثير القوة f_i (المفصل الكروي i في هذه الحالة)، ومرة أخرى، إن كلاً من r_i و m_i يتم التعبير عنهما بالنسبة لجملة المحاور الثابتة. وليس من الصعب أن نجد أن نفس هذا العزم يمكن التعبير عنه بالشكل:

$$m_i = q_i \times f_i$$

حيث $q_i \in R^3$ تشير إلى الشعاع من مبدأ إحداثيات جملة المحاور الثابتة إلى قاعدة الرِجل i، أي المفصل الذي يصل هذه الرِجل i بالقاعدة الثابتة للمنصة. إن التعبير عن هذا العزم بالشكل السابق مفضل أكثر، وذلك بسبب كون الشعاع q_i مقداراً ثابتاً كما تم تعريفه.

وبدمج كل من f_i و m_i بشكل قوة فضائية سداسية الأبعاد $F_i = (m_i, f_i)$، فإن القوة المحصلة الفضائية F_s المؤثرة على القاعدة العلوية المتحركة تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_s = \sum_{i=1}^{6} F_i = \sum_{i=1}^{6} \begin{bmatrix} r_i \times \omega_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \tau_i$$

$$= \begin{bmatrix} -\omega_1 \times q_1 & \cdots & -\omega_6 \times q_6 \\ \omega_1 & \cdots & \omega_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_6 \end{bmatrix}$$

وكما بينا سابقاً بأن العلاقة الستاتيكية في حالة منصفة ستيوارت - جوف Stewart - Gough هي من الشكل $\tau = J_s^T F_s$، فإنه وفقاً للاستنتاج السابق يمكننا أن نجد أن اليعقوبي الخلفي J_s^{-1} (أو بشكل مكافئ، اليعقوبي الناتج عن التحليل الكينماتيكي الخلفي) يعطى بالعلاقة:

$$J_s^{-1} = \begin{bmatrix} -\omega_1 \times q_1 & \cdots & -\omega_6 \times q_6 \\ \omega_1 & \cdots & \omega_6 \end{bmatrix}^T$$

8.2.2. الميكانيزمات المتوازية العامة:

استطعنا في منصة ستيوارت - جوف Stewart - Gough أن نقوم بإجراء التحليل الستاتيكي بصورة سلسة وذلك بسبب البنية الكينماتيكية لهذه المنصة، حيث أن قوى المفاصل الستة تتجه باتجاه الرِجل الموافقة لها. ولهذا استطعنا استنتاج مصفوفة اليعقوبي (وبشكل أدق مصفوفة اليعقوبي للتمثيل الكينماتيكي الخلفي) بدلالة أشعة التلولب المرتبطة بكل خط (رِجل). وفي هذه الفقرة سوف ندرس ميكانيزمات متوازية بصورة أعم أكثر، حيث لا يكون التحليل الستاتيكي فيها بهذه السهولة. وبدراسة الميكانيزم المتوازي الفضائي ثلاثي الأرجل ثلاثي درجات الحرية السابق والمبين في الشكل (8.5) كمثال عن حالة عامة للميكانيزمات المتوازية، فإننا سنقوم بتوضيح الإجراء العام من أجل تحديد مصفوفة اليعقوبي للتمثيل الكينماتيكي المباشر، وبعد ذلك سيكون تعميم هذا الأجراء على أي ميكانيزم متوازي آخر أمراً سهلاً.

الميكانيزم الموضح بالشكل (8.5) يتألف من قاعدتين متصلتين مع بعضهما من خلال ثلاث أرجل، وكل واحدة من هذه الأرجل هي عبارة عن سلسلة مفتوحة تمتلك خمسة درجات من الحرية. ومن أجل جملة المحاور الثابتة وجملة محاور النهاية العاملة المعطاة لنا كما هو محدد بالشكل، فإننا سنقوم بداية بكتابة التمثيل الكينماتيكي الأمامي لكل من السلاسل المفتوحة الثلاث كالتالي:

$$T_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} \dots e^{[S_5]\theta_5} M_1$$

$$T_2(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_5) = e^{[P_1]\phi_1} e^{[P_2]\phi_2} \dots e^{[P_5]\phi_5} M_2$$

$$T_3(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_5) = e^{[Q_1]\psi_1} e^{[Q_2]\psi_2} \dots e^{[Q_5]\psi_5} M_3$$

وقيود الكينماتيكية للحلقة المغلقة يمكن التعبير عنها بالشكل الآتي:

$$T_1(\theta) = T_2(\phi) \qquad (8.5)$$

$$T_3(\phi) = T_3(\psi) \qquad (8.6)$$

وبإجراء الجداء $\dot{T}T^{-1}$ لجانبي المعادلتين السابقتين فإننا نحصل على:

$$\dot{T}_1 T_1^{-1} = \dot{T}_2 T_2^{-1} \qquad (8.7)$$

$$\dot{T}_2 T_2^{-1} = \dot{T}_3 T_3^{-1} \qquad (8.8)$$

حيث $[V_i] = \dot{T}_i T_i^{-1}$ هي عبارة عن السرعة الفضائية لجملة محاور النهاية العاملة وذلك للسلسلة i، والمعادلات السابقة يمكن التعبير عنها بدلالة مصفوفات اليعقوبي الناتجة عن التمثيل الكينماتيكي لكل سلسلة كاالتالي:

$$J_1(\theta)\dot{\theta} = J_2(\phi)\dot{\phi} \qquad (8.9)$$

$$J_2(\phi)\dot{\phi} = J_3(\psi)\dot{\psi} \qquad (8.10)$$

ويمكن صياغة هاتين المعادلتين بالشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} J_1(\theta) & -J_2(\phi) & 0 \\ 0 & -J_2(\phi) & J_3(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = 0 \qquad (8.11)$$

سنقوم الآن عند هذه النقطة بإعادة ترتيب متغيرات المفاصل الخمسة عشر وذلك بضم المفاصل المحرَّكة على حدى والمفاصل الغير محرَّكة على حدى. ولنفترض دون تخصيص أن المفاصل المحرَّكة هي (θ_1,ϕ_1,ψ_1). وبتعريف شعاع المفاصل المحرَّكة $q_a \in R^3$ وشعاع المفاصل الغير محرَّكة $q_p \in R^{12}$ بالشكل:

$$q_a = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix}, \qquad q_p = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \vdots \\ \psi_5 \end{bmatrix}$$

والشعاع $q = (q_a,q_p) \in R^{15}$. فإن المعادلة (8.11) يمكن إعادة صياغتها بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} H_a(q) & H_p(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_p \end{bmatrix} = 0 \qquad (8.12)$$

أو بشكل مكافئ:

$$H_a\dot{q}_a + H_p\dot{q}_p = 0 \qquad (8.13)$$

حيث $H_a \in R^{12\times3}$ و $H_p \in R^{12\times12}$. فإذا كانت المصفوفة H_p لها معكوس، فإننا نجد:

$$\dot{q}_p = -H_p^{-1}H_a\dot{q}_a \qquad (8.14)$$

ومن هذه المعادلة نجد أنه عند إعطاء سرعات المفاصل المحرَّكة، فإن سرعات المفاصل الأخرى الغير محرَّكة يمكن الحصول عليها بشكل مباشر وذلك بفرض أن المصفوفة H_p لها معكوس.

وما تبقى علينا الآن هو استنتاج مصفوفة اليعقوبي للتمثيل الكينماتيكي الأمامي وذلك بدلالة المفاصل المحرَّكة، وهذا يعني إيجاد $J_a(q) \in R^{6\times3}$ والتي تحقق المعادلة $V_s = J_a(q)q_a^{\cdot}$، حيث V_s هي عبارة عن السرعة الفضائية لجملة محاور النهاية العاملة. ولهذا الغرض، فإننا سنلجأ إلى استخدام التمثيل الكينماتيكي الأمامي لأية سلسلة من السلاسل المفتوحة الثلاث، فعلى سبيل المثال، سنستخدم التمثيل الكينماتيكي الأمامي للسلسلة المفتوحة 1، أي $V_s = J_1(\theta)\theta^{\cdot}$، ومن المعادلة (8.14) يمكن أن نكتب:

$$\dot{\theta}_2 = g_2^T \dot{q}_a \qquad (8.15)$$

$$\dot{\theta}_3 = g_3^T \dot{q}_a \qquad (8.16)$$

$$\dot{\theta}_4 = g_4^T \dot{q}_a \qquad (8.17)$$

$$\dot{\theta}_5 = g_5^T \dot{q}_a \qquad (8.18)$$

وكل $g_i \in R^3$ حيث $i = 2,\ldots,5$، يمكن الحصول عليها من المعادلة (8.14). وبتعريف الشعاع $e_1^T = (1,0,0)$، فإن التمثيل الكينماتيكي التفاضلي الأمامي للسلسلة الأولى يمكن أن يكتب بالشكل:

$$V_s = J_1(\theta)\begin{bmatrix} e_1^T \\ g_2^T \\ g_3^T \\ g_4^T \\ g_5^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\psi}_1 \end{bmatrix} \qquad (8.19)$$

وبما أننا نريد إيجاد $J_a(q)$ التي تحقق المعادلة $V_s = J_a(q)\dot{q}_a$، فمن ما سبق يمكن أن نستنتج:

$$J_a(q) = J(q_1, \ldots, q_5)\begin{bmatrix} e_1^T \\ g_2(q)^T \\ g_3(q)^T \\ g_4(q)^T \\ g_5(q)^T \end{bmatrix} \qquad (8.20)$$

حيث:

$$\dot{q}_a = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\psi}_1 \end{bmatrix}$$

إن الاستنتاج السابق يمكن إجراؤه باستخدام السلسلة 2 أو السلسلة 3.

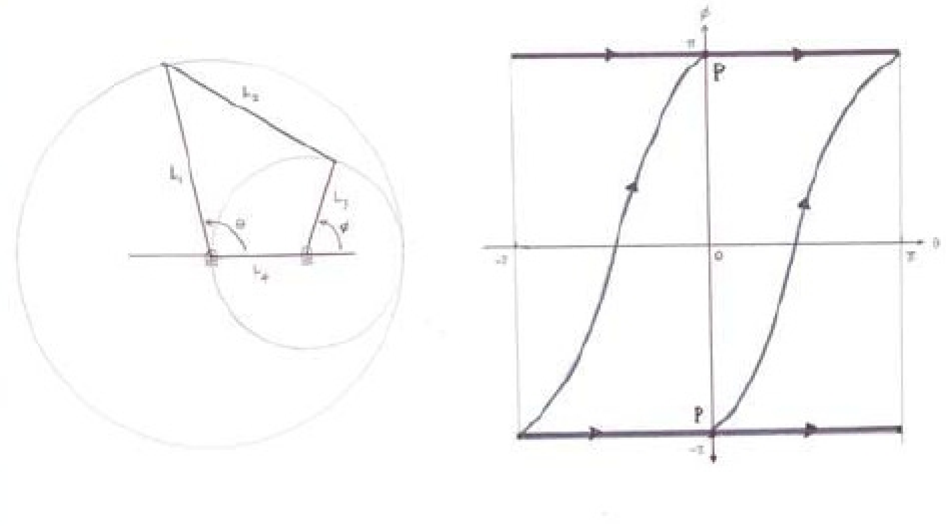
وبالتالي فعندما تعطى لنا قيم سرعات المفاصل المحرَّكة $\dot{q}_a$، فإننا نقوم بإيجاد قيم سرعات المفاصل الغير محركة $\dot{q}_p$ من المعادلات الكينماتيكية للحلقة المغلقة. وكلما نجحنا في اختزال العديد من عناصر q_p تصبح المهمة أكثر سهولة. النقطة الثانية التي يجب ملاحظتها هي أن المصفوفة $H_p(q)$ يمكن أن تكون شاذة، وفي هذه الحالة فإننا لن نقدر على إيجاد $\dot{q}_p$ من خلال معرفتنا لـ $\dot{q}_a$. والهيئات التي تكون فيها المصفوفة $H_p(q)$ شاذة تطلق عليها وضعيات القصور

الحركي تبعاً للمفاصل المحرَّكة Actuator Singularities، والتي سنقوم بدراستها في الفقرة التالية.

8.3. القصور (الشذوذ) الحركي:

في هذه الفقرة الأخيرة من هذا الفصل سنتكلم عن الخصائص الأساسية لحالات القصور الحركي في الروبوتات ذات السلسلة المغلقة. إن تشخيص حالات القصور الحركي في روبوتات السلاسل المغلقة يدور مضمونه حول مواضيع فرعية أكثر مما هو عليه في روبوتات السلسلة المفتوحة. وبدلاً من إجراء عملية تصنيف شامل للروبوتات ذات السلاسل المغلقة بشكل عام تحت هذا العنوان، فإننا سنقوم بإلقاء الضوء على السمات الأساسية لحالات القصور الحركي في روبوتات السلاسل المغلقة وذلك من خلال مثالين مستويين: الميكانيزم رباعي الوصلات المستوي المبين في الشكل (8.6)، والميكانيزم خماسي الوصلات المستوي المبين في الشكل (8.7). ويفترض من خلال هذين المثالين أن تصبح المنهجية التي من خلالها يتم تحليل القصور الحركي قابلة للتطبيق على روبوتات ذات سلاسل مغلقة أكثر تعقيداً.

سنبدأ بالميكانيزم رباعي الوصلات الرباعي. ولنتذكر أن فضاء الهيئة له هو عبارة عن منحنٍ مضمّن في فضاء محيط رباعي الأبعاد، وحتى بدون ذكر المعادلات، فإنه يمكن التأكد أن القيم المسموحة للمفاصل لـ (θ,ϕ) للميكانيزم الرباعي الوصلات تشكل منحنياً من النوع المبين في الشكل (8.6). وبدلالة كل من زوايا الدخل والخرج θ و ϕ، فإن معادلة القيد الكينماتيكي للحلقة المغلقة يمكن التعبير عنها بالشكل التالي:



الشكل 8.6: الميكانيزم رباعي الوصلات المستوي وفضاء الهيئة لمفاصله.

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha} \pm \cos^{-1}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) \qquad (8.21)$$

حيث :

$$\alpha = 2L_3L_4 - 2L_1L_3\cos\theta \qquad (8.22)$$

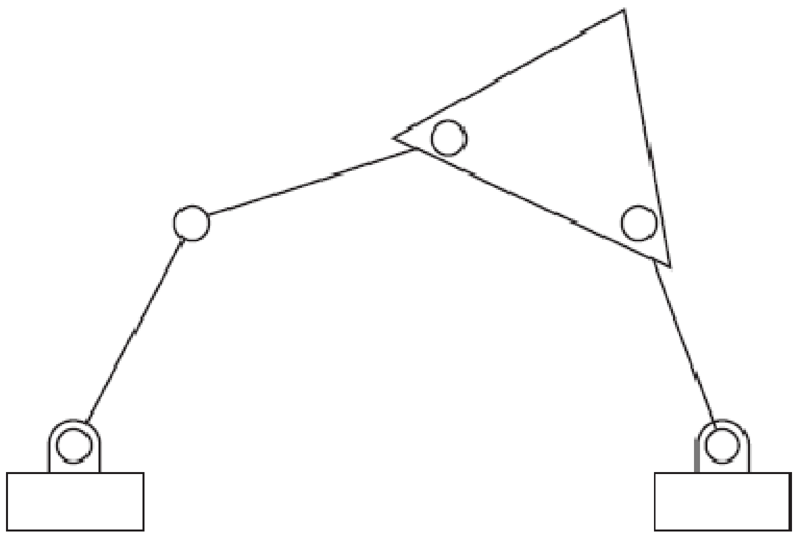
$$\beta = -2L_1L_3\sin\theta \qquad (8.23)$$

$$\gamma = L_2^2 - L_4^2 - L_3^2 - L_1^2 + 2L_1L_4\cos\theta \qquad (8.24)$$

ومن الملاحظ أن وجود الحل الفريد للحلول يعتمد على أطوال الوصلات $L_1,\ldots,L_2$، وعلى وجه الخصوص، فإنه لا يوجد حل في حال كون $\gamma^2 \le \alpha^2 + \beta^2$. والشكل السابق يرسم الشكل البياني للدخل والخرج عندما تكون أطوال الوصلات كالتالي: $L_1 = 4, L_2 = 4, L_3 = 3, L_4 = 2$، وفي هذه الحالة فإن كلاً من الزاويتين ϕ و θ يقعان ضمن المجال $[0,2\pi]$.

ومن معضلات هذا الشكل البياني هي نقطة التشعب Bifurcation Point P كما هي موضحة بالشكل. وعند هذه النقطة فإن فرعي المنحني يلتقيان مما يؤذي لحدوث تقاطع ذاتي حيث يقطع المنحي نفسه. فإذا كانت هيئة الميكانيزم الرباعي الوصلات تمثلها النقطة P، فإن الميكانيزم يملك الخيار في تتبع هذا الفرع أو ذاك. وهذه الظاهرة لا تحدث في أية نقطة أخرى عدا النقطة P في فضاء هيئة المفاصل للميكانيزم رباعي الوصلات المستوي.

نعود الآن إلى دراسة الميكانيزم خماسي الوصلات المستوي الموضح بالشكل (8.7). إن المعادلات الكينماتيكية المعبرة عن قيد الحلقة المغلقة يمكن كتابتها بالشكل:



الشكل 8.7: الميكانيزم خماسي الوصلات المستوي.

$$L_1\cos\theta_1 + \cdots + L_4\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4) = L_5 \qquad (8.25)$$

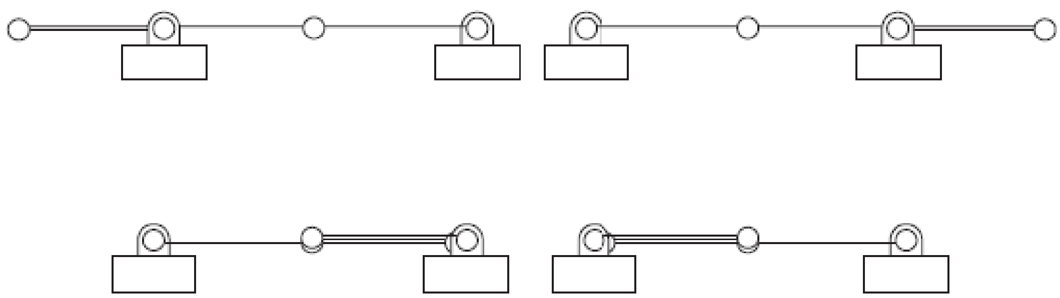
$$L_1\sin\theta_1 + \cdots + L_4\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4) = 0 \qquad (8.26)$$

حيث قمنا باختزال متغير المفصل θ_5 بشكل بديهي وذلك استناداً إلى شرط الحلقة المغلقة. وبكتابة المعادلتين السابقتين بالشكل $f(\theta_1,\ldots,\theta_4) = 0$، حيث $f : R^4 \rightarrow R^2$، فإن فضاء الهيئة يمكن اعتباره على أنه سطح ثنائي الأبعاد في المجال R^4. وبشكل مشابه لنقطة التشعب التي ظهرت لنا

عند دراسة الميكانيزم الرباعي الوصلات المستوي، فإن هناك تقاطعات ذاتية للسطح يمكن أن تحدث، وعند مثل هذه النقاط فإن مصفوفة يعقوبي القيد Constraint Jacobian تقل رتبتها، أي أنه من أجل أية نقطة من هذه النقاط θ في الميكانيزم الخماسي الوصلات يكون:

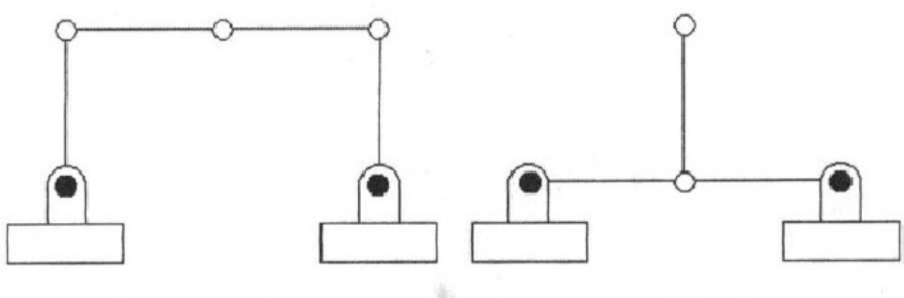
$$\operatorname{rank}\left(\frac{df}{d\theta}(\theta)\right) < 2 \qquad (8.27)$$

وهذا ما يتسبب بحدوث ما يسمى بالقصور الحركي الناتج عن فضاء الهيئة Configuration Space Singularity. والشكل (8.8) يوضح حالات القصور الحركي الممكنة الناجمة عن فضاء الهيئة للميكانيزم الخماسي الوصلات. ونلاحظ أنه إلى الآن لم نقم بالتنويه أو الإشارة إلى المفاصل المحرَّكة في هذا الميكانيزم، أو إلى المكان الذي ركبت فيه النهاية العاملة، وبالتالي فمن الجدير بالذكر أن نؤكد أن مفهوم القصور الحركي الناتج عن فضاء الهيئة مستقل تماماً عن كيفية اختيار المفاصل المحرَّكة وكيفية اختيار جملة محاور النهاية العاملة.



الشكل 8.8: حالات القصور الحركي الناجمة عن فضاء الهيئة للميكانيزم الخماسي الوصلات المستوي.

الآن سنقوم بدراسة الحالة عندما يكون لدينا مفصلان محرَّكان في الميكانيزم الخماسي الوصلات. فبالنظر إلى الشكل (8.9)، نلاحظ أن المفاصل المحرَّكة مشار إليها بدوائر مصمتة. وتحت شروط التشغيل الطبيعية، يمكن أن يكون التحكم بحركة المفاصل المحرَّكة مستقلاً. وبمعنى آخر، إن إقفال حركة المفاصل المحرَّكة يجب أن يؤدي إلى تثبيت الميكانيزم الخماسي الوصلات على هيئة هيكل صلب.



الشكل 8.9: القصور الحركي تبعاً للمفاصل المحرَّكة للميكانيزم الخماسي الوصلات المستوي: الشكل اليساري للحالة التي تكون فيها المفاصل المحرَّكة غير مقفلة، والشكل اليميني للحالة التي تكون فيها المفاصل المحرَّكة مقفلة.

في حالة القصور (الشذوذ) الحركي تبعاً للمفاصل المحرَّكة غير المقفلة Non-degenerate Actuator Singularity الموضحة في الشكل (8.9) (الشكل اليساري)، فإن تدوير المفاصل المحرَّكة باتجاهات متعاكسة سوف يؤدي إلى تبعات كارثية للميكانيزم. وفي حالة القصور الحركي تبعاً للمفاصل المحرَّكة المقفلة Degenerate Actuator Singularity والمبينة في اليميني من الشكل (8.9)، فإن الحالة معاكسة للسابق، حيث نلاحظ أنه حتى لو تم إقفال حركة المفاصل المحرَّكة، فباستطاعة الوصلتين الداخليتين الدوران بكل حرية.

إن السبب وراء تصنيف حالات القصور الحركية هذه تحت بند القصور الحركي تبعاً للمفاصل المحرَّكة هو أنه لو قمنا بتغيير مكان المحركات بحيث تقوم بتحريك مفاصل أخرى، فإنه يمكن القضاء على مثل هذه الحالات من القصور الحركي. وفي نوعي القصور الحركي تبعاً للمفاصل المحرَّكة (مع إقفال حركة المفاصل المحرَّكة أو من دون إقفال) في الميكانيزم الخماسي الوصلات، فإن تغيير مكان أحد المحركات بحيث يقوم بتحريك أحد المفاصل غير المحرَّكة الثلاثة يمكن أن يلغي حالة القصور الحركي.

ومن السهولة بمكان ملاحظة حالة القصور الحركي تبعاً للمفاصل المحرَّكة بصورة فيزيائية في الميكانيزم الخماسي الوصلات، ولكن ذلك يكون صعباً عند دراسة ميكانيزمات ذات سلاسل مغلقة على درجة أعلى من التعقيد. ويمكن تشخيص حالات القصور الحركي تبعاً للمفاصل المحرَّكة رياضياً من خلال رتبة مصفوفة يعقوبي القيد. وكالسابق، فإننا نقوم بكتابة المعادلات الكينماتيكية لقيود الحلقة المغلقة بالشكل التفاضلي كالتالي:

$$[H_a(q) \quad H_p(q)] \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_p \end{bmatrix} = 0 \qquad (8.28)$$

حيث $q_a \in \mathrm{R}^a$ هو عبارة عن الشعاع الذي يشمل المفاصل المحرَّكة، و $q_p \in \mathrm{R}^p$ هو عبارة عن الشعاع الذي يشمل المفاصل الغير محرَّكة. ومن ذلك يمكن أن نجد أن:

$$H(q) = [H_a(q) \quad H_p(q)] \in \mathrm{R}^{p\times(a+p)} \qquad (8.29)$$

وأن $H_p(q)$ هي مصفوفة أبعادها $p\times p$.

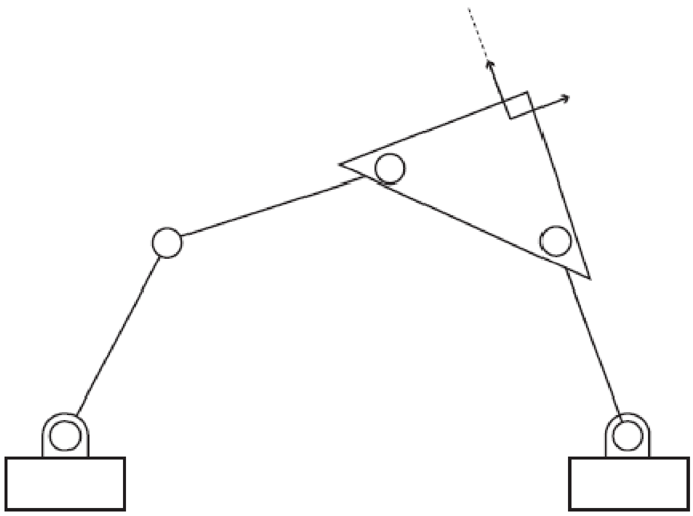
ومن خلال ماسبق، فإنه نستطيع أن نستنتج التالي:

- إذا كانت رتبة المصفوفة $\mathrm{H}_p(q) < p$، بالتالي فإن الهيئة الموافقة لـ q تمثل حالة قصور حركي تبعاً للمفاصل المحرَّكة Actuator Singularitiy. والتمييز بين نوعي حالة القصور الحركي هذه (مع إقفال حركة المفاصل المحرَّكة أو من دون إقفال) يتطلب إجراءات رياضية أكثر، ويعتمد على المعلومات المستنتجة من إجراء عملية الاشتقاق من المرتبة الثانية للمعادلة (8.28) والتي لن نقوم بمناقشتها في هذا الكتاب.

- إذا كانت مرتبة المصفوفة $\mathrm{H}(q) < p$، بالتالي فإن الهيئة الموافقة لـ q تمثل حالة قصور حركي ناتجة عن فضاء الهيئة Configuration Space Singularity. ونلاحظ هنا أنه وتحت هذا الشرط فإن المصفوفة $\mathrm{H}_p(q)$ هي مصفوفة شاذة (والعكس غير صحيح

في هذه الحالة). ولهذا فإن حالات القصور الحركي الناجمة عن فضاء الهيئة يمكن عدها على أنها نقطة التقاطع بين جميع الحالات الممكنة للقصور الحركي تبعاً للمفاصل المحرَّكة والناجمة عن جميع الاحتمالات الممكنة لمجموعات المفاصل المحرَّكة.

الصنف الأخير لحالات القصور الحركي يدور حول طريقة اختيار جملة محاور النهاية العاملة. ففي حالة الميكانيزم الخماسي الوصلات، وبغض الطرف عن اتجاه جملة محاور النهاية العاملة، وبالتركيز فقط على الموقع x-y للنهاية العاملة، فإننا نلاحظ أن الشكل (8.10) يظهر الميكانيزم الخماسي الوصلات وهو في حالة قصور حركي ناتجة عن موقع النهاية العالمة End Effector Singularity وذلك للاختيار المعطى لموقع النهاية العاملة. ونلاحظ أن السرعات على طول الخطط المنقط غير ممكنة الحدوث عند هذه الهيئة بصورة مشابهة لحالات القصور الحركي في ميكانيزمات السلاسل المفتوحة. ونلاحظ أيضاً أن حالات القصور الحركي المتعلقة بموقع النهاية العاملة مستقلة تماماً عن كيفية اختيار المفاصل المحرَّكة (حيث أن تحديد عدد أو أي المفاصل التي ينبغي تحريها لا يؤثر على حالة القصور الحركي أي أنها لا تتعلق بهذه الأمور).



الشكل 8.10: حالة القصور الحركي المرتبطة بموقع النهاية العاملة في الميكانيزم الخماسي الوصلات المستوي.

حالات القصور الحركي الناتجة عن موقع النهاية العاملة يمكن تشخيصها رياضياً كالتالي: نقوم باختيار أية مجموعة صالحة من المفاصل المحرَّكة q_{a} بحيث لايكون الميكانيزم في حالة قصور حركي بسببها، ومن ثم نكتب التمثيل الكينماتيكي الأمامي له بالشكل التالي:

$$f(q_a) = T \qquad (7.30)$$

حيث T تمثل النهاية العاملة. وبالتالي نستطيع أن نتأكد من وجود النقص في رتبة مصفوفة اليعقوبي للتابع f بطريقة مماثلة لتلك في حالة السلاسل المفتوحة من أجل تحديد وجود القصور الحركي الناتج عن موقع النهاية العاملة.

الفصل التاسع

التحليل الديناميكي لروبوتات السلسلة المفتوحة

Dynamics of Open Chain Robots

وفقاً لقانون نيوتن Newton الثاني للحركة، فإن أي تغير في سرعة الجسم الصلب يكون ناجماً عن وجود قوى وعزوم دوران خارجية. وفي هذا الفصل، سنقوم بدراسة حركة الروبوتات ذات السلسلة المفتوحة مرة أخرى، ولكن في هذه المرة سوف نأخذ في الحسبان القوى وعزوم الدوران التي تسبب هذه الحركة، وهذه الدراسة تنتدرج تحت ما يسمى التحليل الديناميكي للروبوتات. إن المعادلات الديناميكية المرتبطة بهذه الدراسة (والتي تسمى أيضاً بمعادلات الحركة) هي عبارة عن مجموعة من المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية ذات الشكل:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + b(\theta, \dot{\theta}) \qquad (9.1)$$

حيث $\theta \in R^n$ هي عبارة عن شعاع متغيرات المفاصل، و $\tau \in R^n$ هو شعاع قوى وعزوم دوران المفاصل، و $M(\theta) \in R^{n\times n}$ هي عبارة عن مصفوفة متماثلة ولها معكوس ويطلق عليها اسم مصفوفة الكتلة The Mass Matrix، و $b(\theta,\dot{\theta}) \in R^n$ هي عبارة حزمة القوى التي تضم قوى الطرد المركزي والقوى الناتجة عن تسارع كوريوليس Coriolis وقوة الجاذبية وقوى الاحتكاك وغير ذلك من القوى الأخرى المتعلقة بـ θ و $\dot{\theta}$. وقد يُخدع أحدنا لما تبديه هذه المعادلات من بساطة واضحة، ولكن في الحقيقة، فإنه وحتى في روبوتات السلسلة المفتوحة البسيطة والتي تكون جميع محاور مفاصلها متعامدة أو متوازية فيما بينها، يمكن أن تكون $M(\theta)$ و $b(\theta,\dot{\theta})$ معقدة بصورة ملحوظة.

وكما قمنا سابقاً عند دراسة التحليل الكينماتيكي لروبوتات السلسلة بالتمييز بين قسمين هما التحليل الكينماتيكي الأمامي والتحليل الكينماتيكي الخلفي، فإننا سنقوم هنا أثناء دراستنا للتحليل الديناميكي لروبوتات السلسلة المفتوحة بالتمييز بين قسمين، هما التحليل الديناميكي الأمامي والتحليل الديناميكي الخلفي. وبغية توليد ومحاكاة مسار حركات النظام الروبوتي، فإنه من المفيد أن نطرح مسألة التحليل الديناميكي على شكل نظام مدخلات Inputs ومخرجات Outputs، بحيث تكون المدخلات هي مسارات عزوم الدوران $\tau(t)$، والمخرجات هي مسارات المفاصل $\theta(t)$. ومن هذا المنطلق، فإنه في حالة التحليل الديناميكي الأمامي يكون الهدف هو تحديد مخرجات مسارات المفاصل $\theta(t)$ انطلاقاً من معرفتنا لمدخلات مسارات عزوم الدوران $\tau(t)$ ومجموعة الشروط المعتبرة المحيطة المتعلقة بـ θ و $\dot{\theta}$. وهذا التحليل يتم إنجازه عادة بصورة رياضية من خلال المعادلة (9.1). وفي حالة التحليل الديناميكي الخلفي، فإن الهدف يكون تحديد مسار عزوم دوران المفاصل $\tau(t)$ التي تولد مسارات الحركة المطلوبة للمفاصل $\theta(t)$.

هناك إمكانية لوجود بعض الاختلافات الغير جوهرية المرتبطة بمفهومي التحليل الديناميكي الأمامي والخلفي. ففي حالة التحليل الديناميكي الخلفي، نلاحظ أن السرعة $\dot{\theta}$ والتسارع

Acceleration $\ddot{\theta}$ يمكن الحصول عليها بإجراء عملية الاشتقاق لمسار المفصل المطلوب $\theta(t)$. ولهذا، فإنه إذا كان معلوماً لدينا كل من $(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})$ في زمن ما t، يمكن الحصول على عزوم الدوران للمفصل بإجراء العمليات الجبرية المكافئة على الجانب الأيمن من المعادلة (9.1). وبصورة مكافئة، فإن هذا الإجراء أيضاً يعرف عادة على أنه التحليل الديناميكي الخلفي. أما في حالة التحليل الديناميكي الأمامي، وبما أن المصفوفة $M(\theta)$ لها دائماً معكوس، فإن المعادلة (9.1) يمكن إعادة كتابتها بالشكل:

$$\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta)\left(\tau - b\left(\theta,\dot{\theta}\right)\right) \qquad (9.2)$$

وهذا التقدير لـ $\ddot{\theta}$ انطلاقاً من القيم المعطاة لكل من τ و θ و $\dot{\theta}$ هو أيضاً غالباً ما يعرف على أنه التحليل الديناميكي الأمامي. وعلى الرغم من أن هذا المفهوم قد يبدو مختلفاً عن السابق بصورة أو بأخرى، إلا أن الحقيقة تقول عكس ذلك: فإذا كانت مدخلات مسارات عزوم الدوران $\tau(t)$ مع القيم الابتدائية لـ θ و $\dot{\theta}$ عن الزمن $t = t_0$، فبإجراء عملية التكامل على جانبي المعادلة (9.2) من $t = t_0$ إلى t نحصل على مخرجات المسار بشكل كامل $\theta(t)$.

المعادلات الديناميكية لروبوت ما عادة ما يتم استنتاجها باستخدام واحدة من طريقتين: من خلال التطبيق المباشر لمعادلات نيوتن Newton ومعادلات أويلر Euler الديناميكية للجسم الصلب (والتي تعرف عادة بصيغة نيوتن - أويلر Newton - Euler)، أو من خلال صيغة لاغرانج Lagrange الديناميكية. إن الصيغة لاغرانج Lagrange ممتازة من الناحية النظرية وفعالة جداً لدراسة الروبوتات ذات البنية الهيكلية البسيطة، على سبيل المثال، فهي مناسبة تماماً لدراسة الروبوتات ذات درجة الحرية المساوية لـ 3 أو أقل. وعلى أية حال، فإن الحسابات تصبح عسيرة وصعبة جداً عند دراسة روبوتات ذات درجات حرية أعلى. وللروبوتات ذات السلاسل المفتوحة بشكل عام، فإن صيغة نيوتن - أويلر Newton - Euler تقودنا إلى خوارزميات فعالة عند دراسة كل من التحليل الديناميكي الأمامي والخلفي والتي يمكن جمعها بصورة تقاربية على شكل تمثيلات تحليلية لمصفوفة الكتلة $M(\theta)$ على سبيل المثال، وبقية الحدود في المعادلة الديناميكية (9.1).

وفي هذا الفصل سنقوم بدراسة كل من الصيغتين، صيغة لاغرانج الديناميكية وصيغة نيوتن - أويلر Newton - Euler الديناميكية وذلك لروبوتات السلسلة المفتوحة. وسوف نخلص في نهاية المطاف إلى الصيغة الديناميكية في إحداثيات فضاء المهمة (أو فضاء العمل)، أو ما يسمى بديناميك الفضاء التشغيلي Operational Space Dynamics.

9.1. صيغة لاغرانج Lagrange الديناميكية:

9.1.1. الأفكار الرئيسية ومثال توضيحي:

الخطوة الأولى في عملية التحليل الديناميكي باستخدام صيغة لاغرانج Lagrange الديناميكية هي أن نختار مجموعة إحداثيات مستقلة $q \in \mathbb{R}^n$ والتي تصف هيئة النظام بطريقة مشابهة لما قمنا به أثناء تحليلنا لفضاء الهيئة لروبوت ما. وتسمى الإحداثيات q بالإحداثيات المعممة Generalized Coordinates. وبعد القيام باختيار الإحداثيات المعممة، فإنه ومن خلال هذه

الإحداثيات نقوم بتعريف مجموعة إحداثيات أخرى $f \in R^n$ والتي تشكل ثنائية مع الإحداثيات المعممة q، وتسمى هذه الإحداثيات بالقوى المعممة Generalized Forces. الإحداثيات f والإحداثيات q تشكل فيما بينها ثنائية بسبب كون الجداء الداخلي لهما $f^T q$ يمثل مايسمى بالعمل. وتابع لاغرانج Lagrange $L(q,\dot{q})$ بالتالي يمكن تعريفه على أنه الطاقة الحركية Kinetic Energy الكلية لكامل النظام مطروحاً منها الطاقة الكامنة Potential Energy. ومنه فإن معادلات الحركة يمكن التعبير عنها من خلال تابع لاغرانج Lagrange كالتالي:

$$f = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \qquad (9.3)$$

ومجموعة المعادلات هذه يطلق عليها معادلات أويلر - لاغرانج Euler - Lagrange مع وجود قوى خارجية[5].

وسوف نقوم بتوضيح صيغة لاغرانج Lagrange الديناميكية من خلال مثالين. في المثال الأول سنفترض أن لدينا جسيماً كتلته m قُيدت حركته على المحور الشاقولي فقط. بالتالي فضاء الهيئة لهذا الجسيم سيكون هو الخط الشاقولي، والاختيار الطبيعي للإحداثي المعمم لهذه الحركة هو ارتفاع الجسيم، والذي سنشير له بالمتغير العددي $x \in R$. وبفرض أن قوة الجاذبية mg تؤثر نحو الأسفل، وأن القوة الخارجية f تطبق نحو الأعلى. فإنه باستخدام القانون الثاني لنيوتن Newton، تكون معادلة الحركة لهذا الجسيم هي:

$$f - mg = m\ddot{x} \qquad (9.4)$$

والآن سنقوم بتطبيق صيغة لاغرانج Lagrange الديناميكية على الجسيم. حيث تكون الطاقة الحركة له $m\dot{x}^2/2$، والطاقة الكامنة هي mgx، ومنه يكون تابع لاغرانج Lagrange هو:

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx \qquad (9.5)$$

ومعادلة الحركية بالتالي تعطى بالشكل:

$$f = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot{x} + mg \qquad (9.6)$$

والتي هي تماماً نفس المعادلة (9.4).

والآن سنقوم باستنتاج المعادلات الديناميكية للروبوت المستوي ذي السلسلة المفتوحة والمحتوي على مفصلين دورانيين 2R والذي يتحرك بوجود تأثير الجاذبية. السلسلة تتحرك في المستوي المحدد بـ x-y، وتأثير الجاذبية يكون باتجاه المحور y. وقبل البدء بالتحليل الديناميكي، فإن الكتلة وخصائص القصور الذاتي (العطالة) لجميع الوصلات يجب أن تكون معرفة. وبهدف جعل الأمور أكثر بساطة، فإنه يمكن نمذجة الوصلتين على أنهما كتلتين نقطيتين m_1 و m_2 متمركزتين عند نهاية كل وصلة. ومنه فإن موقع وسرعة كتلة الوصلة 1 يعطيان بالشكل:

[5] في الشكل القياسي لمعادلات أويلر - لاغرانج Euler - Lagrane تكون القوى الخارجية f مساوية للصفر.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos\theta_1 \\ L_1 \sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin\theta_1 \\ L_1 \cos\theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1$$

بينما من أجل كتلة الوصلة 2، فإن العلاقات تعطى بالشكل:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin\theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

وباختيار الإحداثيات $\theta = (\theta_1,\theta_2)$ بحيث تمثل الإحداثيات المعممة، والقوى المعممة $\tau = (\tau_1,\tau_2)$ والتي هي عبارة عن عزوم دوران المفاصل (حيث $\tau^T\theta$ تمثل العمل المنجز)، فإن تابع لاغرانج Lagrange $L(\theta,\dot{\theta})$ يكون من الشكل الآتي:

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \sum_{i=1}^{2} K_i - P_i \qquad (9.7)$$

حيث نجد أن الطاقة الحركية للوصلتين K_1 و K_2 تساويان:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$
$$= \frac{1}{2}\left(m_2(L_1^2 + 2L_1L_2\cos\theta_2 + L_2^2)\dot{\theta}_1^2 + 2(L_2^2 + L_1L_2\cos\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + L_2^2\dot{\theta}_2^2\right)$$

والطاقة الكامنة للوصلتين P_1 و P_2 تساويان:

$$P_1 = m_1 g L_1 \sin\theta_1$$

$$P_2 = m_2 g (L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

ومنه فإن معادلات لاغرانج Lagrange (9.3) لهذا المثال هي من الشكل:

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \qquad (9.8)$$

وتنتج المعادلات الديناميكية للروبوت المستوي ذي السلسلة المفتوحة المحتوي على مفصلين دورانيين 2R من خلال التعويض والإجراء الرياضي الصحيح للجانب الأيمن من المعادلة (9.8) (لن نقوم بإدراج الحسابات التفصيلية وهي حسابات سهلة لكنها طويلة):

$$\begin{aligned}\tau_1 = &\big((m_1+m_2)L_1^2 + m_2(2L_1L_2\cos\theta_2 + L_2^2)\big)\ddot{\theta}_1 \\ &+ m_2(L_1L_2\cos\theta_1 + L_2^2)\ddot{\theta}_2 - 2m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ &- m_2L_1L_2\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 + (m_1+m_2)L_1g\cos\theta_1 \\ &+ m_2gL_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 = &\, m_2(L_1L_2\cos\theta_2 + L_2^2)\ddot{\theta}_1 + m_2L_2^2\ddot{\theta}_2 - m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ &- m_2gL_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

في عملية التحليل الديناميكي باستخدام صيغة لاغرانج Lagrange فإنه حالما يتم اختيار مجموعة الإحداثيات المعممة، يصبح من السهل علينا من الناحية النظرية صياغة تابع لاغرانج Lagrange، ومن ثم الحصول على المعادلات الديناميكية من خلال القيام بإجراء الاشتقاق الجزئي لتابع لاغرانج Lagrange. وعلى كل حال، فإن الحسابات تصبح عسيرة وصعبة بشكل سريع كلما ازدادت درجة الحرية للروبوت.

9.1.2. الصيغة العامة:

الآن سنقوم بشرح صيغة لاغرانج Lagrange الديناميكية وذلك من أجل الروبوتات ذات السلسلة المفتوحة بشكل عام والمحتوية على n وصلة. الخطوة الأولى هي أن نختار مجموعة للإحداثيات المعممة $\theta \in R^n$ من أجل وصف فضاء الهيئة للنظام. وكما نعلم فإنه في الروبوتات ذات السلاسل المفتوحة تكون جميع المفاصل محرَّكة، ومن المناسب جداً أن نختار θ بحيث تمثل شعاع قيم المفاصل. ويمكن الإشارة بعد ذلك إلى القوى المعممة بـ $\tau \in R^n$. فإذا كان المفصل θ_i دورانياً، فإن τ_i هي عبارة عن عزم دوران، أما إذا كان المفصل θ_i تمددياً، فإن τ_i هي عبارة عن قوة.

وعندما يتم اختيار الإحداثيات المعممة θ وتعريف القوى المعممة τ، فإن الخطوة التالية ستكون صياغة تابع لاغرانج Lagrange $L(\theta,\dot{\theta})$ بالشكل:

$$L(\theta,\dot{\theta}) = K(\theta,\dot{\theta}) - P(\theta) \qquad (9.9)$$

حيث $K(\theta,\dot{\theta})$ هي عبارة عن الطاقة الحركية و $P(\theta)$ هي عبارة عن الطاقة الكامنة للنظام بشكل كامل. وفي حال الروبوتات المكونة من وصلات صلبة فإن الطاقة الحركية يمكن أن تكتب دائماً بالشكل التالي:

$$K(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(\theta)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M(\theta)\dot{\theta} \qquad (9.10)$$

حيث $m_{ij}(\theta)$ هو العنصر (i,j) من مصفوفة الكتلة ذات الأبعاد $n\times n$. والبرهان الاستدلالي على ذلك سنقدمه عند دراسة صيغة نيوتن - أويلر Newton - Euler الديناميكية في الفقرة التالية.
يمكن الآن الحصول على المعادلات الديناميكية من خلال التعويض والإجراء الرياضي الصحيح للطرف الأيمن لصيغة لاغرانج Lagrange:

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n \qquad (9.11)$$

باستخدام علاقة الطاقة الحركية المعبر عنها بالمعادلة (9.10)، فإن معادلة التحليل الديناميكي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(\theta)\ddot{\theta}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ijk}(\theta)\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k + \frac{\partial P}{\partial \theta_i} \quad , \quad i = 1, \dots n \qquad (9.12)$$

حيث $\Gamma_{ijk}(\theta)$ تعرف على أنها رموز كريستوفيل Christoffel من النوع الأول، ويمكن إيجادها من العلاقة الاتية:

$$\Gamma_{ijk}(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial \theta_i}\right) \qquad (9.13)$$

وبصورة تقليدية فإن صيغة لاغرانج Lagrange الديناميكية تعد الطريقة الأفضل للحصول على مجموعة المعادلات التحليلية التقاربية الديناميكية بصورة مباشرة. وفي روبوتات السلسلة المفتوحة، فبالإضافة إلى أن هذا الكلام لا يعد صحيحاً بصورة مطلقة، تعد الصيغة $\Gamma_{ijk}(\theta)$ المعبر عنها في المعادلة أعلاه وكذلك المثالين اللذين قمنا بدراستهما بمثابة لمحة عن مدى تعقد الحسابات، وخصوصاً عند التعامل مع روبوتات ذات درجات حرية أعلى. ومن جهة أخرى، فإن صيغة نيوتن - أويلر Newton - Euler الديناميكية تتيح لنا تجنب الإجراءات التفاضلية الجزئية مما قد يسهل الأمور قليلاً. وعلى أية حال فإنه وكما رأينا سابقاً، فإن صيغة لاغرانج الديناميكية للاغرانج Lagrange تعطي رؤى مهمة لبنية المعادلات الديناميكية، وخصوصاً عند إنشاء منظومة مستقرة للتحكم بالروبوت.

9.2. التحليل الديناميكي للجسم الصلب:

9.2.1. الصيغة الكلاسيكية:

لنفترض أن لدينا جسماً صلباً له الكتلة m وله جملة محاور مرجعية $\{b\}$ حيث محاورها هي $\{\hat{x}_b,\hat{y}_b,\hat{z}_b\}$، وهذه الجملة موجودة في مركز كتلة الجسم الصلب. وعندما يتحرك هذا الجسم الصلب، فإن جملة محاور الجسم هذه أيضاً تتحرك بسرعة خطية v وسرعة زاوية w. ولنفترض الآن أن هذا الجسم الجسم خاضع لتأثير قوة خارجية f. وبالتالي يكون العزم الخارجي المتولد من القوة f بالنسبة لمركز كتلة الجسم هو $m = r \times f$، حيث r هو الشعاع من مركز كتلة الجسم الصلب إلى النقطة من الجسم التي تطبيق عليها القوة f. ولتكن h تشير إلى شعاع كمية الحركة

الزاوية Angular Momentum حول مركز كتلة الجسم (سنشرح باختصيار كيفية حساب h).
ومن السابق يمكن أن نجد أن المعادلات الديناميكية للجسم الصلب هي كالتالي:

$$\mathrm{f} = m\frac{d}{dt}\mathrm{v} \qquad (9.14)$$

$$m = \frac{d}{dt}h \qquad (9.15)$$

الآن سنقوم بتمثيل المعادلات الديناميكية هذه في جملة محاور الجسم $\{b\}$. وبداية سنقوم بتمثيل السرعة الخطية والسرعة الزاوية في جملة محاور الجسم $\{b\}$ بالشكل الآتي:

$$\mathrm{w} = \omega_x\hat{x}_b + \omega_y\hat{y}_b + \omega_z\hat{z}_b$$

$$\mathrm{v} = \upsilon_x\hat{x}_b + \upsilon_y\hat{y}_b + \upsilon_z\hat{z}_b$$

ويمكن كتابة هاتين المعادلتين أعلاه بشكل شعاعي كمصفوفة عامودية $\omega_b = (\omega_x,\omega_y,\omega_z)^T$ و $v_b = (v_x,v_y,v_z)^T$. وبالتالي يمكن أن نجد أن التسارع الخطي يعطى بالعلاقة:

$$a = \frac{d}{dt}\mathrm{v} = \left(\dot{\upsilon}_x\hat{x}_b + \dot{\upsilon}_y\hat{y}_b + \dot{\upsilon}_z\hat{z}_b\right) + \upsilon_x\dot{\hat{x}}_b + \upsilon_y\dot{\hat{y}}_b + \upsilon_z\dot{\hat{z}}_b \qquad (9.16)$$

وكما نعلم فإن:

$$\dot{\hat{x}}_b = w \times \hat{x}_b \;\;, \dot{\hat{y}}_b = w \times \hat{y}_b \;\;, \dot{\hat{z}}_b = w \times \hat{z}_b$$

ولنتذكر أن أشعة الواحدة هذه لجملة المحاور الدائرة استخدمت من أجل استنتاج شعاع السرعة الزاوية للجسم $\omega_b \in R^3$ من مصفوفة الدوران $R(t)$ بالشكل $[\omega_b] = R^T\dot{R}$. وبالتعويض في المعادلة (9.16) نجد:

$$a = \left(\dot{\upsilon}_x\hat{x}_b + \dot{\upsilon}_y\hat{y}_b + \dot{\upsilon}_z\hat{z}_b\right) + \mathrm{w} \times \mathrm{v}$$

وبالتالي يكون التمثيل الشعاعي للتسارع الخطي في جملة محاور الجسم $\{b\}$ كالتالي:

$$a_b = \dot{\upsilon}_b + (\omega_b \times \upsilon_b)$$

حيث $\dot{v}_b = (\dot{v}_x,\dot{v}_y,\dot{v}_z)^T$. وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (9.14) بحيث يتم التعبير عنها بالنسبة لجملة محاور الجسم $\{b\}$ كالاتي:

$$f_b = m(\dot{\upsilon}_b + \omega_b \times \upsilon_b) \qquad (9.17)$$

والآن سنقوم بالتعبير عن كمية الحركة الزاوية h بالنسبة لجملة محاور الجسم $\{b\}$. فعندما يتم ربط جملة محاور الجسم مع مركز كتلة الجسم كما فعلنا في السابق، فإن كمية لحركة الزاوية يمكن استنتاجها بشكل بسيط. بداية، فإننا بحاجة لمعرفة مصفوفة العطالة الدورانية ذات الأبعاد

3×3 للجسم الصلب، وهذه المصفوفة يمكن الحصول عليها عن طريق تخيل الجسم الصلب على أنه مجموعة غير منتهية من الجسيمات ذات الكتلة m_i، ولكل منها الإحداثيات (x_i,y_i,z_i) وذلك بالنسبة لجملة محاور الجسم الصلب $\{b\}$. وبالإشارة إلى مصفوفة العطالة الدورانية بالرمز $I_b \in R^{3\times3}$، فإن I_b يمكن الحصول عليها من خلال الجمع التالي لجميع الجسيمات المكونة للجسم الصلب:

$$I_b = \begin{bmatrix} \sum m_i(y_i^2+z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i(x_i^2+z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i(x_i^2+y_i^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة I_b والمعرفة بهذا الشكل تعد مقداراً ثابتاً، كما أنها مصفوفة متماثلة Symmetric وموجبة بشكل قاطع. وعند الحد الذي يصبح فيه عدد الجسيمات لانهائياً، فإن المجاميع الموجودة ضمن المصفوفة I_b يمكن الاستعاضة عنها بالتكاملات الحجمية على كامل الجسم B، وبالتالي فإنه يمكن وضع تابع كثافة الكتلة $\rho(x,y,z)$ بدلاً من كتل الجسيمات m_i، ومنه:

$$I_{xx} = \iiint_B (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{yy} = \iiint_B (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{zz} = \iiint_B (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\iiint_B xy\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\iiint_B xz\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\iiint_B zy\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

فإذا كانت كثافة الكتلة خلال الجسم منتظمة، فإن I_b يمكن تحديدها اعتماداً على شكل الجسم الصلب بصورة خاصة (ويمكن الرجوع لأي مرجع يتكلم عن مقاومة المواد وغيرها من المراجع

المختصة من أجل الحصول على الحسابات الخاصة لـ I_b من أجل بعض أشكال الوصلات القياسية).

وبالتعبير عن h بدلالة أشعة الواحدة لجملة محاور الجسم {b} نجد:

$$\mathrm{h} = h_x\hat{x}_b + h_y\hat{y}_b + h_z\hat{z}_b \qquad (9.18)$$

وبتعريف الشعاع $h_b = (h_x,h_y,h_z)^T \in R^3$، فإن h_b يمكن الحصول عليه كالتالي:

$$h_b = I_b\omega_b \qquad (9.19)$$

وبما أن المعادلة (9.15) هي المشتق الأول لـ h، فباشتقاق المعادلة (9.18) نجد:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{h} = \left(\dot{h}_x\hat{x}_b + \dot{h}_y\hat{y}_b + \dot{h}_z\hat{z}_b\right) + \mathrm{w}\times\mathrm{h}$$

وبالتالي تصبح معادلة العزم (9.15) معبراً عنها بالنسبة لجملة محاور الجسم {b} كالآتي:

$$m_b = I_b\dot{\omega}_b + \omega_b \times I_b\omega_b \qquad (9.20)$$

حيث $m_b \in R^3$ هو شعاع العزم m معبراً عنه في جملة محاور الجسم {b}. وتشكل المعادلتين (9.17) و (9.20) مع بعضهما ما يسمى بمعادلات الحركة للجسم الصلب.

9.2.2. صيغة التلولب – التلوّي Twist – Wrench Formulation:

المعادلتين (9.17) و (9.20) يمكن كتابتهما بالشكل التجميعي التالي:

$$\begin{bmatrix} m_b \\ f_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & mI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\omega}_b \\ \dot{v}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\omega_b] & 0 \\ 0 & [\omega_b] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & mI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} \qquad (9.21)$$

بالاستفادة من دراستنا السابقة، وأيضاً باستخدام الخاصيتين: $[v]v = v\times v = 0$ و $[v]^T = -[v]$، فإن المعادلة (9.21) يمكن كتابتها بالشكل المكافئ التالي:

$$\begin{bmatrix} m_b \\ f_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & mI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\omega}_b \\ \dot{v}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\omega_b] & [v_b] \\ 0 & [\omega_b] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & mI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & mI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\omega}_b \\ \dot{v}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\omega_b] & 0 \\ [v_b] & [\omega_b] \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & mI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix}$$

وبالكتابة بهذه الطريقة، فإن كل حد يمكن تعريفه كمقدار فضائي سداسي الأبعاد كالتالي:

(i) (ω_b,v_b) و (m_b,f_b) يمكن أن يعرفان بالترتيب على أنهما السرعة الفضائية (التلولب) V_b والقوة الفضائية (التلوّي) F_b:

$$V_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ \upsilon_b \end{bmatrix} \ , \qquad F_b = \begin{bmatrix} m_b \\ f_b \end{bmatrix} \qquad (9.22)$$

(ii) مصفوفة العطالة الفضائية $G_b \in R^{6\times6}$ والتي تعرف بالشكل:

$$G_b = \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & mI \end{bmatrix} \qquad (9.23)$$

حيث I تشير إلى المصفوفة الواحدية ذات الأبعاد 3×3. ومن خلال ما سبق نستطيع أن نقول أن الطاقة الحركية Kinetic Energy للجسم الصلب يمكن التعبير عنها بدلالة مصفوفة العطالة الفضائية كالاتي:

$$\text{Kinetic Energy} = \frac{1}{2}\omega_b^T I_b \omega_b + \frac{1}{2} m \upsilon_b^T \upsilon_b = \frac{1}{2} V_b^T G_b V_b \qquad (9.24)$$

(iii) كمية الحركة الفضائية Spatial Momentum $P_b \in R^6$ والتي تيعرف بالشكل التالي:

$$P_b = \begin{bmatrix} I_b \omega_b \\ m\upsilon_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & mI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_b \\ \upsilon_b \end{bmatrix} = G_b V_b \qquad (9.25)$$

ونلاحظ أن الحد P_i في المعادلة الديناميكية مضروب من الجهة اليسرى بالمصفوفة:

$$-\begin{bmatrix} [\omega_b] & 0 \\ [\upsilon_b] & [\omega_b] \end{bmatrix}^T \qquad (9.26)$$

سنقوم الآن بشرح المنشأ والمعنى الهندسي لهذه المصفوفة. بداية، لنتذكر أن الجداء الخارجي لشعاعين $\omega_1,\omega_2 \in R^3$ يمكن إيجاده باستخدام مفهوم المصفوفة المتماثلة المنحرفة بالشكل التالي:

$$[\omega_1 \times \omega_2] = [\omega_1][\omega_2] - [\omega_2][\omega_1] \qquad (9.27)$$

المصفوفة المعبر عنها بـ (9.26) يمكن التفكير فيها على أنها التعميم لعملية لجداء الخارجي لتلولبين سداسيي الأبعاد. وبشكل أكثر تفصيلاً، إذا كان لدينا التلولبان التاليان $V_1 = (\omega_1,\upsilon_1)$ و $V_2 = (\omega_2,\upsilon_2)$، فإذا قمنا بالحساب وفقاً للعلاقة (9.27) نجد:

$$\begin{bmatrix} [\omega_1] & \upsilon_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [\omega_2] & \upsilon_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\omega_2] & \upsilon_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [\omega_1] & \upsilon_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [\omega_1][\omega_2] - [\omega_2][\omega_1] & [\omega_1]\upsilon_2 - [\omega_1]\upsilon_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [\acute{\omega}] & \acute{\upsilon} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

والتي يمكن كتابتها بشكل مضغوط أكثر كالآتي:

$$\begin{bmatrix} \acute{\omega} \\ \acute{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega_1] & 0 \\ [v_1] & [\omega_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

وهذا التعميم للجداء الخارجي للتلولبين V_1 و V_2 يسمى بقوس لي Lie Bracket. للشعاعين V_1 و V_2.

تعريف 9.1. إذا كان لدينا التلولبان $V_1 = (\omega_1, v_1)$ و $V_2 = (\omega_2, v_2)$، فإن قوس لي Lie للشعاعين V_1 و V_2 والمشار له بـ $[V_1,V_2]$ يعطى بالشكل:

$$[V_1, V_2] = \begin{bmatrix} [\omega_1] & 0 \\ [v_1] & [\omega_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = Ad_{V_1}(V_2) \qquad (9.28)$$

فمن أجل $V = (\omega, v)$ المعطاة لنا، فإنه يمكننا تعريف المفهوم التالي للتمثيل المصفوفي ذو الأبعاد 6×6 $[Ad_V]$ كالتالي:

$$[\mathrm{Ad}_V] = \begin{bmatrix} [\omega] & 0 \\ [v] & [\omega] \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6\times6} \qquad (9.29)$$

وبهذا المفهوم فإن قوس لي Lie $[V_1,V_2]$ يمكن التعبير عنه أيضاً كالاتي:

$$[V_1, V_2] = Ad_{V_1}(V_2) = [Ad_{V_1}]V_2 \qquad (9.30)$$

تعريف 9.2. لنفترض أنه أعطي لنا التلولب $V = (\omega, v)$ والتلوّي $F = (m, f)$، فإننا نعرف الدالة التالية:

$$Ad_V^T(F) = [Ad_V]^T F = \begin{bmatrix} [\omega] & 0 \\ [v] & [\omega] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\omega]m - [v]f \\ -[\omega]f \end{bmatrix} \qquad (9.31)$$

باستخدام التعريفات والمفهوم أعلاه فإن المعادلات الديناميكية للجسم الصلب يمكن كتابتها كما يلي:

$$F_b = G_b \dot{V}_b - Ad_{V_b}^T(P_b) \qquad (9.32)$$
$$= G_b \dot{V}_b - [Ad_{V_b}]^T G_b V_b \qquad (9.33)$$

ونلاحظ أن هناك تشابهاً بين المعادلة (9.33) ومعادلة العزم للجسم الصلب الدائر:

$$m_b = I_b \dot{\omega}_b - [\omega_b]^T I_b \omega_b \qquad (9.34)$$

المعادلة (9.34) هي ببساطة المركبة الدورانية للمعادلة (9.33).

9.3. التحليل الديناميكي الخلفي لروبوتات السلاسل المفتوحة:

سنقوم الآن بدراسة مسألة التحليل الديناميكي الخلفي للروبوتات ذات السلاسل المفتوحة المكونة من n وصلة متصلة مع بعضها البعض بوساطة مفاصل ذات درجة حرية واحدة. فإذا كانت متغيرات المفاصل معلومة لنا $\theta \in R^n$، وكذلك سرعاتها $\dot{\theta} \in R^3$ وتسارعاتها $\ddot{\theta} \in R^n$، فإن هدفنا هو حساب الجانب الأيمن من المعادلة الديناميكية التالية:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + b\big(\theta, \dot{\theta}\big)$$

وستكون النتيجة الرئيسية عبارة عن خوارزمية التحليل الديناميكي الخلفي التكرارية التي تضم مرحلة التكرار الأمامي والخلفي. ففي مرحلة التكرار الأمامي، فإن السرعات والتسارعات لكل وصلة تنتقل من القاعدة إلى النهاية العاملة للروبوت، في حين أنه في مرحلة التكرار الخلفي، فإن القوة والعزوم المطبقة من قبل كل وصلة تنتقل من النهاية العاملة إلى القاعدة.

إذا افترضنا أننا قمنا بربط جملة محاور مرجعية ثابتة للجسم $\{i\}$ في مركز كتلة كل وصلة i، حيث $i = 1,\ldots,n$. وإذا أشرنا إلى جملة محاور الأرض بـ $\{0\}$، وكانت جملة المحاور المرتبطة بمركز كتلة الوصلة الأخيرة مشاراً إليها بـ $\{n\}$. فإن الانزياح من الجملة $\{i\text{-}1\}$ إلى $\{i\}$ والمشار له بـ $T_{i-1,I} \in SE(3)$، يمكن التعبير عنه بالشكل الآتي:

$$T_{i-1,i} = M_{i-1,i}e^{[A_i]\theta_i} \qquad (9.35)$$

حيث $M_{i-1,i} \in SE(3)$، و $A_i = (\omega_i, v_i)$ هو عبارة عن شعاع التلولب للمفصل i (بفرض θ_i تساوي الصفر) معبراً عنه بالنسبة لجملة المحاور $\{i\text{-}1\}$. فإذا كان التمثيل الكينماتيكي الأمامي معبراً عنه باستخدام صيغة جداء الأسيات بالشكل:

$$T_{0n} = e^{[S_1]\theta_1}e^{[S_2]\theta_2} \ldots e^{[S_n]\theta_n}M \qquad (9.36)$$

بالتالي فإن التمثيل الكينماتيكي الأمامي حتى جملة محاور الوصلة $\{i\}$ يمكن أن يكتب كالتالي:

$$T_{0i} = e^{[S_1]\theta_1}e^{[S_2]\theta_2} \ldots e^{[S_i]\theta_i}M_i \qquad (9.37)$$

$$M_i = M_{01}M_{12} \ldots M_{i-1,i} \qquad (9.38)$$

حيث $i = 1,\ldots,n$، و $M_i \in SE(3)$ تشير إلى هيئة جملة محاور الوصلة $\{i\}$ عند الوضعية الصفرية. ومن أجل $i = 1,\ldots,n$، فإنه يمكن استنتاج مايلي عن طريق الحساب المباشر:

$$M_{i-1,i} = M_{i-1}^{-1}M_i \qquad (9.39)$$

$$A_i = Ad_{M_i^{-1}}(S_i) \qquad (9.40)$$

وسنقوم فيما يلي بتعريف المفاهيم التالية:

(i) لنشر إلى سرعة جملة محاور الوصلة {i} معبراً عنها في جملة محاور الوصلة {i} نفسها بـ $V_i = (\omega_i, v_i)$. بالتالي فإننا نلاحظ أن V_i يمكن الحصول عليها من العلاقة:

$$[V_i] = T_{0i}^{-1}\dot{T}_{0i}$$

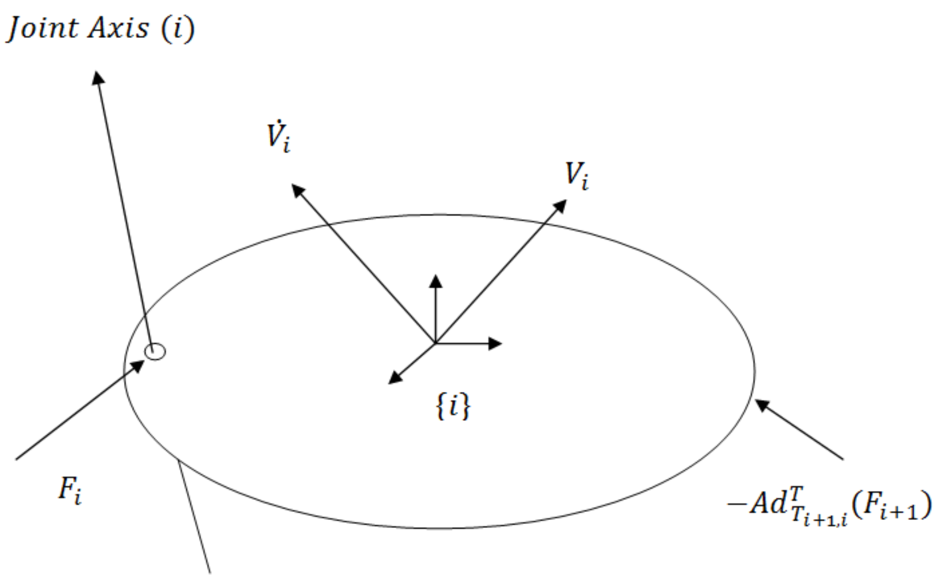
(ii) لتكن $G_i \in R^{6\times6}$ تشير إلى مصفوفة العطالة للوصلة i ذات الأبعاد 6×6 معبراً عنها نسبة لجملة محاور الوصلة {i}. ولأننا افترضنا أن جمل المحاور لكل الوصلات متوضعة في مركز الكتل لهذه الوصلات، فإن G_i سيكون لها شكل المصفوفة القطرية التالية:

$$G_i = \begin{bmatrix} I_i & 0 \\ 0 & m_i I \end{bmatrix} \qquad (9.41)$$

حيث I_i هي عبارة عن مصفوفة العطالة الدورانية ذات الأبعاد 3×3 للوصلة i، و m_i هي كتلة الوصلة i.

(iii) لنشر إلى القوة الفضائية المنتقلة من الوصلة i-1 إلى الوصلة i بـ $F_i = (m_i, f_i)$، بحيث يكون معبراً عنها بالنسبة لجملة محاور الوصلة {i}. إن القوة F_i تنتقل كلياً من خلال المفصل i لكونها نقطة الاتصال الوحيدة بين الوصلتين i-1 و i.

من خلال المفاهيم والتعاريف السابقة، سنقوم الآن بدراسة مخطط الجسم الصلب الحر للوصلة i كماهو مبين في الشكل (9.1). نلاحظ أن القوة F_{i+1} هي عبارة عن التلوّي المطبق من قبل الوصلة i على الوصلة i+1 معبراً عنها في جملة المحاور {i+1}. والمطلوب منا هو معرفة التلوّي المطبق من قبل الوصلة i+1 على الوصلة i معبراً عنه في جملة المحاور {i}. وباستخدام قاعدة التحويل للتلوّي الناتج عن تغيير جمل المحاور المرجعية، فإننا نجد:



الشكل 9.1: مخطط الجسم الصلب الحر الموضح للعزوم والقوى المطبقة على الوصلة i.

$$Ad^T_{T_{i+1,i}}(-F_{i+1}) = -Ad^T_{T_{i+1,i}}(F_{i+1})$$

وبالتالي فإن معادلات الحركة للوصلة i يمكن كتابتها بالشكل:

$$G_i\dot{V}_i = Ad^T_{V_i}(G_iV_i) + F_i - Ad^T_{T_{i+1,i}}(F_{i+1}) \qquad (9.42)$$

وعزم الدوران $\tau_i \in R$ عند المفصل i بالتالي هو عبارة عن مسقط التلوّي F_i على تلولب المفصل A_i، أي:

$$\tau_i = F_i^T A_i \qquad (9.43)$$

والآن سنقوم باستنتاج التكرار الأمامي لسرعات وتسارعات الوصلات بدءاً من القاعدة وصولاً للنهاية العاملة للروبوت. بداية فإننا نلاحظ أن :

$$[V_1] = T_{01}^{-1}\dot{T}_{01} = \left[A_1\dot{\theta}_1\right] \qquad (9.44)$$

وأيضاً نجد:

$$\begin{aligned}[V_2] &= T_{02}^{-1}\dot{T}_{02}\\ &= T_{12}^{-1}\left(T_{01}^{-1}\dot{T}_{01}\right)T_{12} + T_{12}^{-1}\dot{T}_{12}\\ &= T_{12}^{-1}[V_1]T_{12} + \left[A_2\dot{\theta}_2\right] \qquad (9.45)\end{aligned}$$

أو بشكل مكافئ:

$$V_2 = Ad_{T_{21}}(V_1) + A_2\dot{\theta}_2$$

وبتكرار هذا الإجراء من أجل جميع الوصلات اللاحقة، فإننا يمكن أن نستنتج العلاقة التالية:

$$V_i = Ad_{T_{i,i-1}}(V_{i-1}) + A_i\dot{\theta}_i \quad , i = 1, \dots n \qquad (9.46)$$

وأيضاً التسارع $V_i^{\cdot}$ يمكن أيضاً إيجاده بصورة تكرارية. فنلاحظ أن:

$$\left[\dot{V}_i\right] = \frac{d}{dt}T_{i-1,i}[V_i]T_{i-1,i}^T + T_{i-1,i}\left[\dot{V}_i\right]T_{i-1,i}^{-1} + T_{i-1,i}[V_i]\frac{d}{dt}T_{i-1,i}^{-1} + [A_i]\ddot{\theta}_i$$

وحيث أن:

$$\frac{d}{dt}T_{i-1,i} = M_{i-1,i}[A_i]e^{[A_i]\theta_i}\dot{\theta}_i = M_{i-1,i}e^{[A_i]\theta_i}[A_i]\dot{\theta}_i$$

$$\frac{d}{dt}T_{i-1,i}^{-1} = -T_{i-1,i}^{-1}\dot{T}_{i-1,i}T_{i-1,i}^{-1}$$

فإننا نجد:

$$\dot{V}_i = A_i\ddot{\theta}_i + Ad_{T_{i,i-1}}\left(\dot{V}_{i-1}\right) + \left[Ad_{T_{i,i-1}}(V_{i-1}), A_i\dot{\theta}_i\right] \qquad (9.47)$$

وبما أن $[A_i,A_i] = 0$ و:

$$Ad_{T_{i,i-1}}(V_{i-1}) = V_i - A_i\dot{\theta}_i$$

فإنه يمكن أن نحصل على الصيغة البديلة والمكافئة للمعادلة (9.7):

$$\dot{V}_i = A_i\ddot{\theta}_i + Ad_{T_{i,i-1}}(\dot{V}_{i-1}) + [V_i, A_i\dot{\theta}_i] \qquad (9.48)$$

الصيغ أعلاه والمعبرة عن السرعات والتسارعات بالإضافة إلى المعادلات الديناميكية لأية وصلة معطاة يمكن أن تنظم في خوارزمية ذات مرحلتي تكرار أمامي - خلفي للتحليل الديناميكي الخلفي. وقبل ذلك سوف ندرس كيفية تضمين تأثير الجاذبية في الدراسة الديناميكية. وإحدى الطرق المتبعة من أجل محاكاة تأثيرات الجاذبية هي أن نُكسب جملة محاور القاعدة تسارعاً g، حيث $g \in R^3$ تشير إلى شعاع تسارع الجاذبية الأرضية معبراً عنه بالنسبة لجملة محاور القاعدة. في هذه الحالة فإنه من المهم أن نعلم أن تسارع الوصلة المحسوب من خلال الخوارزمية هو ليس التسارع الصحيح، بل هو التسارع الحقيقي منقوصاً منه تسارع الجاذبية الأرضية g.

الخوارزمية تبدأ بتقديم قيم ابتدائية لـ V_0 و $V_0^{\cdot}$ و F_{tip}، حيث V_0 و $V_0^{\cdot}$ هما بالترتيب السرعة الفضائية والتسارع الفضائي لجملة محاور القاعدة بحيث يتم التعبير عنهما بالنسبة لجملة محاور القاعدة، و F_{tip} هي عبارة عن القوة الخارجية الفضائية المطبقة على نقطة ما من الوصلة الأخيرة معبراً عنها بالنسبة لجملة محاور النهاية العاملة. مسار المفصل $\theta(t)$ والمشتقات $\theta^{\cdot},\theta^{\cdot\cdot}$ نفترض بأنها معلومة لدينا كمدخلات.

خوارزمية نيوتن - أويلر Newton - Euler للتحليل الديناميكي الخلفي:

- **التمهيد:** نفرض أن جملة محاور كل وصلة $\{i\}$ مرتبطة مع مركز الكتلة للوصلة . ومنه فإن التمثيل الكينماتيكي الأمامي بدءاً من جملة محاور القاعدة وصولاً إلى جلمة محاور الوصلة $\{i\}$ هو بالشكل:

$$T_{0i} = e^{[S_1]\theta_1}e^{[S_2]\theta_2} \dots e^{[S_i]\theta_i}M_i \quad , i = 1, \dots n \qquad (9.49)$$

نعرف $M_{i-1,i}$ لتكون الانزياح من جملة محاور الوصلة $\{i-1\}$ إلى جملة محاور الوصلة $\{i\}$. بالتالي فإن $M_i = M_{01}M_{12}\dots M_{i-1,i}$ و $M_{i-1,i} = M_{i-1}^{-1}$، حيث $i = 1,\dots,n$.
ومنه يكون الانزياح بين جملتي محاور الوصلتين $\{i-1\}$ و $\{i\}$ هو:

$$T_{i-1,i} = M_{i-1,i}e^{[A_i]\theta_i} \qquad (9.50)$$

حيث:

$$A_i = Ad_{M_i^{-1}}(S_i) \quad , i = 1, \dots n \qquad (9.51)$$

ويمكن تعريف مصفوفة العطالة الفضائية G_i للوصلة i ذات الأبعاد 6×6 وذلك بالنسبة لجملة محاور الوصلة المثبتة في مركز كتلها بالشكل:

$$G_i = \begin{bmatrix} I_i & 0 \\ 0 & m_i I \end{bmatrix} \qquad (9.52)$$

حيث $I_i \in R^{3\times3}$ هي عبارة عن مصفوفة العطالة الدورانية، و m_i هي عبارة عن كتلة الوصلة i. نقوم بتعريف التلولب $V_0 = (\omega_0,\nu_0)$ بحيث يعبر عن السرعة الفضائية لجملة محاور القاعدة معبراً عنه في جملة محاور القاعدة. ونقوم بتعريف $g \in R^3$ وهو عبارة عن شعاع الجاذبية معبراً عنه في جملة محاور القاعدة {0}. ونقوم أخيراً بتعريف التلوّي $F_{tip} = (m_{tip},f_{tip})$ بحيث يعبر عن التلوّي المطبق على نقطة ما من الوصلة n معبراً عنها في جملة محاور النهاية العاملة.

- **المعطيات:** V_0 معطاة لنا، $\dot{V}_0 = (0,g)$، $F_{n+1} = F_{tip}$.
- **مرحلة التكرار الأمامي:** من أجل $i = 1$ إلى n، نقوم بالإجراء التالي:

$$T_{i-1,i} = M_{i-1,i} e^{[A_i]\theta_i} \qquad (9.53)$$

$$V_i = Ad_{T_{i,i-1}}(V_{i-1}) + A_i\dot{\theta}_i \qquad (9.54)$$

$$\dot{V}_i = A_i\ddot{\theta}_i + Ad_{T_{i,i-1}}(\dot{V}_{i-1}) + [V_i, A_i\dot{\theta}_i] \qquad (9.55)$$

- **مرحلة التكرار الخلفي:** من أجل $i = 1$ إلى n، نقوم بالإجراء التالي:

$$F_i = Ad^T_{T_{i+1,i}}(F_{i+1}) + G_i\dot{V}_i - Ad^T_{V_i}(G_iV_i) \qquad (9.56)$$

$$\tau_i = F_i^T A_i \qquad (9.57)$$

وكما لاحظنا سابقاً، فإن المعادلة (9.55) للتسارع $\dot{V}_i$ يمكن استبدالها بالصيغة المكافئة التالية:

$$\dot{V}_i = A_i\ddot{\theta}_i + Ad_{T_{i,i-1}}(\dot{V}_{i-1}) + [Ad_{T_{i,i-1}}(V_{i-1}), A_i\dot{\theta}_i] \qquad (9.58)$$

9.4. الصيغة التقاربية للمعادلات الديناميكية:

في هذه الفقرة سوف ندرس كيف يمكن تنظيم معادلات خوارزمية التحليل الديناميكي العكسي التكرارية على شكل مجموعة معادلات ديناميكية تقاربية من الشكل:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta,\dot{\theta}) + g(\theta)$$

وقبل البدء بذلك، فإننا سنقوم ببرهنة تأكيدنا السابق بأن الطاقة الحركية الكلية K للروبوت يمكن التعبير عنها بالشكل:

$$K = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M(\theta)\dot{\theta}$$

ولكننا سنقوم بذلك من خلال معرفتنا أن الطاقة الحركية الكلية K يمكن التعبير عنها على أنها مجموع الطاقات الحركية لكل وصلات الروبوت:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i^T G_i V_i \qquad (9.59)$$

حيث V_i هي السرعة الفضائية لجملة محاور الوصلة {i}، و G_i هي عبارة عن مصفوفة العطالة الفضائية للوصلة i كما تم تعريفها من خلال المعادلة (9.52) (ويتم التعبير عن كليهما بالنسبة لجملة محاور الوصلة {i}). وليكن لدينا التابع $T_{0i} = (\theta_1,\ldots\theta_2)$ يشير إلى التمثيل الكينماتيكي الأمامي بدءاً جملة محاور القاعدة {0} وصولاً إلى جملة محاور الوصلة {i}، و $J_{ib}(\theta)$ هو عبارة عن مصفوفة يعقوبي الجسم التي يتم الحصول عليها من العلاقة:

$$J_{ib}(\theta) = T_{0i}^{-1}\dot{T}_{0i}$$

ونلاحظ أن أبعاد مصفوفة الجسم J_{ib} كما تم تعريفها هي $6\times i$، وسنجعلها $6\times n$ وذلك عن طريق جعل جيمع عناصر الأعمدة n-i الأخيرة عبارة عن أصفار. وبهذا التعريف لـ J_{ib}، يمكننا أن نكتب:

$$V_i = J_{ib}(\theta)\dot{\theta} \ , \ \ i = 1, \ldots, n$$

وبالتالي فإن الطاقة الحركية يمكن كتابتها بالشكل:

$$K = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T \left(\sum_{i=1}^{n} J_{ib}(\theta)^T G_i J_{ib}(\theta)\right)\dot{\theta} \qquad (9.60)$$

في الحقيقة، إن الحد الموجود ضمن القوسين ماهو إلا مصفوفة الكتلة $M(\theta)$:

$$M(\theta) = \sum_{i=1}^{n} J_{ib}(\theta)^T G_i J_{ib}(\theta) \qquad (9.61)$$

سنعود الآن إلى مهمتنا الأساسية والتي تدور حول استنتاج الصيغة التقاربية للمعادلات الديناميكية. وسوف نبدأ بتعريف الأشعة التالية:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6n} \qquad (9.62)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6n} \qquad (9.63)$$

ومن ثم سنقوم بتعريف المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A_n \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6n\times n} \qquad (9.64)$$

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & G_n \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6n\times 6n} \qquad (9.65)$$

$$[Ad_V] = \begin{bmatrix} [Ad_{V_1}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [Ad_{V_2}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & [Ad_{V_n}] \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6n\times 6n} \qquad (9.66)$$

$$[Ad_{A\dot{\theta}}] = \begin{bmatrix} [Ad_{A_1\dot{\theta}_1}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [Ad_{A_2\dot{\theta}_2}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & [Ad_{A_n\dot{\theta}_n}] \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6n\times 6n} \qquad (9.67)$$

$$\Gamma(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [Ad_{T_{21}}] & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & [Ad_{T_{32}}] & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [Ad_{T_{n,n-1}}] & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6n\times 6n} \qquad (9.68)$$

ولقد كتبنا $\Gamma(\theta)$ بهذا الشكل لنؤكد على أن Γ تتعلق بـ θ. وأخيراً، سنقوم بتعريف الأشعة التالية:

$$V_{base} = \begin{bmatrix} Ad_{T_{10}}(V_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6n} \qquad (9.69)$$

$$\dot{V}_{base} = \begin{bmatrix} Ad_{T_{10}}(\dot{V}_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6n} \qquad (9.70)$$

$$F_{tip} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Ad^T_{T_{n+1,n}}(F_{n+1}) \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6n} \qquad (9.71)$$

نلاحظ أن $A \in \mathrm{R}^{6n\times n}$ وأن $G \in \mathrm{R}^{6n\times 6n}$ هي عبارة عن مصفوفات قطرية ثابتة، حيث A تضم فقط البارامترات الكينماتيكية، في حين أن G تضم فقط الكتلة وبارامترات العطالة لكل وصلة.

بوساطة التعاريف السابقة، فإن خوارزمية التحليل الديناميكي الخلفي التكرارية يمكن تجميعها في جملة المعادلات المصفوفية التالية:

$$V = \Gamma(\theta)V + A\dot{\theta} + V_{base} \qquad (9.72)$$

$$\dot{V} = \Gamma(\theta)\dot{V} + A\ddot{\theta} + \left[Ad_{A\dot{\theta}}\right](\Gamma(\theta)V + V_{base}) + \dot{V}_{base} \qquad (9.73)$$

$$F = \Gamma^T(\theta)F + G\dot{V} - [Ad_V]^T GV + F_{tip} \qquad (9.74)$$

$$\tau = A^T F \qquad (9.75)$$

إن المصفوفة $\Gamma(\theta)$ تتميز بالخاصية التالية $\Gamma^n(\theta) = 0$ (مثل هذه المصفوفة يطلق عليها اسم المصفوفة عديمة القدرة أو عديمة القوى Nilpotent من الدرجة n)، وكنتيجة مستمدة من هذه الخاصية والتي يمكن إثباتها بالحساب المباشر أن $(I-\Gamma(\theta))^{-1} = I + \Gamma(\theta) + \ldots + \Gamma^{n-1}(\theta)$. وبتعريف التابع $L(\theta) = (I-\Gamma(\theta))^{-1}$، فإنه يمكن التأكد من خلال الحساب المباشر أن:

$$\mathrm{L}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ [Ad_{T_{21}}] & I & 0 & \cdots & 0 \\ [Ad_{T_{31}}] & [Ad_{T_{32}}] & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [Ad_{T_{n1}}] & [Ad_{T_{n2}}] & [Ad_{T_{n3}}] & \cdots & I \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{6n\times 6n} \qquad (9.76)$$

وقد كتبنا $L(\theta)$ للتأكيد على أن L تتعلق بـ θ. وبالتالي فإن المعادلات المصفوفية السابقة يمكن الآن كتابتها بالشكل:

$$V = L(\theta)\big(A\dot{\theta} + V_{base}\big) \qquad (9.77)$$

$$\dot{V} = L(\theta)\big(A\ddot{\theta} + [Ad_{A\dot{\theta}}]\Gamma(\theta)V + [Ad_{A\dot{\theta}}]V_{base} + \dot{V}_{base}\big) \qquad (9.78)$$

$$F = L^T(\theta)\big(G\dot{V} - [Ad_V]^T GV + F_{tip}\big) \qquad (9.79)$$

$$\tau = A^T F \qquad (9.80)$$

وإذا طبق تلوٍّ خارجي F_{tip} على النهاية العاملة للروبوت، فإن هذا التلوي يمكن إدخاله في المعادلة الديناميكية التالية:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + c\big(\theta, \dot{\theta}\big) + g(\theta) + J^T(\theta)F_{tip} \qquad (9.81)$$

حيث $J(\theta)$ هي عبارة عن مصفوفة اليعقوبي الناتجة عن التحليل الكينماتيكي الأمامي والمعبر عنها بالنسبة لنفس جملة المحاور المرجعية التي يتم فيها التعبير عن F_{tip}، ويكون:

$$M(\theta) = A^T L^T(\theta) G L(\theta) A \qquad (9.82)$$

$$c\big(\theta, \dot{\theta}\big) = A^T L^T(\theta)\big(GL(\theta)[Ad_{A\dot{\theta}}]\Gamma(\theta) - [Ad_V]^T G\big)L(\theta)A\dot{\theta} \qquad (9.83)$$

$$g(\theta) = A^T L^T(\theta) G L(\theta)\dot{V}_{base} \qquad (9.84)$$

الحد $g(\theta)$ يمثل قوى الجاذبية، بينما الحد $c(\theta,\dot{\theta})$ يمثل القوى الطاردة مركزياً والقوى الناتجة عن تسارع كوريوليس Coriolis. وبمقارنة هذه المعادلات مع صيغة لاغرانج Lagrange الديناميكية، أي:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(\theta)\ddot{\theta}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ijk}(\theta)\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k + \frac{\partial P}{\partial \theta_i} \;,\;\; i = 1, \dots n \qquad (9.85)$$

حيث $\Gamma_{ijk}(\theta)$:

$$\Gamma_{ijk}(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial \theta_i}\right) \qquad (9.86)$$

فإننا نجد أن عناصر الحد $c(\theta,\dot{\theta})$ يمكن تعريفها بالشكل:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ijk}(\theta)\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k$$

كما أن عناصر الحد المتعلق بالجاذبية $g(\theta)$ يمكن تعريفه بـ:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_i}$$

من خلال صيغة نيوتن - أويلر Newton - Euler، فإن المشتقات الجزئية الموجودة في الحد $\Gamma_{ijk}(\theta)$ يمكن استخلاصها مباشرة من المعادلة (9.83) بدون اللجوء إلى عمليات الاشتقاق. وبتعريف المصفوفة $C(\theta,\dot{\theta}) \in R^{n\times n}$ بحيث:

$$c_{ij}(\theta,\dot{\theta}) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{\mathrm{ijk}}(\theta)\dot{\theta}_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial \theta_i}\right)\dot{\theta}_k \qquad (9.87)$$

حيث c_{ij} تشير إلى العنصر (i,j) من المصفوفة $C(\theta,\dot{\theta})$، فإنه من الملاحظ أنه يمكن التعبير عن $c(\theta,\dot{\theta})$ كالتالي:

$$c(\theta,\dot{\theta}) = C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} \qquad (9.88)$$

المصفوفة $C(\theta,\dot{\theta})$ تسمى مصفوفة كوريوليس Coriolis Matrix. الخاصية التالية (والتي تسمى بالخاصية السلبية (أو اللافعالية Passivity) تبين أن لمصفوفة كوريوليس Coriolis تأثيرات مهمة في ثبات استقرار بعض قوانين التحكم بالروبوت.

الخاصية 9.1. إن المصفوفة $\dot{M}(\theta) - 2C(\theta,\dot{\theta}) \in R^{n\times n}$ هي عبارة عن مصفوفة متماثلة منحرفة. حيث $M(\theta) \in R^{n\times n}$ هي عبارة عن مصفوفة الكتلة، و $\dot{M}(\theta)$ هي عبارة عن مشتق هذه المصفوفة، و $C(\theta,\dot{\theta}) \in R^{n\times n}$ هي مصفوفة كوريوليس Coriolis المعطاة من خلال المعادلة (9.87).

البرهان: إن العنصر (i,j) من المصفوفة $\dot{M} - 2C$ هو:

$$\dot{m}_{ij}(\theta) - 2c_{ij}(\theta,\dot{\theta}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k}\dot{\theta}_k - \frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k}\dot{\theta}_k - \frac{\partial m_{ik}}{\partial \theta_j}\dot{\theta}_k + \frac{\partial m_{jk}}{\partial \theta_i}\dot{\theta}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial m_{kj}}{\partial \theta_i}\dot{\theta}_k - \frac{\partial m_{ik}}{\partial \theta_j}\dot{\theta}_k$$

وبالتبديل بين المؤشرات i و j، فإننا نجد:

$$\dot{m}_{ji}(\theta) - 2c_{ji}(\theta,\dot{\theta}) = -\left(\dot{m}_{ij}(\theta) - 2c_{ij}(\theta,\dot{\theta})\right)$$

وهذا ما يؤكد أن $(\dot{M} - 2C)^T = -(\dot{M} - 2C)$، أي أن المصفوفة هي مصفوفة متماثلة منحرفة.

الخاصية السلبية سنقوم باستخدامها لاحقاً في الفصل المتعلق بالتحكم بالروبوت.

9.5. التحليل الديناميكي الأمامي للروبوتات ذات السلاسل المفتوحة:

الآن سنقوم بدراسة مسألة التحليل الديناميكي الأمامي لروبوتات السلسلة المفتوحة، حيث نفترض أن مسار عزم الدوران $\tau(t)$ مع مجموعة الشروط الابتدائية المتعلقة بـ θ و $\dot{\theta}$ معطاة لنا، ويكون الهدف هو إجراء عملية التكامل على المعادلة الديناميكية $\tau(t) = M(\theta)\ddot{\theta} + b(\theta,\dot{\theta})$ من أجل

الحصول على مسار المفاصل $\theta(t)$. والطريقة الرقمية الأبسط من أجل إجراء عملية التكامل وذلك من أجل معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى $\dot{q} = f(q,t)$ حيث $q \in R^n$ هي أن نستخدم علاقة أويلر Euler التكرارية:

$$q(t+h) = q(t) + hf(q(t), t)$$

حيث h هو عبارة عن قيمة عددية موجبة تشير إلى الخطوة الزمنية. ويمكن تحويل المعادلة الديناميكية السابقة إلى معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى وذلك بالاستفادة من الميزة التي تنص على أن $M(\theta)$ لها معكوس دائماً، فبجعل $q_1 = \theta$ و $q_2 = \dot{\theta}$ و $q = (q_1,q_2) \in R^{2n}$، فإنه يمكن أن نكتب:

$$\dot{q}_1 = q_2$$

$$\dot{q}_2 = M^{-1}(q_1)\big(\tau(t) - b(q_1, q_2)\big)$$

وهي معادلة من الشكل $\dot{q} = f(q,t)$. وطريقة أويلر Euler للتكامل من أجل هذه المعادلة إذن تكون من الشكل التالي:

$$q_1(t+h) = q_1(t) + hq_2(t)$$

$$q_2(t+h) = q_2 + h\left(M\big(q_1(t)\big)^{-1}\left(\tau(t) - b\big(q_1(t), q_2(t)\big)\right)\right)$$

وبإعطاء مجموعة من القيم الابتدائية لـ $q_1(0) = \theta(0)$ و $q_2 = \dot{\theta}(0)$، فإن المعادلة أعلاه يمكن تكرارها مع الزمن حتى يتم الحصول رقمياً على مسار الحركة $\theta(t) = q_1(t)$.

ونلاحظ أن التكرار السابق يتطلب منا حساب $M^{-1}(\theta)$، ومن العسير والصعب إجراء الحساب لإيجاد معكوس المصفوفة $M(\theta)$. ولكن في الحقيقة، فإنه من الممكن مكاملة هذه المعادلات من دون اللجوء لحساب معكوس المصفوفة $M(\theta)$. وبالتالي فإن المعادلة الديناميكية التقاربية تكتب بالشكل:

$$M(\theta)\ddot{\theta} = \tau(t) - b\big(\theta, \dot{\theta}\big) \qquad (9.89)$$

وبجعل $\ddot{\theta}$ مساوية للصفر في المعادلة (9.89)، فإن المعادلة تصبح $\tau(t) = b(\theta,\dot{\theta})$. ولذلك فإنه وبالقيام بتطبيق خوارزمية التحليل الديناميكي الخلفي بعد جعل $\ddot{\theta}(t)$ مساوية للصفر وإبقاء كل من $(\theta(t),\dot{\theta}(t))$ على قيمهما الحالية، فإنه يمكن تحديد $b(\theta(t),\dot{\theta}(t))$. وبطرح هذا المقدار من القيمة المعطاة لـ $\tau(t)$ فإننا نحصل على الجانب اليميني من المعادلة (9.89). ولذلك، فإنه من خلال حساب $M(\theta)$، يصبح من السهل الحصول على $\ddot{\theta}(t)$ كحل للمعادلة الخطية $Ax = c$، حيث $A = M(\theta(t)) \in R^{n\times n}$ وهي مصفوفة غير شاذة بالطبع، و $c = \tau(t) - b(\theta(t),\dot{\theta}(t))$ هو مقدار معلوم.

وبالتالي فإن مسألة التحليل الديناميكي الأمامي يمكن اختزالها إلى الإجراء الحسابي لإيجاد $\ddot{\theta}$ وذلك من أجل القيم المعطاة لـ θ و $\dot{\theta}$ و τ. وفي الخوارزمية التالية سنسمح أيضاً باحتمالية وجود قوة فضائية خارجية F_{tip} مطبقة على الوصلة الأخيرة.

خوارزمية حساب تسارعات المفاصل – التابع $GetJointAccel(\theta,\dot{\theta},\tau,\tau_{ext})$:

- **المتطلبات الأساسية:** جميع الخوارزميات اللازمة من أجل الحسابات في عملية التحليل الديناميكي الخلفي،ولحساب مصفوفة الكتلة نفترض أنها معلومة لدينا. وأيضاً خوارزمية حل جملة المعالات الخطية $Ax = c$ حيث $x \in R^n$ و $A \in R^{n\times n}$ وهي مصفوفة غير شاذة، وحيث $c \in R^n$ معطى لنا.

- **المدخلات:** القيم الحالية لـ θ و $\dot{\theta}$، وعزم الدوران المُقدّم τ. وإذا كان هناك وجود لقوة فضائية خارجية معطاة F_{tip}، فإننا نستخدم العلاقة الستاتيكية التي تربط القوة بالعزم والمعطاة بالشكل $\tau_{ext} = J^TF_{tip}$، حيث مصفوفة اليعقوبي $J(\theta)$ والقوة F_{tip} يتم التعبير عنهما في نفس جملة المحاور المرجعية.

- **المخرجات:** تسارع المفاصل $\ddot{\theta}$.

- **التهيئة:** تعيين متغيرات مخزنة بشكل مؤقت لكل من $A \in R^{n\times n}$، و $\gamma \in R^n$، و $c \in R^n$.

- **إجراء التحليل الديناميكي الخلفي:** إجراء عملية التحليل الديناميكي الخلفي من أجل قيم كل من θ و $\dot{\theta}$ الحالية المعطاة، ونجعل $\ddot{\theta}$ مساوية للصفر، ونقوم بتخزين مخرجات عزوم الدوران في γ، ومن ثم نجعل $c = \tau - \gamma - \tau_{ext}$.

- **حساب مصفوفة الكتلة:** نقوم بحساب مصفوفة الكتلة من أجل القيم المعطاة لـ θ، ونقوم بتخزين الناتج في A.

- **حساب تسارعات المفاصل:** نقوم بحل جملة المعادلات الخطية $Ax = c$ ونوجد قيم x، وقيم x هي عبارة عن تسارعات المفاصل $\ddot{\theta}$.

باستخدام الخوارزمية السابقة من أجل حساب تسارعات المفاصل، فإن العديد من الطرق الرقيمة المستخدمة في إجراء عملية المكاملة عند التحليل الديناميكي الأمامي يمكن تنفيذها، وفيما يلي نقدم الخوارزمية المتعلقة بطريقة أويلر Euler البسيطة والتي شرحناها سابقاً:

خوارزمية طريقة أويلر Euler للتكامل المستخدمة في التحليل الديناميكي الأمامي:

- **المتطلبات الأساسية:** التابع $GetJointAccel(\theta,\dot{\theta},\tau,\tau_{ext})$ مطلوب.

- **المدخلات:** الشروط الابتدائية $\theta(0)$ و $\dot{\theta}(0)$، مدخلات عزوم الدوران $\tau(t)$ وعزم الدوران المطبق τ_{ext} حيث $t \in [0,t_f]$، وخطوة المكاملة الزمنية $h > 0$.

- **المخرجات:** مسار متغيرات المفاصل $\theta[k] = \theta(hk)$ حيث $k = 0,\ldots,N$.

- **التهيئة:** نجعل N = t*f*/h.
- **مرحلة التكرار:** من أجل K = 1 وحتى N، نقوم بمايلي:

$$\ddot{\theta}[k] = GetJointAccel(\theta[k], \dot{\theta}[k], \tau[k], \tau_{ext}[k])$$

$$\theta[k+1] = \theta[k] + h\dot{\theta}[k]$$

$$\dot{\theta}(k+1) = \dot{\theta}[k] + h\ddot{\theta}[k]$$

- **مسار متغيرات المفاصل:** θ[k] = θ(hk)، حيث k = 0,…,N.

9.6. التحليل الديناميكي في إحداثيات فضاء المهمة (أو فضاء العمل):

في هذه الفقرة سوف نقوم بدارسة كيفية تغير المعادلات الديناميكية نتيجة التحويل إلى التمثيل بإحداثيات جملة محاور النهاية العاملة (إحداثيات فضاء المهمة). ولنجعل الأمور أكثر بساطة فإننا سنقوم بدراسة روبوت ذي سلسلة مفتوحة ويمتلك ست درجات من الحرية وله المعادلة الديناميكية التالية:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + b\left(\theta, \dot{\theta}\right) \quad , \quad \theta \in \mathrm{R}^{n}, \tau \in \mathrm{R}^{n} \qquad (9.90)$$

وسنقوم في الوقت الحالي بإهمال تأثير أية قوة فضائية يمكن تطبيقها. ونحن نعلم أن السرعة الفضائية $V = (\omega, v)$ للنهاية العاملة للروبوت تتعلق بسرعة المفاصل $\dot{\theta}$ من خلال العلاقة:

$$V = J(\theta)\dot{\theta} \qquad (9.91)$$

مع الأخذ بعين الاعتبار أن كلاً من V و J(θ) يتم التعبير عنهما بالنسبة لنفس جملة المحاور المرجعية. وبالتالي فإن المشتق بالنسبة للزمن $\dot{V}$ يعطى بالعلاقة:

$$\dot{V} = \dot{J}(\theta)\dot{\theta} + J(\theta)\ddot{\theta} \qquad (9.92)$$

وعند الهيئة الموافقة لـ θ بحيث يكون لمصفوفة اليعقوبي J(θ) معكوس، فإننا نجد:

$$\dot{\theta} = J^{-1}V \qquad (9.93)$$

$$\ddot{\theta} = J^{-1}\dot{V} - J^{-1}\dot{J}J^{-1}V \qquad (9.94)$$

الحد الثاني في المعادلة (9.94) يمكن استنتاجه عن طريق الخاصية التالية:

$$\frac{d}{dt}(A^{-1}A) = \frac{d}{dt}A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot \frac{d}{dt}A$$

وذلك من أجل أية مصفوفة A(t) قابلة للاشتقاق ولها معكوس. وبالتعويض في المعادلة (9.90) بدلاً عن $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ نجد:

$$\tau = M\left(J^{-1}\dot{V} - J^{-1}\dot{J}J^{-1}V\right) + J^{-T}b\left(\theta, \dot{\theta}\right) \qquad (9.95)$$

حيث $J^{-T} = (J^{-1})^T = (J^T)^{-1}$، وبضرب جانبي المعادلة من جهة اليسار بـ J^{-T} نحصل على:

$$J^{-T}\tau = J^{-T}MJ^{-1}\dot{V} - J^{-T}MJ^{-1}\dot{J}J^{-1}V + J^{-T}b(\theta, J^{-1}V) \qquad (9.96)$$

وبما أن $J^{-T}\tau$ هي عبارة عن القوة الفضائية F، فإن المعادلة أعلاه يمكن كتابتها بالشكل:

$$F = \Lambda(\theta)\dot{V} + \eta(\theta, V) \qquad (9.97)$$

حيث:

$$\Lambda(\theta) = J^{-T}M(\theta)J^{-1} \qquad (9.98)$$

$$\eta(\theta, V) = J^{-T}b(\theta, J^{-1}V) - \Lambda\dot{J}J^{-1}V \qquad (9.99)$$

وهذه هي المعادلات الديناميكية بحيث يتم التعبير عنها في جملة محاور النهاية العاملة. وفي حال تطبيق قوة فضائية خارجية F على جملة محاور النهاية العاملة، فإننا نفترض أن عزوم الدوران للمفاصل مساوية للصفر، وبالتالي فإنه يتم التحكم بحركة جملة محاور النهاية العاملة من خلال هذه المعادلات. ونلاحظ أن هناك علاقة بين θ وكل من $\Lambda(\theta)$ و $\eta(\theta,V)$. ونحن نعلم من خلال التحليل الكينماتيكي الخلفي أن $\theta = T^{-1}(X)$، وبالتالي فإنه يمكن الحصول على المعادلة التفاضلية بدلالة انزياح جملة محاور النهاية العاملة $X \in SE(3)$ والسرعة الفضائية V. وبصورة خاصة، وبما أن X عادة ما يتم الحصول عليها من خلال معرفة متغيرات المفاصل θ وتعويضها في معادلات التمثيل الكينماتيكي الأمامي، فإنه من المفضل أن نترك هذا الارتباط المعتمد على θ.

الفصل العاشر

التحكم بالروبوت

Robot Control

يمكن لذراع الروبوت أن يبدي العديد من السلوكيات المختلفة، وذلك استناداً إلى نوع المهمة الموكلة إليه وإلى طبيعة البيئة المحيطة به. ويمكنه القيام بالأعمال على أنه مصدر للحركات المبرمجة والتي تسمح له بتنفيذ المهمات كنقل أو تحرك الجسم من مكان لآخر، أو تتبع لمسار ما تسير وفقه أداة بخ الدهان مثلاً. ويمكن لذراع الروبوت أيضاً أن يقوم بالأعمال عل ى أنه مصدر للقوة، كما هو الحال عند توجيه دولاب الصقل نحو المشغولة بهدف صقل سطوحها فإنه يلزمنا تطبيق قوة ما لتنفيذ هذه المهمة. وفي بعض المهمات كالكتابة على اللوح باستخدام الطبشور، فإنه يجب أن يتم التحكم بالقوى في بعض الاتجاهات (القوة تقوم بضغط الطبشورة باتجاه اللوح) وكذلك الحركات في اتجاهات أخرى (الحركة على المستوي الذي يمثله اللوح). وعندما تكون الغاية من استخدام الروبوت هي القيام بالأعمال عن طريق اللمس، أو إجراء محاكاة لبيئة افتراضية، فقد يكون مرادنا منه أن يقوم بالعمل على أنه نابض أو مخمد أو كتلة تخضع وتستجيب للقوى المطبقة عليه.

وفي كل حالة من هذه الحالات، تكون وظيفة المتحكم بالروبوت Robot Controller هي تحويل خصائص المهمة الموكلة إلى الروبوت إلى قوى وعزوم يتم تطبيقها من قبل المحركات. وتعرف استراتيجيات التحكم المتبعة من أجل تحقيق هذه السلوكيات التي تكلمنا عنها باسم التحكم بالحركة (أو الموقع) Motion Control، أو التحكم بالقوة Force Control، أو التحكم الهجين بالقوة والحركة Hybird Motion - Force Control، أو التحكم بالمقاومة Imprdence Control. ومعرفة أي من هذه السلوكيات هو الأنسب تعتمد على كل من نوع المهمة وطبيعة البيئة المحيطة بها. فعلى سبيل المثال، يكون الهدف من التحكم بالقوة ذا معنى عندما تكون النهاية العاملة للروبوت على تماس مع شيء ما، ويكون من غير المفيد استخدام هذا النوع من التحكم عندما تتحرك النهاية العاملة بشكل حر في الفضاء. ومن الجدير بالذكر أن ننوه بأن هناك أيضاً مقيداً أساسياً يفرض نفسه من الناحية الميكانيكية بغض النظر عن النواحي البيئية، حيث إنه من غير الممكن أن يتم التحكم بالحركة والقوة بشكل مستقل عن الآخر. وإذا كانت مهمة الروبوت هي تنفيذ حركة ما، فإن طبيعة البيئة المحيطة به هي التي ستحدد القوة، والعكس بالعكس.

وعندما يتم اختيار نوع التحكم بما يتناسب مع نوع المهمة وطبيعة البيئة المحيطة، فإنه يوجد العديد من الطرق من أجل تحقيق ذلك: التحكم عن طريق التغذية الراجعة (الخلفية) Feedback Control، والذي يستخدم حساسات الموقع والسرعة والقوة لقياس السلوك الفعلي للروبوت، ومن ثم مقارنة هذا السلوك بالسلوك المطلوب تحقيقه، وبعد ذلك تعديل إشارات التحكم المرسلة إلى المحركات. التحكم عن طريق التغذية الراجعة يستخدم تقريباً في جميع أنظمة الروبوتات. ويستخدم في عملية التحكم عن طريق التغذية الأمامية Feedforward Control نموذج التمثيل

الديناميكي للروبوت بالإضافة إلى العوامل البيئية المحيطة به من أجل تحديد إشارات المحركات والتي تحقق التغير المطلوب في الحالة. وبسبب الاحتمال الكبير لوجود الأخطاء في عملية النمذجة الديناميكية، فإن التحكم عن طريق التغذية الأمامية هو نادر الاستخدام بشكل منفرد، ولكن هو غالباً ما يستخدم بشكل مقترن مع التحكم عن طريق التغذية الراجعة. إن إستراتيجيات التحكم المتكامل تتضمن ما يسمى بالتحكم التأقلمي Adaptive Control، والذي يقوم وبشكل مستمر بتقدير الخصائص الديناميكية للنظام من أجل تحسين الأداء. وتتضمن أيضاً ما يسمى بالتحكم المتين Robust Control والذي يستخدم من أجل ضمان البقاء عند مستوى معين من الأداء في وجه أية تغيرات ديناميكية غير متوقعة للنظام. إستراتيجيات التحكم المتكامل تتضمن أيضاً ما يسمى بالتحكم عن طريق التعلم المتكرر Iterative Learning Control، وذلك من أجل المهمات المتكررة باستمرار، حيث تستخدم الأخطاء الناجمة عن التنفيذ السابق للمهمة من أجل توليد أنظمة التحكم المناسبة عن طريق التغذية الأمامية في حال التكرار المستقبلي للمهمة نفسها.

في هذا الفصل سنقوم بالتركيز على التحكم عن طريق التغذية الراجعة والتحكم عن طريق التغذية الأمامية وذلك من أجل التحكم بالحركة، والتحكم بالقوة، والتحكم الهجين بالحركة والقوة، والتحكم بالمقاومة.

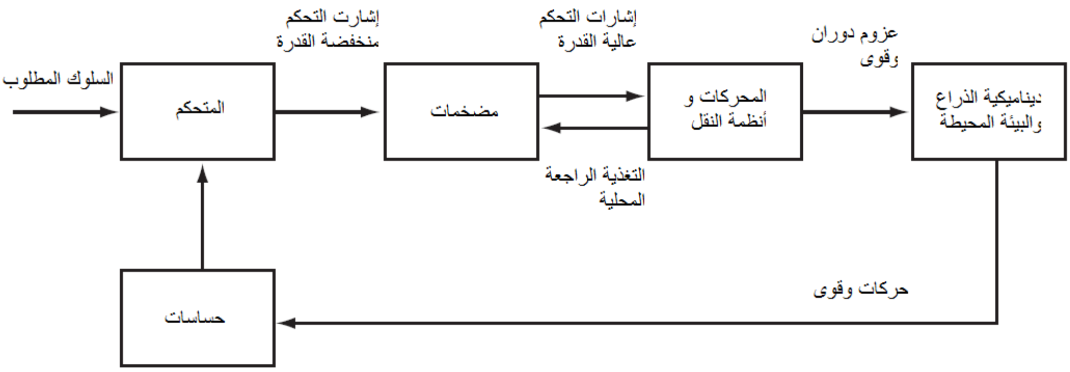
10.1. لمحة عامة عن أنظمة التحكم:

الشكل ((a) 10.1) يظهر مخططاً صندوقياً لنظام التحكم القياسي. إن المتحكم Controller عادة ما يكون عبارة عن جهاز حاسوبي أو متحكم صغري Microcontroller. وتكون الحساسات المستخدمة بشكل عام مصنفة إلى مقاييس الجهد Potentiometers، وعدادات لمعرفة عدد الدورات Encoders، وحساسات من أجل قياس زاوية الدوران (الموقع) Resolvers، ومقاييس سرعة الدوران (التاكومتر) Tachometer من أجل تحسس السرعة عند المفاصل، ومقاييس الانفعالات، وحساسات القوة والعزم، و(أو) حساسات القوة - العزم المتعددة المحاور والتي تتوضع غالباً في منطقة المعصم بين نهاية الذراع الروبوتي والنهاية العاملة للروبوت. تقوم أنظمة التحكم بمعاينة الحساسات وتحديث إشاراتها التحكمية وإرسالها إلى العناصر المحركة بمعدل يتراوح من مئات إلى بضعة آلاف هيرتز Hertz - Hz. وفي معظم التطبيقات الروبوتية، تعد المعدلات العالية لتحديث إشارات التحكم ذات فائدة محدودة، ويتم ربطها بمقيدات زمنية تتعلق بالمميزات الديناميكية للروبوت وبالبيئة المحيطة به. وفي دراستنا لمتحكمات الروبوت في هذا الفصل سوف نقوم بمعالجة وتحليل المتحكمات على أنها تقوم بمهمتها بزمن مستمر (ليس بزمن متقطع، أي أن معاينة الإشارة تتم بشكل مستمر مع الزمن بدون وجود فواصل زمنية).

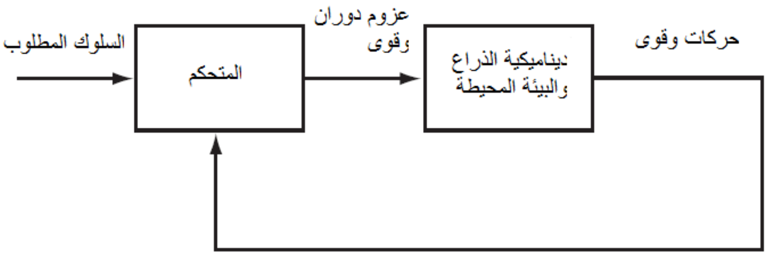
وحيث أن مقاييس سرعات الدوران يمكن أن تستخدم لتحسس السرعات بشكل مباشر، فإن المنهجية الشائعة عند استخدام هذه المقاييس هي استخدام فلتر رقمي Digital Filter من أجل التفريق رقمياً بين إشارات الموقع (الدوران) عند الخطوات الزمنية المتعاقبة.

ويمكن أن تكون العناصر المحركة في أنظمة التحكم عبارة عن محركات كهربائية تعمل بالتيار المستمر Direct Current - DC، أو محركات كهربائية تعمل بالتيار المتناوب Alternative

Current - AC، أو محركات هيدروليكية Hydraulic، أو محركات نيوناتيكية (تعمل بالهواء المضغوط) Pneumatic، وإضافة إلى العديد من الأنواع الأخرى من المحركات. وعادة ما يتم استخدام المسننات Gears والعديد من أنظمة النقل الأخرى من أجل تقليل السرعة وزيادة قوة وعزم المحرك. وتكون المحركات الكهربائية مقرونة بمضخمات للقدرة Power Amplifier والتي تقوم بتحويل الإشارات من نظام التحكم إلى تيارات ذات شدة عالية من أجل قيادة المحرك. أنظمة التغذية الراجعة المحلية Local Feedback لتيار المحرك أو عزم الدوران للمفصل يمكن أن تستخدم في حلقات التحكم الداخلي من أجل تحقيق القوى وعزوم الدوران المطلوبة.



(a)



(b)

الشكل 10.1: (a) نظام التحكم بالروبوت القياسي. حلقة التحكم الداخلية يمكن أن تستخدم لمساعدة المضخم والمحرك من أجل تحقيق القوة وعزم الدوران المطلوبين. فعلى سبيل المثال، فإن المضخم في محركات التيار المستمر DC في طور التحكم بعزم الدروان يمكن أن يتحسس للتيار الفعلي المتدفق والمار عبر المحرك ومن ثم يقوم بالتحكم به محلياً من أجل الحصول على التيار المطلوب بصورة أفضل، وذلك بسبب كون التيار يتناسب مع عزم الدوران المتولد عن المحرك. (b) النموذج المبسط مع فرضية كون مثالية الحساسات، وكتلة المتحكم الذي يقوم بتوليد القوى وعزوم الدوران بصورة مباشرة. وهذا المخطط يظهر السلوك المثالي للمضخم والمحرك في الشكل (a).

ولكل مفصل في الروبوت، سنقوم بدمج مجموعة (مضخم القدرة والعنصر المحرك ونظام النقل) مع بعضها البعض ونتعامل معها على أنها محول يقوم بتحويل إشارات التحكم المنخفضة القدرة إلى قوى وعزوم دوران. وهذا الافتراض، جنباً إلى جنب مع فرضية مثالية الحساسات، سيسمح لنا بتبسيط المخطط الصندوقي لنظام التحكم إلى المخطط المبين في الشكل (10.1 (b))، حيث يقوم المتحكم في هذه الحالة بتوليد القوى وعزوم الدوران بشكل مباشر.

إن أنظمة الروبوتات الحقيقية تخضع لتأثير المرونة والاهتزازات في مفاصلها ووصلاتها، إضافة إلى ما يسمى بالباكلاش Backlash وذلك في أنظمة النقل التي تعتمد على المسننات. كما أنها تخضع لحدود إشباع المحرك Actuator Saturation Limits، وحدود دقة الحساسات. وتعد هذه القضايا مهمة في التصميم والتحكم بالروبوتات، ولكنها خارج نطاق بحثنا في هذا الفصل.

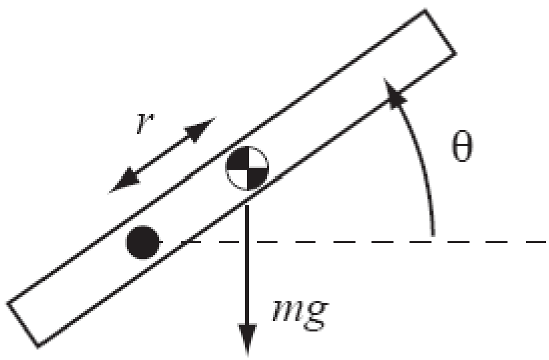
10.2. التحكم بالحركة Motion Control:

بشكل عام، تعتبر مهمة التحكم بالحركة عبارة عن كيفية جعل النهاية العاملة للروبوت تتبع المسار المطلوب منها. وكما نعلم، فإنه إذا كان الروبوت فائضاً حركياً، فسيكون لدينا أكثر من مجموعة واحدة للحلول لمتغيرات المفاصل والتي تجعل النهاية العاملة للروبوت تتبع المسار المحدد. وسوف نبدأ بدراسة التحكم بالحركة مفترضين أن التمثيل الكينماتيكي الخلفي للروبوت والتمثيل التفاضلي الخلفي له يخضعان فقط لجملة وحيدة فقط من الحلول لتمغيرات المفاصل على شكل تابع بالنسبة للزمن. والهدف من هذه الدراسة هو معرفة كيفية بناء المتحكمات التي تقود الروبوت بحيث يتبع مساراً محدداً في فضاء المفاصل. وستتم دراسة الحالة التي يكون فيه المسار معبراً عنه في فضاء المهمة في الفقرة (10.2.3).

وهذه الأفكار يمكن توضيحها بصورة جيدة باستخدام نموذج الروبوت المكون من مفصل واحد، ولذلك سوف نبدأ بهذا الروبوت ثم نقوم بتعميم الدراسة على الروبوتات المتعددة المفاصل.

10.2.1. التحكم بحركة روبوت ذي مفصل واحد:

لنفترض أن لدينا محركاً واحداً بحيث يكون مربوطاً مع وصلة واحدة كما في الشكل (10.2). ولتكن τ هي عبارة عن عزم الدوران للمحرك، و θ هي زاوية الوصلة. وبالتالي فإن التمثيل الديناميكي لهذه الوصلة يمكن كتابته بالشكل:



الشكل 10.2: روبوت ذو مفصل واحد يدور في حقل الجاذبية الأرضية.

$$\tau = M\ddot{\theta} + mgr\cos\theta \qquad (10.1)$$

حيث M تمثل عطالة الوصلة حول محور الدوران، و m هي كتلة الوصلة، و r هي المسافة من محور الدوران حتى مركز الكتلة للوصلة، و $g \geq 0$ هي عبارة عن تسارع الجاذبية الأرضية.

وفقاً للتمثيل الديناميكي المعبر عنه بالمعادلة (10.1)، فمن الملاحظ أنه ليس هناك أي تبديد للطاقة: فإذا تم تدوير الوصلة ومن ثم جعلت $\tau = 0$، فإن هذه الوصلة سوف تدور للأبد. وهذا الأمر ليس واقعياً بالطبع، حيث يوجد هناك تأثير للاحتكاك Friction في الأنواع المختلفة من المحامل (Bearings) والمسننات وفي أنظمة نقل الحركة بشكل عام. ونمذجة تأثير الاحتكاك هو بحد ذاته مجال بحث مفتوح ومعقد، ولكن يوجد هناك نموذج بسيط من أجل تمثيل تأثير الاحتكاك الدوراني، وهو الاحتكاك اللزج Viscous Friction والذي يعطى بالعلاقة:

$$\tau_{\text{fric}} = b\dot{\theta} \qquad (10.2)$$

حيث $b > 0$. وبإضافة عزم الاحتكاك الآن فإن التمثيل الديناميكي السابق يصبح بالشكل:

$$\tau = M\ddot{\theta} + mgr\cos\theta + b\dot{\theta} \qquad (10.3)$$

والذي يمكن كتابته بشكل مختصر أكثر كالتالي:

$$\tau = M\ddot{\theta} + h\left(\theta, \dot{\theta}\right) \qquad (10.4)$$

حيث h تشمل كافة الحدود المتعلقة بالحالة الحركية، ولا تشمل الحدود المتعلقة بالحالة التحريكية (أي لا تتعلق بالتسارع).

وبصورة تطبيقية لهذا التمثيل، فإنه يمكن أن نجعل كل من المعطيات التالية $M = 0.5\ \mathrm{kgm^2}$، و $m = 1\ \mathrm{kg}$، و $r = 0.1\ \mathrm{m}$، و $b = 0.1\ \mathrm{Nms/rad}$. وفي بعض الأمثلة، تتحرك الوصلة في المستوي الأفقي، وبالتالي $g = 0$. وفي أمثلة أخرى، فإن الوصلة يمكن أن تتحرك في المستوي الشاقولي، وبالتالي $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$.

10.2.1.1. التحكم عن طريق التغذية الراجعة - المتحكم PID:

إن الخوارزمية الأكثر سيوعاً في عملية التحكم عن طريق التغذية الراجعة هي خوارزمية التحكم باستخدام PID (Proportional - Integral - Derivative) أي التحكم (التناسبي - التكاملي - التفاضلي). وبتعريف الخطأ الحاصل بين الزاوية المطلوبة θ_d والزاوية الفعلية θ كالتالي:

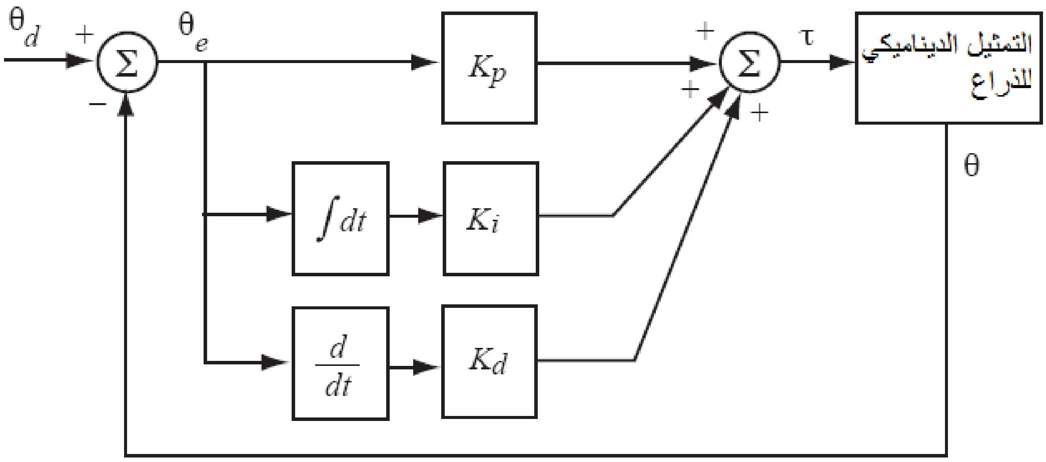
$$\theta_e = \theta_d - \theta \qquad (10.5)$$

فإن المتحكم PID ببساطة هو:

$$\tau = K_p\theta_e + K_i\int \theta_e(t)dt + K_d\dot{\theta} \qquad (10.6)$$

حيث K_p وK_i و K_d تمثل قيم أرباح التحكم Control Gains وهي قيم غير سالبة. إن الربح التناسبي Proportional Gain، ويرمز له بـ K_p، يقوم بدور نابض وهمي والذي يحاول

تقليص الخطأ في الموقع $\theta_d - \theta$، والربح التفاضلي Derivative Gain، ويرمز له بـ K_d، يمثل دور المخمد Damper الذي يحاول تقليص الخطأ في السرعة $\dot{\theta}_d - \dot{\theta}$. والربح التكاملي Integral Gain، ويرمز له بـ K_i، يستخدم من أجل إلغاء أخطاء الحالة المستقرة Steady - State للنظام وذلك عندما يكون المفصل في وضع الراحة Rest (والمقصود بموضع الراحة أي الوضع الذي تنعدم فيه الحركة حيث يكون كل من السرعة والتسارع معدومين). انظر المخطط الصندوقي الموضح بالشكل (10.3).



الشكل 10.3: المخطط الصندوقي المعبرعن المتحكم PID.

في الوقت الراهن لنفترض الحالة حيث يكون $K_i = 0$. وعند ذلك فإن المتحكم يتحول من النمط PID إلى النمط PD. (وبنفس الطريقة يمكننا أن نعرف المتحكمات PI و P و I و D وذلك بجعل الأرباح الأخرى مساوية للصفر. والمتحكمات PD و PI هي المتحكمات الأكثر انتشاراً والمشتقة من المتحكم PID). ولنفترض أيضاً أن الروبوت يتحرك في المستوي الأفقي، وبالتالي فإن $g = 0$. وبتطبيق قانون التحكم المتمثل بالمعادلة (10.6) على المعادلة الديناميكية (10.3)، فإننا نجد:

$$M\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = K_p(\theta_d - \theta) + K_d\big(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}\big) \qquad (10.7)$$

فإذا كان الهدف هو الوصول لحالة الاستقرار عند قمية ثابتة θ_d، بالتالي فإن السرعة والتسارع عند هذه الزاوية ستكون مساوية للصفر. وهذا ما يسمى بالتحكم باستخدام الضبط النقطي Setpoint Control. حيث نجد أن:

$$\theta_e = \theta_d - \theta \ , \qquad \dot{\theta}_e = -\dot{\theta} \ , \qquad \ddot{\theta}_e = -\ddot{\theta}$$

وبالتالي فإن المعادلة (10.7) يمكن أن تكتب بشكل يصف الخطأ الديناميكي في المخمد المكون من جملة الكتلة - النابض:

$$M\ddot{\theta}_e + (b + K_d)\dot{\theta}_e + K_p\theta_e = 0 \qquad (10.8)$$

الاستقرار Stability: إن الأخطاء الديناميكية، كالمعبر عنها بالمعادلة (10.8)، هي موضوع مهم عند دراسة أنظمة التحكم. وإن متطلبات نظام التحكم تقتضي على الأقل أن تكون الأخطاء الديناميكية ثابتة أو مستقرة، أي أن الأخطاء الابتدائية يجب أن تسعى إلى الصفر بشكل أسي مع الزمن. وتكون المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة العادية من الشكل:

$$a_n\theta_e^{(n)} + a_{n-1}\theta_e^{(n-1)} + \cdots + a_2\ddot{\theta}_e + a_1\dot{\theta}_e + a_0\theta_e = 0$$

مستقرة إذا وفقط إذا كانت جميع الجذور المعقدة $s_1,\ldots,s_n$ لمعادلتها التشخيصية:

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

لها مركبات حقيقية أقل من الصفر، أي $Re(s_i) < 0$ من أجل جميع $i = 1,\ldots,n$. وبغض النظر عن درجة المعادلة الديناميكية فإن هناك شرط ضروري من أجل تحقيق الاستقرار، وهو أن يكون $a_i > 0$. وهذا الشرط هو شرط كافٍ من أجل المعادلات الديناميكية من الدرجة الثانية كالمعادلة (10.8). ومن أجل المعادلات الديناميكية من الدرجة الثالثة، فمن المطلوب أيضاً أن يتحقق $a_2a_1 > a_3a_0$.

المتحكم PD ومعادلة الخطأ الديناميكي من الدرجة الثانية: لدراسة معادلة الخطأ الديناميكي من الدرجة الثانية، كالمعادلة (10.8)، بصورة أكثر انضباطاً، فإننا سنفترض أن الاستقرار محقق وسنعيد كتابة المعادلة بشكلها القياسي ذي الدرجة الثانية:

$$\ddot{\theta}_e + \frac{b+K_d}{M}\dot{\theta}_e + \frac{K_p}{M}\theta_e = 0 \;\rightarrow\; \ddot{\theta}_e + 2\zeta\omega_n\dot{\theta}_e + \omega_n^2\theta_e = 0 \qquad (10.9)$$

حيث نسبة التخميد ζ Damping Ratio والتواتر الطبيعي ω_n Natural Frequency هما:

$$\zeta = \frac{b+K_d}{2\sqrt{K_pM}} \;, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K_p}{M}}$$

وبالتالي فإن المعادلة التشخيصية للمعادلة (10.9) هي:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \qquad (10.10)$$

ويكون جذراها المعقدان:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

إن هناك ثلاثة أنواع من الحلول للمعادلة التفاضلية (10.9)، وهذه الحلول تعتمد على كون الجذرين $s_{1,2}$ حقيقيين وغير متساويين ($\zeta > 1$)، أو حقيقيين ومتساويين ($\zeta = 1$)، أو كونهما جذرين معقدين ($\zeta < 1$):

- التخامد الفائض Overdamped: وذلك عندما يكون $\zeta > 1$. وبالتالي فإن الجذور $s_{1,2}$ تكون حقيقية ومختلفة، والحل يكون بالشكل:

$$\theta_e(t) = c_1 \exp(s_1 t) + c_2 \exp(s_2 t)$$

حيث كل من c1 و c2 يعتمدان على الشروط الابتدائية. وستكون الاستجابة مساوية لمجموع حدي التخامد الأسّيان، مع الثابتين الزمنيين $\tau_{1,2} = -1/s_{1,2}$، حيث الثابت الزمني هو الزمن الذي يتطلبه الحد الحد الأسي لكي يتخامد بنسبة 37% من القيمة الأصلية. وثابت الزمن "الأبطأ" في الحل يعطى من خلال الجذر السالب الأصغر، أي:

$$s_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- التخامد الحرج (أو الحدي) Critically Damped: وذلك عندما يكون $\zeta = 1$. والجذران سيكونان في هذه الحالة $s_{1,2} = -\zeta\omega_n$، أي أنهما متساويان حقيقيان، والحل بالتالي يكون:

$$\theta_e(t) = \exp(-\zeta\omega_n t)\,(c_1 + c_2 t)$$

أي أن حد التخامد الأسي مضروب بتابع خطي بالنسبة للزمن. والثابت الزمني لحد التخامد الأسي هو $\tau = 1/(\zeta\omega_n)$.

- التخامد الناقص Underdamped: وذلك عندما يكون $\zeta < 1$. وبالتالي فإن الجذرين $s_{1,2}$ هما جذران معقدان يعطيان بالشكل:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_d \;,\;\; \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

حيث ω_d هي عبارة عن التواتر المتخامد الطبيعي Damped Natural Frequency. والحل يكون:

$$\theta_e(t) = \exp(-\zeta\omega_n t)\,(c_1 \cos(\omega_d t) + c_2 \sin(\omega_d t))$$

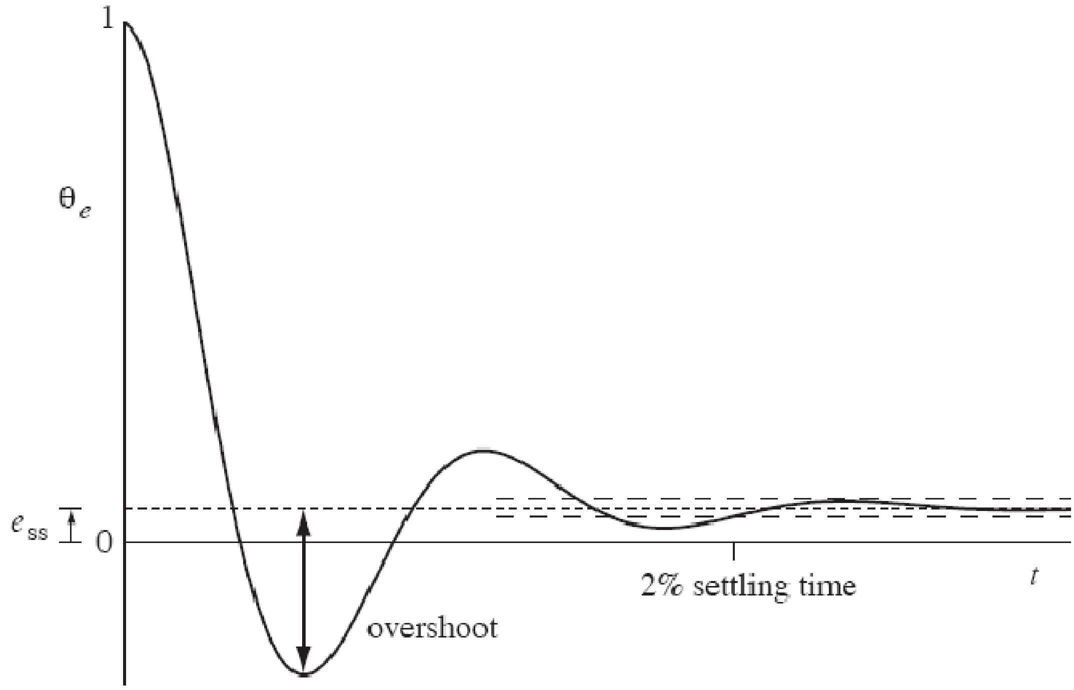
وهذا يعني أن حد التخامد الأسي مضروب بحد جيبي Sinusoid.

ولمعرفة كيفية تطبيق هذه الحلول، لنفترض أن الوصلة هي في الأصل في وضع الراحة عند الزاوية $\theta = 0$. وعند الزمن $t = 0$، تغير الموقع المطلوب فجأة من $\theta_d = 0$ إلى $\theta_d = 1$. وهذا ما يسمى بمُدخل الخطوة Step Input والحركة النظام الناتجة عن ذلك $\theta(t)$ تسمى باستجابة النظام Step Response. واهتمامنا الآن هو تحديد خطأ الاستجابة $\theta_e(t)$. ويمكن إيجاد الحلول لـ $c_{1,2}$ في الحلول الموافقة وذلك بجعل $\theta_e(0) = 1$ (أي أن الخطأ أصبح مساوياً للواحد مباشرة) و $\dot{\theta}_e(0) = 0$ (كل من $\dot{\theta}_d(0)$ و $\dot{\theta}(0)$ مساويان للصفر).

ويمكن توصيف خطأ الاستجابة من خلال ما يسمى بالاستجابة العابرة Transient Response واستجابة الحالة المستقرة Steady - State Response (الشكل (10.4)). إن استجابة الحالة المستقرة يمكن تشخيصها من خلال ما يعرف بخطأ الحالة المستقرة Steady - State Error والذي يشار له بالرمز e_{ss}، وهو الخطأ الناتج عن مقاربة التابع $\theta_e(t)$ عندما $t \to \infty$. ومن أجل وصلة تعمل في حقل جاذبية معدوم (أو وصلة تعمل في المستوي الأفقي) مع وجود متحكم PD

مستقر، فإن $e_{ss} = 0$. ويمكن تشخيص الاستجابة العابرة من خلال ما يسمى بالتجاوز أو التخطي Overshoot عندما يصبح مساوياً لـ 2% من زمن الاستقرار Settling Time. والزمن الموافق لمقدار الاستقرار 2% هو أول زمن T يكون فيه $|\theta_e(t) - e_{ss}| \leq 0.02(1 - e_{ss})$ من أجل أي زمن $t \geq T$، وهو يساوي بشكل تقريبي لـ 4τ، حيث τ هو ثابت الزمن الأبطأ في الحل. ويمكن تعريف التجاوز أو التخطي بالشكل:

$$\text{Overshoot} = \left|\frac{\theta_{e,min} - e_{ss}}{1 - e_{ss}}\right| \times 100\%$$



الشكل 10.4: خطأ الاستجابة لمُدخل الخطوة من أجل التخميد الناقص لنظام ديناميكي من الدرجة الثانية، ويوضح الشكل خطأ الحالة المستقرة e_{ss}، والتجاوز أو التخطي، والزمن الموافق للاستقرار بنسبة 2%.

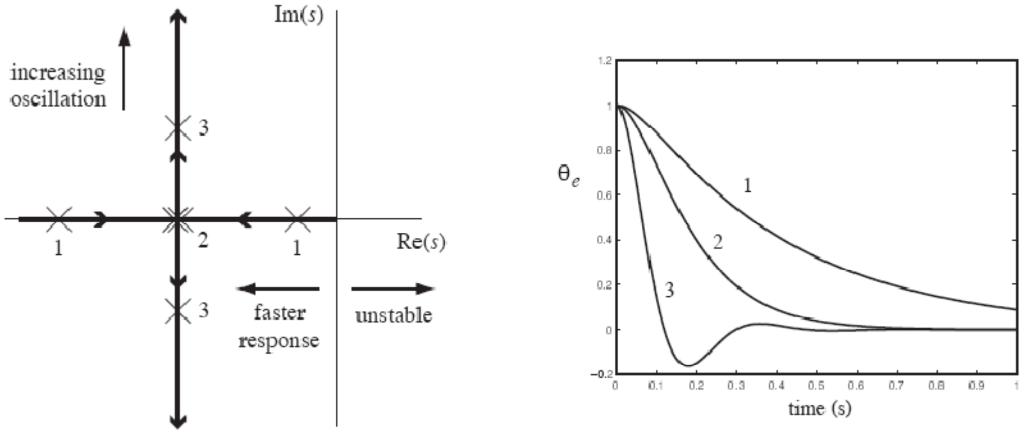
حيث $\theta_{e,min}$ هي عبارة عن أقل قيمة موجبة يمكن أن يبلغها الخطأ. ويمكن حساب التجاوز أو التخطي من خلال العلاقة:

$$\text{Overshoot} = \exp\left(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right) \times 100\% \quad , \quad 0 \leq \zeta < 1$$

والاستجابة العابرة الجيدة تتميز بانخفاض زمن الاستقرار أو بانعدام التجاوز أو التخطي.

الشكل (10.5) يظهر العلاقة بين موقع جذور المعادلة (10.10) بطبيعة الاستجابة العابرة. فعندما يكون K_d ثابتاً و K_p مقداراً صغيراً فإن $\zeta > 1$، ويكون لدينا حالة تخميد فائض للنظام، وتكون الاستجابة بطيئة بسبب الجذر "البطيء" للحل. وعند زيادة مقدار K_p، فإن نسبة التخميد تنخفض، وسيكون لدينا حالة تخميد حرج للنظام $(\zeta = 1)$ عندما $K_p = (b + K_d)^2/(4M)$، وسيكون الجذران منطبقان على المحور الحقيقي السالب. وهذه الحالة تعبر عن الاستجابة

السريعة نسبياً ولا يكون في هذه الحالة وجود لأي تخطي أو تجاوز. وبالاستمرار في زيادة K_p، فإن ζ تصبح أقل من الواحد، والجذران يبتعدان عن المحور الحقيقي السالب، وسنشهد في هذه الحالة ظهوراً للتخطي أو للتجاوز والذبذبة Oscillation في عملية الاستجابة. ونلاحظ أن الزمن الذي يحدث عنده الاستقرار Settling Time لا يتأثر بزيادة K_p وذلك لأن المقدار $\zeta\omega_n$ لا يتغير.



الشكل 10.5: (إلى اليسار) الجذور المعقدة للمعادلة التشخيصية للمفصل المتحكم به باستخدام المتحكم PD وذلك من أجل قيمة ثابتة لـ $K_d = 10$ Nms/rad وبحيث تزداد قيمة K_p بدءاً من الصفر. وهذا يعرف عادة بمخطط المحل الهندسي للجذور Root Locus Plot. (إلى اليمين) استجابة النظام للخطأ الابتدائي $\theta_e = 1$ و $\dot{\theta}_e = 0$، حيث تظهر حالة التخميد الفائض ($\zeta = 1.5$، والجذور عند "1")، وحالة التخميد الحرج ($\zeta = 1$، والجذور عند "2")، وحالة التخميد الناقص ($\zeta = 0.5$، والجذور عند "3").

الحدود التطبيقية لأرباح التحكم بالتغذية الراجعة: وفقاً للنموذج البسيط الذي قمنا بدراسته، فإنه يمكننا زيادة كل من K_p و K_d دون وجود أي حدود، وذلك من أجل جعل المركبات الحقيقية للجذور سالبة أكثر وأكثر، وبالتالي الوصول لحالة عشوائية سريعة لاستجابة النظام. ولكن عند التطبيق العملي، فإننا نجد أن قيم الأرباح الكبيرة ستؤدي إلى حالة إشباع للمحرك Saturation، وإلى تغيرات سريعة في عزم الدوران (ارتجاج Chattering)، وإلى اهتزازات في هيكل النظام بسبب أننا لم ندخل تأثير المرونة Flexibility في عملية النمذجة. ولهذا فإننا نجد أن هناك حدوداً تطبيقية تقيد قيم الأرباح في عملية التحكم.

المتحكم PID ومعادلة الخطأ الديناميكي من الدرجة الثالثة: الآن سنقوم بدراسة حالة التحكم بالضبط النقطي وذلك عندما تتحرك الوصلة في المستوي الشاقولي، أي أن $g > 0$. ومن قانون المتحكم PD، فإن معادلة النظام يمكن كتابتها بالشكل:

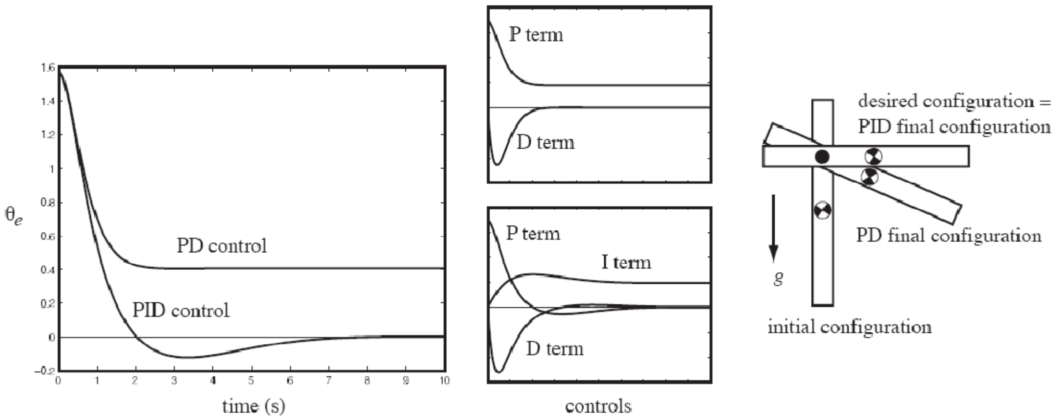
$$M\ddot{\theta}_e + (b + K_d)\dot{\theta}_e + K_p\theta_e = mgr\cos\theta \qquad (10.11)$$

وفي هذه الحالة، نلاحظ أن النظام يذهب إلى وضعية الراحة عندما تكون الهيئة الموافقة لـ θ تحقق:

$$K_p\theta_e = mgr\cos\theta$$

أي أن الخطأ النهائي θ_e ليس صفراً عندما $\theta_d \neq \pm \pi/2$، ولكن وفقاً لقانون المتحكم PD فإنه يتم توليد عزم دوران في وضعية الراحة فقط في حال كون $\theta_e \neq 0$. وبإمكاننا جعل خطأ الحالة المستقرة هذا صغيراً عن طريق زيادة الربح K_p، ولكن كما أسلفنا سابقاً، فإن هناك حدوداً تطبيقية لهذا الأمر.

وبهدف إلغاء خطأ الحالة الستقرة، فإننا سنعود للمتحكم PID وذلك بجعل $K_i > 0$. وهذا سيسمح بوجود عزم دوران لا يساوي الصفر في الحالة المستقرة حتى عند وجود خطأ الوضعية الصفرية، وفقط حد الخطأ المُكامل يجب أن يكون مساوياً للصفر. الشكل (10.6) يظهر إضافة الحد التكاملي للمتحكم.



الشكل (10.6): (إلى اليسار) الشكل يظهر لنا مسار تتبع الأخطاء للمتحكم PD عندما $K_d = 2$ Nms/rad وعندما $K_p = 2.205$ Nm/rad وذلك في حالة التخميد الحرج. ويظهر مسار تتبع الأخطاء للمتحكم PID بنفس أرباح المتحكم PD بالإضافة لكون $K_i = 1$ Nm/(rad.s). الذراع يبدأ بالعمل عند $\theta(0) = -\pi/2$، حيث تكون $\dot{\theta}(0) = 0$، وحيث يكون وضع الاستقرار المطلوب هو $\theta_d = 0$، حيث $\dot{\theta}_d = 0$. (في المنتصف) يظهر الإسهامات الفردية لكل حد في قانون المتحكم PD وقانون التحكم PID. (إلى اليمين) يظهر الهيئة الابتدائية والنهائية للذراع.

ولمعرفة كيفية عمل ذلك، فسنكتب معادلة الخطأ الديناميكي في حالة التحكم بالضبط النقطي كالتالي:

$$M\ddot{\theta}_e + (b + K_d)\dot{\theta}_e + K_p\theta_e + K_i\int \theta_e(t)dt = \tau_{dist} \qquad (10.12)$$

حيث τ_{dist} هو الاضطراب في عزم الدوران الناجم عن حد الجاذبية الأرضية $mgr.\cos\theta$. وباشتقاق طرفي المعادلة، فإننا نحصل على معادلة الخطا الديناميكي من الدرجة الثالثة:

$$M\dddot{\theta}_e + (b + K_d)\ddot{\theta}_e + K_p\dot{\theta}_e + K_i\theta_e = \dot{\tau}_{dist} \qquad (10.13)$$

فإذا كان τ_{dist} ثابتاً، فإن الجانب الأيمن من المعادلة (10.13) سيكون صفراً. وإذا كان المتحكم PID مستقراً، فإن المعادلة (10.13) تبين أن θ_e يسعى (يتقارب) إلى الصفر. (وفي حال كون الاضطراب في العزم الناتج عن تأثير الجاذبية الأرضية غير ثابتاً عند دوران الوصلة، فإنه

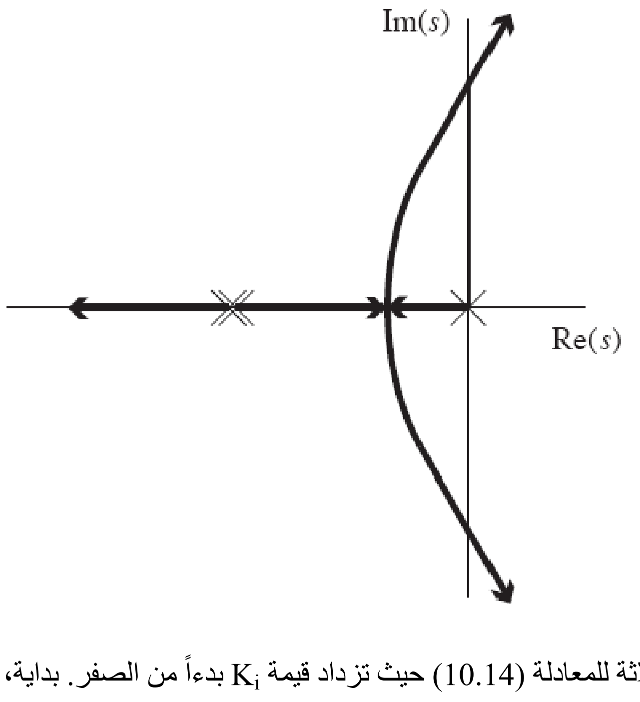
سوف يتقارب إلى قيمة ثابتة بسبب تقارب $\dot{\theta}$ إلى الصفر، ولذلك فإن النظام يتقارب إلى حالة التوازن.

إن التحكم المتكامل (عند استخدام الحد التكاملي) مفيد من أجل التخلص من خطأ الحالة المستقرة عند التحكم باستخدام الضبط النقطي، ولكن يمكن أن يؤثر سلباً على الاستجابة العابرة. وهذا سببه أن التحكم المتكامل يستجيب بشكل أساسي للمعلومات المتأخرة (قد يستغرق النظام قدراً من الزمن من أجل الاستجابة للخطأ حتى تتم عملية المكاملة). ومن المعروف في نظرية التحكم أن التغذية الراجعة المتأخرة يمكن أن تسبب حالة من عدم الاستقرار. ولرؤية ذلك، لتكن المعادلة التشخيصية للمعادلة (10.13) عندما يكون τ_{dist} ثابتاً هي:

$$Ms^3 + (b + K_d)s^2 + K_p s + K_i = 0 \qquad (10.14)$$

وحتى تكون جميع الجذور تمتلك قيماً سالبة لجزئها الحقيقي، يجب أن يكون $b + K_d > 0$ وأن يكون $K_p > 0$ كما في السابق، ولكن هناك أيضاً حد آخر للربح الجديد K_i (الشكل (10.7)):

$$0 \leq K_i \leq \frac{(b + K_d)K_p}{M}$$



الشكل 10.7: الجذور الثلاثة للمعادلة (10.14) حيث تزداد قيمة K_i بدءاً من الصفر. بداية، يتم اختيار أرباح المتحكم PD وهما K_p و K_d، بحيث يكون نوع التخميد هو التخميد الحرج، وهذه ما يجعل الجذرين للمتحكم PD ينطبقان على المحور الحقيقي السالب. وبإضافة ربح صغير جداً $K_i > 0$ سيجعل الجذر الثالث للمتحكم PID ينطبق على المبدأ. وبزيادة مقدار K_i، فإن واحداً من الجذرين المنطبقين سوف يتحرك نحو اليسار على المحور الحقيقي السالب، بينما الجذران الآخران سوف يتحركان باتجاه بعضهما بحيث يبتعدان عن المحور الحقيقي، ويتحركان في نصف المستوي الأيمن عندما $K_i = (b+K_d)K_p/M$. وسيكون النظام غير مستقراً عند القيم الكبيرة لـ K_i.

لذلك فإن استراتيجية التصميم المنطقية للمتحكم تقتضي أن نختار كلاً من K_p و K_d من أجل تحقيق استجابة عابرة جيدة، ومن ثم نقوم باختيار K_i بحيث يكون مقداره صغيراً ولا يؤثر بالتالي سلباً على حالة الاستقرار. وفي المثال الموضح بالشكل (10.6)، فإن القيمة الكبيرة نسبياً لـ K_i ستسيء بشكل ملحوظ لشكل الاستجابة العابرة، بحيث تظهر لنا حالة تخطي بالغة. وفي التطبيقات العملية، تكون $K_i = 0$ في العديد من أنظمة التحكم بالروبوتات.

السودو كود Pseudocode لخوارزمية المتحكم PID موضحة بالشكل (10.8).

```
time = 0                           // dt = cycle time
eint = 0                           // error integral
qprev = senseAngle                 // initial joint angle q
loop
  [qd,qdotd] = trajectory(time) // from trajectory generator

  q = senseAngle                   // sense actual joint angle
  qdot = (q - qprev)/dt            // simple velocity calculation
  qprev = q

  e = qd - q
  edot = qdotd - qdot
  eint = eint + e*dt

  tau = Kp*e + Kd*edot + Ki*eint
  commandTorque(tau)

  time = time + dt
end loop
```

الشكل 10.8: السودو كود للمتحكم PID.

وبما أن تحليلنا ودراستنا إلى الآن تركزت حول التحكم باستخدام الضبط النقطي، فإنه يمكن استخدام المتحكم PID وتطبيقه بشكل مثالي من أجل مهمات تتبع المسارات، حيث $\dot{\theta}_d \neq 0$. وفي هذه الحالة، فإن استخدام الحد التكاملي لن يقوم بإلغاء خطأ تتبع المسارات.

10.2.1.2. التحكم عن طريق التغذية الأمامية:

هناك استراتيجية أخرى تستخدم من أجل تتبع المسارات، وتعتمد هذه الاستراتيجية على استخدام نموذج للتمثيل الديناميكي للروبوت من أجل توليد عزوم الدوران بصورة استباقية عوضاً عن انتظار حدوث الأخطاء. ليكن نموذج التمثيل الديناميكي المستخدم في التحكم من الشكل:

$$\tau = \hat{M}(\theta)\ddot{\theta} + \hat{h}(\theta, \dot{\theta}) \qquad (10.15)$$

حيث يكون النموذج مثالياً عندما يكون:

$$\hat{M}(\theta) = M(\theta)\ , \ \ \hat{h}(\theta,\dot{\theta}) = h(\theta,\dot{\theta})$$

وهنا نلاحظ أن نموذج مصفوفة العطالة مكتوب كتابع للهيئة θ. في حين أن العطالة من أجل الروبوت أحادي المفصل البسيط ليست تابعة للهيئة. الكتابة بهذه الطريقة سيسمح لنا بإعادة استخدام المعادلة (10.15) عند دراسة الأنظمة متعدد المفاصل فيما بعد.

فإذا كان معلوماً لدينا كل من θ_d و $\dot{\theta}_d$ و $\ddot{\theta}_d$ من خلال مولد المسارات، فإن الأمر المتعلق بتحديد عزم الدوران يحسب من خلال المعادلة:

$$\tau = \hat{M}(\theta_d)\ddot{\theta}_d + \hat{h}(\theta_d,\dot{\theta}_d) \qquad (10.16)$$

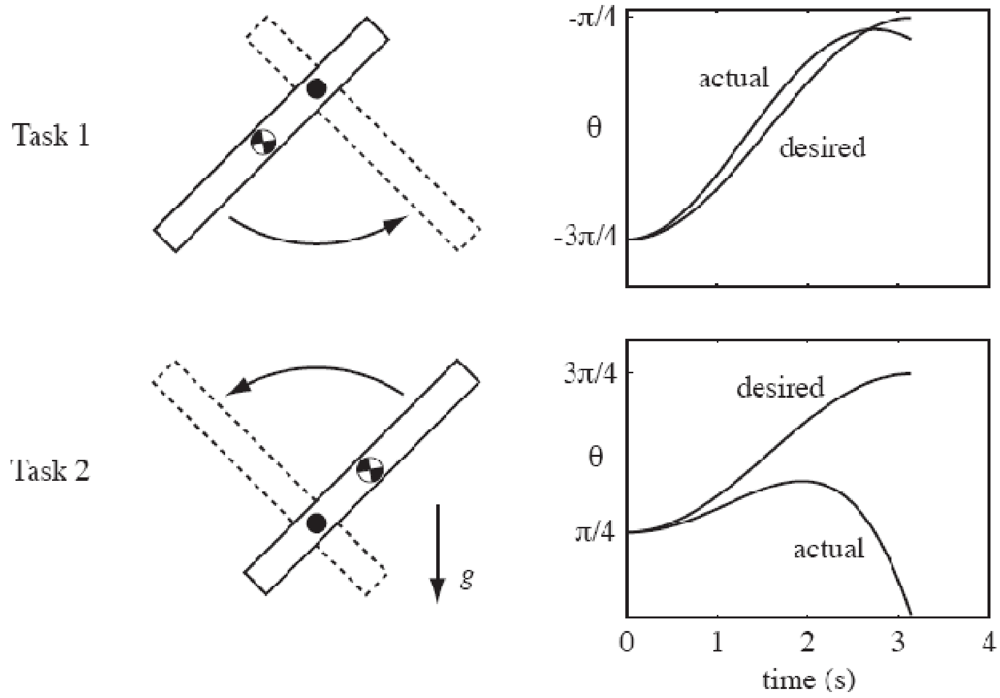
إذا كان النموذج المستخدم للتمثيل الديناميكي للروبوت دقيقاً، فإنه لن تتنشأ لدينا أية أخطاء في الحالة الابتدائية، وبالتالي فإن الروبوت سيقوم بشكل دقيق باتباع المسار المطلوب منه. وهذا ما يسمى بالتحكم عن طريق التغذية الأمامية Feedforward Control. وهنا لا يتم استخدام التغذية الراجعة في عملية التحكم.

السودو كود الذي يتم تنفيذه في حالة التحكم عن طريق التغذية الأمامية مبين في الشكل (10.9).

```
time = 0                                    // dt = cycle time
loop
  [qd,qdotd,qdotdotd] = trajectory(time)    // from trajectory generator
  tau = Mhat(qd)*qdotdotd + hhat(qd,qdotd) // calculate dynamics
  commandTorque(tau)
  time = time + dt
end loop
```

الشكل 10.9: السودو كود المستخدم في التحكم عن طريق التغذية الراجعة.

الشكل (10.10) يظهر مثالين لتتبع المسار لوصلة تعمل تحت تأثير الجاذبية الأرضية. وهنا يكون النموذج المستخدم في التمثيل الديناميكي صحيحاً باستثناء كون $\hat{r} = 0.08$ m حيث يفترض أن تكون $r = 1$ m. في المهمة 1، يبقى الخطأ صغيراً، وذلك بسبب كون الجاذبية الأرضية (الذي لم تتم نمذجتها) تقوم بالتأثير بتوليد قوة وكأنها نابض حتى الزاوية $\theta = -\pi/2$، حيث تقوم بزيادة تسارع الروبوت عند البداية ثم تقوم بإبطائه عند النهاية. في المهمة 2، تأثير الجاذبية غير المنمذجة يكون معاكساً لاتجاه الحركة المطلوب، مما يؤدي إلى نشوء خطأ كبير في عملية التتبع. وبسبب تواجد أخطاء النمذجة بشكل دائم، فإن التحكم عن طريق التغذية الأمامية يستخدم دائماً بحيث يكون مقترناً مع التحكم عن طريق التغذية الراجعة، كما سنرى لاحقاً.



الشكل 10.10: نتائج التحكم عن طريق التغذية الأمامية باستخدام نموذج ديناميكي غير صحيح: $\hat{r} = 0.08$ m ولكن $r = 1$ m. المسار المطلوب في المهمة 1 هو $\theta_d(t) = -\pi/2 - \cos(t)$ وذلك من أجل $0 \le t \le \pi$. المسار المطلوب في المهمة 2 هو $\theta_d(t) = \pi/2 - \cos(t)$ حيث $0 \le t \le \pi$.

10.2.1.3. التحكم عن طريق التغذية الأمامية مع التغذية الراجعة الخطية:

إن جميع المتحكمات في التطبيقات العملية تستخدم التحكم عن طريق التغذية الراجعة، وذلك بسبب أنه لا يوجد تمثيل ديناميكي مثالي للروبوت وللبيئة المحيطة به. ومع ذلك، فإن النموذج الديناميكي الجيد يمكن أن يستخدم من أجل تحسين أداء المتحكم وتبسيط التحليل.

لنقم بدمج المتحكم PID مع النموذج المستخدم للتمثيل الديناميكي $\{\hat{M},\hat{h}\}$ من أجل الحصول على معادلة الخطأ الديناميكي:

$$\ddot{\theta}_e + K_d\dot{\theta}_e + K_p\theta_e + K_i\int \theta_e(t)dt = 0 \qquad (10.17)$$

لجميع المسارات، وليس فقط لحالات الضبط النقطي. إن معادلة الخطأ الديناميكي (10.17) والاختيار المناسب لقيم أرباح المتحكم PID سيضمن حدوث التخميد بصورة أسية لأخطاء المسار.

وبما أن $\ddot{\theta}_e = \ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}$، فمن أجل الحصول على معادلة الخطأ الديناميكية (10.17)، فإننا نختار أمر التسارع للروبوت ليكون:

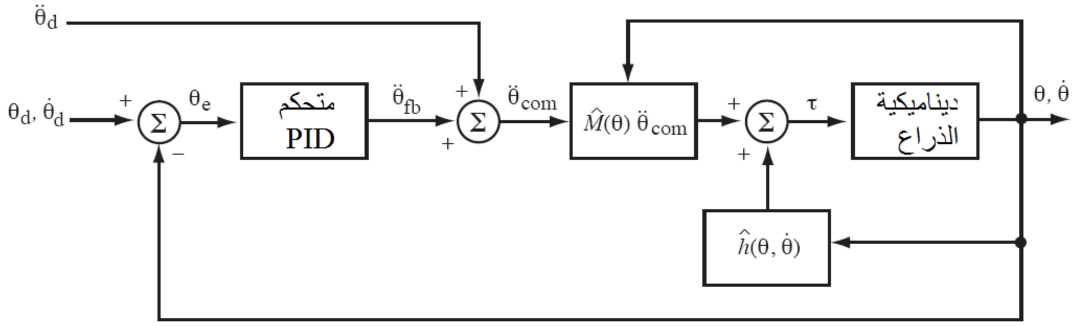
$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_{com} &= \ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}_e \\ &= \ddot{\theta}_d + K_d\dot{\theta}_e + K_p\theta_e + K_i\int \theta_e(t)dt \qquad (10.18)\end{aligned}$$

وبالتعويض في نموذج التمثيل الديناميكي للروبوت، فإننا نحصل على ما يسمى بالمتحكم عن طريق التغذية الراجعة الخطية Feedback Linearizing Control:

$$\tau = \widehat{M}(\theta)\left(\ddot{\theta}_d + K_d\dot{\theta}_e + K_p\theta_e + K_i\int \theta_e(t)dt\right) + \hat{h}(\theta,\dot{\theta}) \qquad (10.19)$$

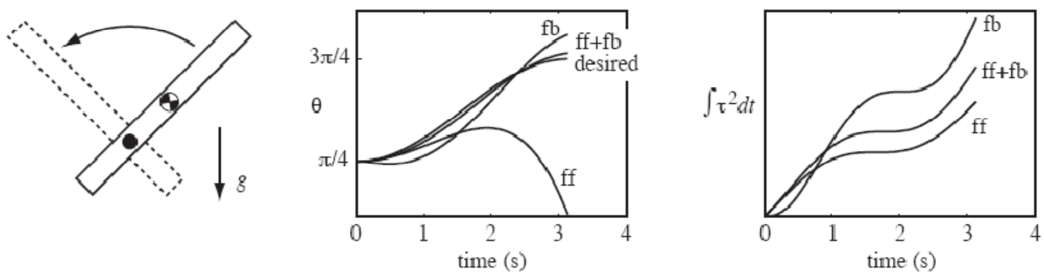
ويسمى هذا المتحكم بهذا الاسم لأن التغذية الراجعة لـ θ و $\dot{\theta}$ تستخدم من أجل تحويل نظام التحكم الغير خطي إلى آخر خطي. إن الحد $\hat{h}(\theta,\dot{\theta})$ يلغي التأثيرات الديناميكية المتعلقة بالحالة فقط، والحد المتعلق بالعطالة $\hat{M}(\theta)$ يقوم بتحويل تسارعات المفصل المطلوبة إلى عزوم دوران للمفصل. وهذا النوع من المتحكمات يسمى أحياناً بمتحكم عزم الدوران المحوسب Computed Torque Controller.

المخطط الصندوقي لهذا المتحكم موضح في الشكل (10.11). ويتم اختيار الأرباح K_p و K_d و K_i بحيث تتوضع جذور المعادلة التشخيصية بالشكل المطلوب بهدف الحصول على استجابة عابرة جيدة. وإذا افترضنا مثالية التمثيل الديناميكي للنموذج، فيمكن أن نختار K_i بحيث يكون مساوياً للصفر.



الشكل 10.11: التحكم عن طريق التغدية الراجعة الخطية.

الشكل (10.12) يظهر السلوك الفيزيائي القياسي للتحكم بوساطة التغذية الراجعة الخطية نسبة للتغذية الأمامية والتغذية الراجعة فقط. السودو كود لهذا المتحكم معطى بالشكل (10.13).



الشكل 10.12: الأداء في حال التغذية الأمامية فقط (ff)، والتغذية الراجعة فقط (fb)، والتغذية الراجعة الخطية (ff+fb). أرباح المتحكم PID مأخوذة من الشكل (10.6)، ونمذجة الخطأ باستخدام التغذية الأمامية مأخوذة من الشكل (10.10). الحركة المطلوبة هي المهمة 2 في الشكل (10.10). الشكل في الوسط يظهر أداء عملية اللتبع للمتحكمات الثلاثة. والشكل على اليمين يظهر المقياس المعياري لجهد التحكم لكل من المتحكمات الثلاثة.

```
time = 0                                // dt = cycle time
eint = 0                                // error integral
qprev = senseAngle                      // initial joint angle q
loop
  [qd,qdotd,qdotdotd] = trajectory(time) // from trajectory generator

  q = senseAngle                        // sense actual joint angle
  qdot = (q - qprev)/dt                 // simple velocity calculation
  qprev = q

  e = qd - q
  edot = qdotd - qdot
  eint = eint + e*dt

  tau = Mhat(q)*(qdotdotd + Kp*e + Kd*edot + Ki*eint) + hhat(q,qdot)
  commandTorque(tau)

  time = time + dt
end loop
```

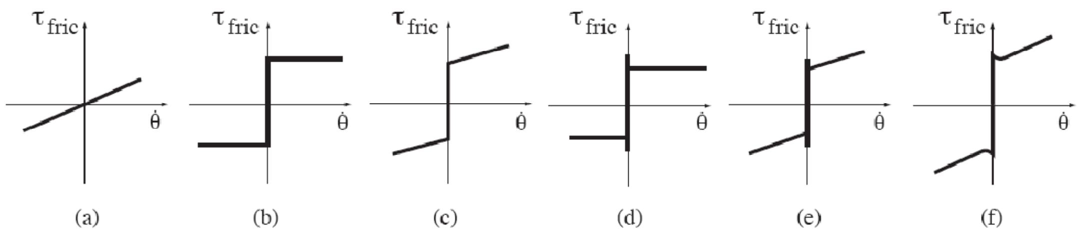
الشكل 10.13: السودو كود لمتحكم التغذية الراجعة الخطية.

10.2.1.4. توضيحات تتعلق بموضوع الاحتكاك:

قمنا من أجل التبسيط بافتراض أن النموذج المستخدم في الدراسة هو نموذج الاحتكاك اللزج Viscous والذي يحدث عادة في المحامل Bearing والمسننات Gears. وفي الحقيقة، إن الاحتكاك هو ظاهرة معقدة، وموضوعه هو من أهم الأبحاث الحالية، وأي صياغة لنموذج الاحتكاك ما هي إلا محاولة لفهم السلوك المايكروميانيكي Micromechanics لمنطقة التماس. وقوى الاحتكاك يمكن أن تكون تابعة لقوى التحميل على سطح التماس، وللحالة التي تكون فيه منطقة التماس في وضع السكون، وللموقع (بسبب تأثير تلك القوى التي تظهر قبل الانزلاق وتسبه إلى حد ما تلك القوى الناجمة عن النابض، أو بسبب عدم التماثل أو عدم الانتظامية في المحامل)، وللسرعة، ولدرجة الحرارة، وغيرها من العوامل.

ومن الجدير بالذكر أن إحدى محددات استخدام النموذج اللزج للاحتكاك هي الشرط الذي يقتضيه هذا النموذج وهو أن قوة الاحتكاك تساوي الصفر عندما تكون السرعة معدومة. وفي الواقع، فإن التطبيقات العملية الشائعة تصرح أن قوة الاحتكاك يمكن أن تكون أكبر من الصفر عندما تكون السرعة معدومة. على سبيل المثال، يلزمنا تطبيق قوة معينة أفقية على كتاب ما موجود على الطاولة حتى يبدأ بالانزلاق. وتعرف قوة الاحتكاك المقاومة للحركة في حالة السكون بالاحتكاك الستاتيكي Static Friction، وهذا النوع من الاحتكاك لا يشمله مفهوم الاحتكاك اللزج. وفي حالة روبوت أحادي المفصل، فإن الاحتكاك الستاتيكي الغير معدوم يقتضي أنه يجب تطبيق عزم دوران ما على المفصل في وضع السكون دون أن يؤدي ذلك إلى حدوث حركة. ومن المهم أن نعلم ان انقطاع تأثير الاحتكاك عند السرعات المعدومة سيؤدي وبشكل كبير إلى تعقيد مسألة

التحكم بالحركة في حالات السرعات البطيئة، وبشكل خاص في تلك الحالات التي يحدث فيها تغير في جهة الحركة. ولمعالجة هذه المسألة، فإن هناك نموذجاً أكثر تطوراً للاحتكاك عند المفاصل يمكن إضافته إلى الحد $\hat{h}(\theta,\dot{\theta})$ في المعادلة الديناميكية الغير خطية وذلك عن في عملية التحكم عن طريق التغذية الأمامية أو التغذية الراجعة الخطية. الشكل (10.14) يبين بعض الأمثلة لحالات الاحتكاك المتعلقة بالسرعة. ويوجد هناك العديد من الطرق من أجل التعامل مع الاحتكاك تتضمن مايسمى بالتهييج الترددي Dithering (أي فرض إشارة تحكم ذات تردد أعلى من تردد إشارة التحكم الاسمية لضمان حالة سلسة لانقطاع قوى الاحتكاك عند السرعات المعدومة) مع استخدام قيم أرباح عالية للمتحكم PID عند الحالات القريبة والمتضمنة للسرعة المعدومة.



الشكل 10.14: أمثلة عن نماذج الاحتكاك المتعلق بالسرعة. (a) الاحتكاك اللزج. (b) احتكاك كولوم Coulomb، $\tau_{fric} = b\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta})$، τ_{fric} يمكن أن تأخذ قيماً بين [-b,b] عندما تكون السرعة معدومة. (c) الاحتكاك الستاتيكي مع الاحتكاك اللزج، $\tau_{fric} = b_{static}\mathrm{sgn}(\dot{\theta}) + b_{viscous}\dot{\theta}$. (d) الاحتكاك السكوني والحركي، ويشترط أن يكون $|b_{static}| \geq \tau_{fric}$ حتى تبدأ الحركة، ومن ثم $\tau_{fric} = b_{kinetic}\mathrm{sgn}(\dot{\theta})$، حيث إن $b_{static} > b_{kinetic}$. (e) الاحتكاك الستاتيكي والحركي واللزج. (f) قانون الاحتكاك متضمناً تأثير ستريبيك Stribeck عند السرعات المنخفضة، حيث يتناقص الاحتكاك بزيادة السرعة.

10.2.1.5. تأثير المسننات:

إلى الآن ما زلنا نعتبر أن المحركات هي عبارة عن مصادر لعزوم الدوران، دون أن نأخذ بعين الاعتبار كيفية قيام المحرك بتوليد عزم الدوران. على سبيل المثال، إذا قمنا باختيار محرك يعمل بالتيار المستمر DC ويمتلك معدل استطاعة مناسبة لمفصل الروبوت، فسنجد بأنه يستطيع أن يقدم دورانات بسرعات عالية قد تصل إلى 10,000 RPM أو أكثر، ولكن بعزوم دوران منخفضة. ومعظم التطبيقات الروبوتية تتطلب بشكل خاص سرعات أقل وعزوم دوران أعلى. ولذلك فإنه عادة ما تستخدم المسننات، والأحزمة والبكرات، وغير ذلك من وسائط نقل الحركة من أجل تقليل السرعة بنسبة تسمى نسبة المسنن Gear Ratio، ويرمز لها بـ $G > 1$، بينما تقوم بزيادة عزم الدوران وفقاً للعامل G من الناحية المثالية بما يضمن انحفاظ الطاقة:

$$\dot{\theta}_{out} = \frac{\dot{\theta}_{in}}{G} \quad , \quad \tau_{out} = G\tau_{in} \quad , \quad P_{out} = \tau_{out}\dot{\theta}_{out} = (G\tau_{in})(\dot{\theta}_{in}/G) = P_{in}$$

في التطبيقات العملية، على أية حال، فإنه يتبدد جزء من الطاقة بسبب الاحتكاك الحاصل بين المسننات وسيكون عزم الدوران المتاح عند المخرج أقل من $G\tau_{in}$. وهذا التأثير يميل نحو الزيادة

مع زيادة نسبة المسنن G. وبشكل عام، فإن اختيارات نسبة المسنن تبدأ من أعداد من مرتبة الآحاد إلى أعداد من مرتبة المئات.

وهناك خيار آخر يعتمد على القيادة المباشرة لمفصل الروبوت باستخدام النسبة $G = 1$. والمحركات المستخدمة في القيادة المباشرة عادة ماتمتلك نسب للاستطاعة أعلى من المطلوب من أجل التطبيق الذي يستخدم لأجله الروبوت، وبالتالي فباسطاعة هذه المحركات تأمين عزوم دوران كافية بدون الحاجة إلى استخدام المسننات. وهذه المحركات لا تصل إلى سرعاتها الحدية في معظم التطبيقات العملية.

لنفترض الآن أن M هي عطالة الروبوت أحادي المفصل. وفي الحقيقة إن هذه العطالة هي بارامتر لا يشمل عطالة الوصلة فقط، بل ويشمل معه عطالة الجزء الدوار من المحرك. وبصورة عامة، تكون عطالة المحرك I_{motor} هي أصغر بكثير من عطالة الوصلة I_{link}. وعند استخدام جملة نقل بالمسننات حيث $G > 1$، فإن المحرك يدور بسرعة أعلى من الوصلة، فإذا كانت السرعة الزاوية للوصلة $\dot{\theta}$، فإن سرعة المحرك هي $G\dot{\theta}$. وبالتالي يمكن كتابة معادلة الطاقة الحركية لجملة الوصلة - الجزء الدوار بالشكل الآتي:

$$K = \frac{1}{2}\left(I_{link}\dot{\theta}^2 + I_{motor}\left(G\dot{\theta}^2\right)\right) = \frac{1}{2}(I_{link} + G^2 I_{motor})\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2$$

حيث $G^2 I_{motor}$ هي عطالة المحرك عند محور مخرج التركيبة المسننية، وتسمى بالعطالة المتولدة (المنعكسة) عن المحرك Motor’s Reflected Inertia، وهي العطالة الفعالة للمحرك والتي يتم الحصول عليها عند مخرج علبة السرعة Gearbox. ويكون المشتق الزمني للطاقة الحركية $\dot{K}$ هو عبارة عن عزم الدوران القائد لجملة الوصلة - الجزء الدوار مضروباً بسرعة المفصل، أي:

$$\dot{K} = (I_{link} + G^2 I_{motor})\ddot{\theta}\dot{\theta}$$

فعلى سبيل المثال، إذا كانت $I_{link} = 1\ kgm^2$، و $I_{motor} = 10^{-3}\ kgm^2$. وحيث $G = 1$، فإن 99% من العطالة الإجمالية هي بسبب الوصلة، وفقط 0.1% من العزم يمكنه زيادة تسارع المحرك. وعندما تكون نسبة المسنن $G = 100$، فإن العطالة الفعالة للمحرك الحاوي على جملة مسننية هي عشرة أضعاف العطالة الناتجة عن الوصلة.

وعندما يتم اختيار G بحيث يكون:

$$G = \sqrt{\frac{I_{link}}{I_{motor}}}$$

فإن نصف العزم يستخدم لزيادة تسارع كل من الوصلة والمحرك، وعندها يمكن القول بأن النظام متوافق عطالياً Inertia Matched.

وبصورة موجزة، يمكننا أن نذكر ملاحظتين من خلالهما نستطيع المقارنة بين أنظمة القيادة المباشرة والأنظمة الحاوية على جمل مسننية معقدة:

- سلوك الأنظمة الحاوية على جمل مسننية معقدة عادة ما تكون ذات حساسية أقل تجاه التغيرات في عطالة الوصلة وذلك عند يتم تحميل ذراع الروبوت بحمل ما، وهذا بسبب كون عطالة الوصلات تشكل نسبة قليلة من العطالة الإجمالية الكلية حيث تكون العطالة المتولدة (أو المنعكسة) عن المحرك عالية.
- قوى الاحتكاك تكون كبيرة في الأنظمة الحاوية على جمل مسننية معقدة. وفي الحالة التي تسيطر فيها قوى الاحتكاك على قوى العطالة، فإن التمثيل الديناميكي للمفصل قد يكون قريباً أكثر إلى الأنظمة اللزجة من الدرجة الأولى من الأنظمة العطالية ذات الدرجة الثانية.

هذه الخصائص لها دور مهم في تحليل قوانين التحكم في الأنظمة متعددة الفاصل، كما سنرى في الفقرة التالية.

10.2.2. التحكم بالحركة في الأنظمة متعددة المفاصل:

إن الطرائق التي قمنا بتطبيقها سابقاً على الروبوت أحادي المفصل،يمكن تطبيقها مباشرة على الروبوتات المكونة من n مفصل. الاختلاف سيكون في معادلة التمثيل الديناميكي (10.4) والتي ستأخذ شكلاً شعاعياً أكثر من حيث الصيغة العامة:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta})$$

حيث مصفوفة العطالة M الموجبة ذات الأبعاد n×n هي الآن مصفوفة تابعة للهيئة θ. وفي بعض الأحيان قد يكون من الأنسب لنا أن نكتب مكونات الحد $h(\theta,\dot{\theta})$ على شكل ثلاثة حدود، وبالتالي يكون:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + C\big(\theta, \dot{\theta}\big)\dot{\theta} + g(\theta) + b\big(\dot{\theta}\big) \qquad (10.20)$$

حيث $C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta}$ هي الحدود المتعلقة بتسارع كوريوليس Coriolis والقوى الطاردة مركزياً، و $g(\theta)$ هي الحدود الكامنة (الجاذبية على سبيل المثال)، و $b(\dot{\theta})$ هي الحدود المتعلقة بالاحتكاك. ونلاحظ من خلال معادلة التمثيل الديناميكي (10.20) أن القوة والعزم عند مفصل ما يمكن أن يكونا تابعين لمواقع وسرعات وتسارعات الفاصل الأخرى.

وسوف تقوم بالتميز بين نوعين من التحكم بالأنظمة متعددة المفاصل: الأول هو التحكم اللامركزي Decentralized Control، حيث يتم التحكم بكل مفصل على حدى بدون أي مشاركة للمعلومات بين المفاصل. والثاني هو التحكم المركزي Centralized Control، حيث تكون معلومات الحالة العامة لكل مفصل من المفاصل متاحة من أجل حسابات التحكم لكل مفصل.

10.2.2.1. التحكم اللامركزي بالأنظمة متعددة المفاصل:

إن الطريقة الأبسط للتحكم بالروبوتات المتعددة المفاصل، وهي الطريقة التي غالباً ما تستخدم، هي أن يتم تكوين متحكمات مستقلة خاصة بكل مفصل. التحكم اللامركزي مناسب عندما يمكن تحليل Decoupled التمثيل الديناميكي للمفاصل (والمقصود هنا تحويل المعادلة الديناميكية إلى مجموعة معادلات ديناميكية تابعة لكل مفصل على حدى)، أو على الأقل يمكن تحليلها ولو بصورة جزئية. والتمثيل الديناميكي للمفاصل يمكن تحليله عندما يكون تسارع كل مفصل يعتمد فقط على عزم الدوران المطبق على المفصل. وهذا يحدث عندما تكون مصفوفة العطالة قطرية Diagonal، كما هو الحال في الروبوتات الديكارتية والروبوتات الجسرية Gantry Robots، حيث تكون المحاور الثلاثة الأولى تمددية ومتعامدة مع بعضها البعض على طول المحاور x,y,z. وهذا الروبوتات تكافئ الأنظمة أحادية المفصل الثلاثية Three Single-Joint Systems.

إن التحليل الجزئي للتمثيل الديناميكي يمكن إنجازه في الروبوتات الحاوية على أنظمة مسننية عالية الدرجة وذلك بغياب تأثير الجاذبية. وستكون مصفوفة العطالة $M(\theta)$ تقريباً قطرية، وذلك لأنه تتم السيطرة عليها بوساطة العطالة المتولدة (المنعكسة) عن المحركات نفسها. وتكون الانحرافات في مصفوفة العطالة $M(\theta)$ بسبب الاختلافات في هيئة المفاصل صغيرة. ويساهم تواجد الاحتكاك في كل مفصل على حدى في عملية تحليل المعادلة الديناميكية.

10.2.2.2. التحكم المركزي بالأنظمة متعددة المفاصل:

عندما تكون قوى الجاذبية وعزوم الدوران كبيرة ومركبة (أي لا يمكن تحليلها تبعاً لكل مفصل على حدى)، أو عندما لا يمكن مقاربة مصفوفة العطالة $M(\theta)$ بشكل جيد إلى مصفوفة قطرية، يصبح التحكم اللامركزي غير مقبولاً من حيث جودة الأداء. وفي هذه الحالة، فإن التحكم عن طريق قانون التغذية الراجعة الخطية (10.19) المبين في الشكل (10.11) يمكن تعميمه على حالة الروبوتات متعددة المفاصل. وتكون الهيئة θ والهيئة المطلوبة θ_d والخطأ في الهيئة θ_e هي عبارة عن أشعة، وتصبح القيم الموجبة للأرباح عبارة عن مصفوفات موجبة K_p, K_i, K_d:

$$\tau = \widehat{M}(\theta)\left(\ddot{\theta}_d + K_p\theta_e + K_i\int \theta_e(t)dt + K_d\dot{\theta}_e\right) + \hat{h}(\theta,\dot{\theta}) \qquad (10.21)$$

وبشكل عام يتم اختيار مصفوفات الأرباح بالشكل k_pI, k_iI, k_dI، حيث I هي عبارة عن المصفوفة الواحدية ذات الأبعاد $n\times n$، و k_p, k_i, k_d هي قيم عددية غير سالبة. وفي الحالة التي يكون فيها النموذج الديناميكي دقيقاً، فإن التمثيل الديناميكي لكل مفصل يمكن اختزاله إلى تمثيل ديناميكي خطي كالمعادلة (10.17). المخطط الصندوقي والسودو كود لخوارزمية هذا النوع من التحكم مبينة في الأشكال (10.11) و (10.13) على الترتيب.

إن تطبيق قانون التحكم (10.21) يتطلب معرفة التمثيلات الديناميكية المعقدة المحتملة. وفي أغلب الأحيان لا يمكننا الحصول على النماذج الديناميكية الجيدة لهذا التمثيلات، أو أن معادلات التمثيل الديناميكي قد تكون في غاية التعقيد ومن الصعب حلها ضمن حدود معدل المؤازرة

Servo Rate. وفي هذه الحالة، إذا كانت السرعات والتسارعات المطلوبة صغيرة، فإنه يمكن الحصول على صيغة تقريبية للمعادلة (10.21) باستخدام المتحكم PID فقط بالإضافة للحد المتعلق بتعويض تأثير الجاذبية:

$$\tau = K_p\theta_e + K_i\int \theta_e(t)dt + K_d\dot{\theta}_e + \hat{g}(\theta) \qquad (10.22)$$

وإذا كان الاحتكاك معدوماً، وكان تعويض تأثير الجاذبية مثالياً، وكان أرباح المتحكم PD باستخدام الضبط النقطي ($K_i = 0$ و $\theta_d^{\cdot} = \theta_d^{\cdot\cdot} = 0$) فإن النموذج الديناميكي المتحكم به يمكن كتابته بالشكل:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} = K_p\theta_e - K_d\dot{\theta} \qquad (10.23)$$

حيث عُبر عن الحدود المتعلقة بتسارع كوريوليس Coriolis والقوى المركزية بـ $C(\theta,\theta^{\cdot})\theta^{\cdot}$، وأية تأثيرات للاحتكاك اللزج تم تضمينها في K_d من أجل التبسيط. والآن يمكننا تعريف "خطأ الطاقة" الافتراضي "Virtual "Erorr Energy، والذي هو عبارة عن مجموع "أخطاء الطاقة الكامنة" "Error Potential Energy" والمخزنة في النابض الافتراضي، ومجموع "أخطاء الطاقة الحركية" "Error Kinetic Energy":

$$V(\theta_e,\dot{\theta}_e) = \frac{1}{2}\theta_e^T K_p\theta_e + \frac{1}{2}\dot{\theta}_e^T M(\theta)\dot{\theta}_e \qquad (10.24)$$

وبما أن $\theta_d^{\cdot} = 0$، فإن هذه المعادلة يمكن اختزالها إلى الشكل:

$$V(\theta_e,\theta) = \frac{1}{2}\theta_e^T K_p\theta_e + \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M(\theta)\dot{\theta} \qquad (10.25)$$

وباشتقاق هذه المعادلة بالنسبة للزمن وبالتويض في المعادلة (10.23)، نجد:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\dot{\theta}^T K_p\theta_e + \dot{\theta}^T M(\theta)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\theta}^T\dot{M}(\theta)\dot{\theta}\\ &= -\dot{\theta}^T K_p\theta_e + \dot{\theta}^T\big(K_p\theta_e - K_d\dot{\theta} - C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta}\big) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^T\dot{M}(\theta)\dot{\theta} \qquad (10.26)\end{aligned}$$

وبإعادة ترتيب المعادلة، وباستخدام الخاصية التي تنص على أن $M^{\cdot}$-2C هي عبارة عن مصفوفة متماثلة منحرفة، نحصل على:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\dot{\theta}^T K_p\theta_e + \dot{\theta}^T\big(K_p\theta_e - K_d\dot{\theta}\big) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^T\left(\dot{M}(\theta) - 2C(\theta,\dot{\theta})\right)\dot{\theta}\\ &= -\dot{\theta}^T K_d\dot{\theta} \le 0 \qquad (10.27)\end{aligned}$$

وهذه المعادلة تبرهن أن خطأ الطاقة يتناقص عندما يكون $\theta^{\cdot} \neq 0$. وإذا كان $\theta^{\cdot} = 0$ و $\theta \neq \theta_d$، فإن النابض الافتراضي يضمن أن $\theta^{\cdot\cdot} \neq 0$، وبالتالي $\theta_e^{\cdot}$ سيكون غير معدوماً مرة أخرى، وسيتم تبديد مزيد من الطاقة. وهذا يتوافق مع مبدأ عدم التغيير لكراسوفسكي – لاسال

Krasovskii – LaSlle Invariance Principle. ومنه فإن خطأ الطاقة سوف يتناقص تدريجياً والروبوت يتجه نحو وضعية الراحة عند θ_d (حيث $\theta_e = 0$) مهما كانت الوضعية الابتدائية.

10.2.3. التحكم بالحركة في فضاء المهمة:

في الفقرة (10.2.2)، ركزنا في دراستنا على التحكم بالحركة في فضاء المفاصل، ويعد ذلك مفيداً في بعض الأحيان وذلك لأن حدود قيم المفاصل يتم التعبير عنها بسهولة في هذا الفضاء، ويتوجب على الروبوت أن ينفذ أي مسار في فضاء المفاصل بمراعاة هذه الحدود. وبصورة طبيعية فإن المسارات عادة ما يتم توصيفها بدلالة متغيرات المفاصل، وفي هذا الفضاء لا وجود لأية حالات تتعلق بالقصور (الشذوذ) الحركي أو بالفائض الحركي.

من جهة أخرى، وبما أن الروبوت يتفاعل مع البيئة الخارجية المحيطة به ومع الأجسام الموجودة فيها، فقد يكون من المناسب أكثر أن يتم التعبير عن الحركة على هيئة مسارات تصف حركة النهاية العاملة للروبوت في فضاء المهمة أو العمل. ليكن مسار النهاية العاملة للروبوت محدداً بـ $(X(t),V(t))$، حيث $X \in SE(3)$ أو $X \in R^n$ على سبيل المثال، حيث $V \in R^n$ وهي عبارة عن السرعة. وفي بعض من الأحيان، يعتبر توفر مسار الحركة في فضاء المفاصل أمراً مجدياً، وهو يسمح لنا بتجاوز حالات الشذوذ الديناميكي عندما تقل رتبة المصفوفة $M(\theta)$، وبالتالي فنحن أمام خيارين للتحكم بالحركة: (1) أن نقوم بتحويل مسار الحركة من فضاء المهمة إلى ما يقابله في فضاء المفاصل، ومن ثم يتم التحكم به كما مر معنا في الفقرة (10.2.2). أو (2) التعبير عن التمثيل الديناميكي للروبوت وكذلك قانون التحكم المستخدم في فضاء المهمة.

الخيار الأول يتعلق بتحويل المسار إلى ما يقابله في فضاء المفاصل. حيث يكون التمثيل الكينماتيكي معطى بـ $X = f(\theta)$ و $V = J(\theta)\dot{}$، حيث $J(\theta)$ هي مصفوفة اليعقوبي المتوافق مع تمثيل السرعة المختار. وبالتالي فإن مسار الحركة في فضاء المفاصل يمكن الحصول عليه انطلاقاً من معرفتنا لمسار الحركة في فضاء المهمة من خلال التمثيل الكينماتيكي الخلفي:

$$\theta(t) = f^{-1}\big(X(t)\big) \qquad (10.28)$$

$$\dot{\theta}(t) = J^{-1}\big(\theta(t)\big)V(t) \qquad (10.29)$$

$$\ddot{\theta}(t) = J^{-1}\big(\theta(t)\big)\Big(\dot{V}(t) - \dot{J}\big(\theta(t)\big)\dot{\theta}(t)\Big) \qquad (10.30)$$

فإذا كان الروبوت يمتلك فائضاً حركياً، أي أن المصفوفة $J(\theta)$ تمتلك أعمدة أكثر من صفوفها، فإنه يتوجب علينا إيجاد طريقة للتعامل مع f^{-1} و J^{-1}.

ومن مساوئ هذه الطريقة أن الأمر يتطلب حساب وإيجاد التمثيل الكينماتيكي الخلفي، والذي يتطلب مواصفات حاسوبية كبيرة. أما الخيار الثاني هو أن نقوم بالتعبير عن التمثيل الديناميكي للروبوت في فضاء المهمة، بالطريقة التي تمت منافشتها في الفصل (9.6). فإذا تذكرنا أن التمثيل الديناميكي في فضاء المهمة يعطى بالعلاقة:

$$F = \Lambda(\theta)\dot{V} + \gamma(\theta, V) + \eta(\theta)$$

حيث قوى وعزوم المفاصل τ والمتعلقة بالقوى F يتم التعبير عنها في جملة محاور النهاية العاملة من خلال: $\tau = J^T(\theta)F$.

وبالتالي فإنه بإمكاننا الآن أن نكتب قانون التحكم في فضاء المهمة بالاعتماد على قانون التحكم عن طريق التغذية الراجعة الخطية في فضاء المفاصل (10.21) كالتالي:

$$\tau = J^T(\theta)\left(\widehat{\Lambda}(\theta)\left(\dot{V}_d + K_p X_e + K_i \int X_e(t)dt + K_d V_e\right) + \hat{\gamma}(\theta, V) + \hat{\eta}(\theta)\right) \qquad (10.31)$$

حيث $V_d^{\cdot}$ هي عبارة عن التسارع المطلوب تحقيقه، و Λ و γ و η تمثل النموذج الديناميكي للمتحكم.

قانون التحكم في فضاء المهمة (10.31) تم استنتاجه استناداً إلى خطأ الهيئة X_e وخطأ السرعة V_e. وعندما يتم التعبير عن X باستخدام الحد الأدنى من الإحداثيات حيث $X \in R^n$ و $V = X^{\cdot}$، فإن الاختيار الطبيعي يكون $X_e = X_d - X$، و $V_e = V_d - V$. وعندما يتم التعبير عن X بالشكل $X \in SE(3)$، فإن هناك عدد من الخيارات الممكنة، تتضمن مايلي:

- إذا كان $V = V_b$ و $J(\theta) = J_b(\theta)$ حيث تم التعبير بالنسبة لجملة محاور النهاية العاملة {b}. فإن الاختيار الطبيعي سيكون $X_e = \log_{SE(3)}(X^{-1}X_d)$، و V_e تعطى بالعلاقة:

$$V_e = Ad_{X^{-1}X_d} V_d - V$$

وهذا التمثيل لـ X_e يعطي الاتجاه الثابت للجسم من الهيئة الحالية X إلى الهيئة المطلوبة X_d وذلك بالنسبة لجملة محاور النهاية العاملة. وتحويل الدالة الملحقة الوارد في المعادلة السابقة ينقل السرعة المطلوبة V_d من الهيئة X_d إلى سرعة ممثلة في جملة محاور النهاية العاملة للهيئة X.

- إذا كان $V = V_s$ و $J(\theta) = J_s(\theta)$ حيث تم التعبيربالنسبة لجملة محاور الفضاء {s}. فإن الخيار الطبيعي سيكون $X_e = \log_{SE(3)}(X_d X^{-1})$، و $V_e = V_d - V$.

- إذا تم اختيار V و $J(\theta)$ على اعتبار أن $V = (\omega, \nu)$، حيث ω هي السرعة الزاوية للنهاية العاملة بالنسبة لجملة محاور الفضاء {s}، و $\nu = p^{\cdot}$، فإن الاختيار الطبيعي سيكون:

$$X_e = \begin{bmatrix} log_{SE(3)}(R_d R^T) \\ p_d - p \end{bmatrix} \quad , \qquad V_e = V_d - V$$

إن هذه الخيارات تقود إلى سلوكيات مختلفة للروبوت. وفي التطبيقات العملية، يقوم الخيار الأخير بتحليل حدود التصحيح الخطية والدورانية.

10.3. التحكم بالقوة Force Control:

عندما لا يكون الهدف هو إيجاد حركات أو مسارات للحركة للنهاية العاملة للروبوت، بل يكون الهدف هو تطبيق قوى وعزوم معينة على البيئة المحيطة بالروبوت، فإن ما يلزمنا هنا من أجل أداء المهمة هو ما يسمى بالتحكم بالقوة Force Control. إن التحكم بالقوة المجرد أو الصافي (بغض النظر عن التحكم بالحركة) هو ممكن فقط عندما تطبق البيئة المحيطة بالروبوت قوى مقاومة في جميع الاتجاهات (على سبيل المثال، عندما تكون النهاية العاملة للروبوت على تماس مع جسم صلب متين، أو متصلة بنابض مخمد والذي يبدي مقاومة ما مهما كان اتجاه الحركة). ولكن في الحقيقة، إن مفهوم التحكم بالقوة ليس مجرداً بصورة تامة، وذلك لأن الروبوتات عادة ما تكون قادرة على الحركة بحرية في اتجاه واحد على الأقل (أي دون الحاجة إلى وجود متحكم بالقوة في هذا الاتجاه بسبب غياب تأثير أية قوة مقاومة للحركة). ولكن يعتبر مفهوم التحكم بالقوة المجرد أو الصافي أمراً مهماً، فهو يقودنا إلى نوع آخر من التحكم، والذي يسمى بالتحكم الهجين بالقوة والحركة Hybird Motion-Force Control كما سنرى لاحقاً.

في التحكم بالقوة المثالي، تكون القوة المطبقة من قبل النهاية العاملة بالروبوت غير متأثرة باضطراب الحركة المطبقة على النهاية العاملة. وهذا الأمر مرهون بكون التحكم بالحركة مثالياً. وفي المقابل، تكون الحركة غير متأثرة بالاضطرابات الحاصلة في القوى. وبصورة عامة يمكن القول أن التحكم بالقوة مقترن بالتحكم بالحركة، وذلك لكون القوى مقترنة بالسرعات حيث أن جدائها يقودنا إلى مفهوم الاستطاعة Power.

فإذا كانت F_{app} هي عباة عن القوة التي يطبقها الروبوت المناور Manipulator على البيئة المحيطة به، فإن التمثيل الديناميكي للروبوت يكتب بالشكل:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \ddot{\theta}) + g(\theta) + b(\dot{\theta}) + J^T(\theta)F_{app} = \tau \qquad (10.32)$$

حيث مصفوفة اليعقوبي $J(\theta)$ تحقق المعادلة $V = J(\theta)\dot{\theta}$. وبما أن الروبوتات بشكل عام تتحرك ببطء (هناك حالات خاصة) خلال مهمة التحكم بالقوة، فإنه بإمكاننا إهمال الحدود المتعلقة بالتسارع وبالسرعة، وبالتالي فإننا نجد:

$$g(\theta) + J^T(\theta)F_{app} = \tau \qquad (10.33)$$

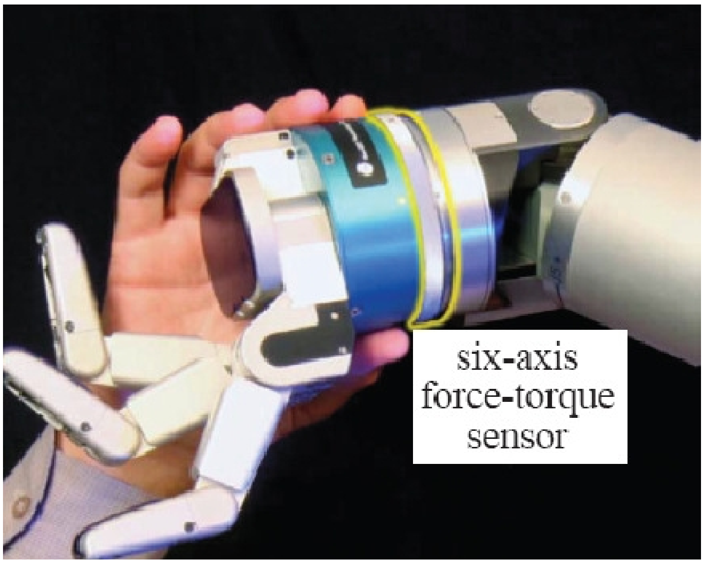
وفي حال غياب أية آلية للقياس المباشر لكل من القوة والعزم عند النهاية العاملة للروبوت، فإن التغذية الراجعة لزوايا المفاصل وحدها يمكن أن تستخدم من أجل تطبيق قانون التحكم بالقوة:

$$\tau = \hat{g}(\theta) + J^T(\theta)F_d \qquad (10.34)$$

حيث $\hat{g}(\theta)$ هو عبارة عن النموذج المثل للعزوم الناتجة عن تأثير الجاذبية، و F_d هي القوة المطلوب تحقيقها. إن قانون التحكم هذا يتطلب نموذجاً جيداً لتمثيل تأثيرات الجاذبية الأرضية

بالشكل الذي يضمن التحكم الدقيق بعزوم الدوران المطبقة عند مفاصل الروبوت. وفي الحالة التي يكون فيها المفصل مقاداً بشكل مباشر Direct-Drive Joint، فإنه يمكن التحكم بعزم الدوران عن طريق التحكم المباشر بالمحرك. أما في الحالة التي يكون فيها المحرك حاوياً على أنظمة نقل مسننية، فإن عزوم الاحتكاك الكبيرة المتولدة في الجمل المسننية ستقلل من درجة جودة التحكم بعزم الدوران باستخدام التحكم المباشر بالمحرك فقط. وفي هذه الحالة، فإنه يتم تزويد مخرج الجملة المسننية بمقاييس معينة من أجل القياس المباشر لعزوم المفاصل، والتي يتم تزويدها إلى المتحكم المحلي عن طريق التغذية الراجعة ،والذي يقوم بدوره بتعديل تيار المحرك من أجل الحصول عزم الدوران المطلوب للمفصل عند المخرج.

وهناك طريقة أخرى شائعة الاستخدام، وهي أن يتم تجهيز ذراع الروبوت بحساس سداسي المحاور لقياس القوى والعزوم، ويت تركيبه بين الذراع والنهاية العاملة للروبوت بغية القياس المباشر للقوى عند النهاية العاملة F_{app} (الشكل (10.15)). وبما أن القوة المطلوب تحقيقها F_d تكون مقداراً ثابتة بصورة عامة، أو أنها تتغير ببطء، فإن الاشتقاق بالنسبة للزمن لقياسات القوة والعزم ليس له معنى، وبالتالي فإن هذا التشخيص يقودنا نحو خيار استخدام المتحكم PI مع الحد المتعلق بالتغذية الأمامية والحد المتعلق بتعويض تأثير الجاذبية الأرضية:



الشكل 10.15: حساس سداسي المحاور لقياس القوة والعزم، تمت الإشارة للحساس باللون الأصفر، وتم تركيبه بين النهاية العاملة والذراع في روبوت Barret WAM.

$$\tau = \hat{g}(\theta) + J^T(\theta)\left(F_d + K_{fp}F_e + K_{fi}\int F_e(t)dt\right) \qquad (10.35)$$

حيث $F_e = F_d - F$، و K_{fp} و K_{fi} هي المصفوفات الموجبة للأرباح التناسبية والتكاملية على الترتيب. وفي الحالة التي تكون فيها نمذجة تأثيرات الجاذبية مثالية، فبتعويض معادلة المتحكم بالقوة (10.35) بمعادلة التمثيل الديناميكي (10.33)، فإننا نحصل على معادلة الخطأ الديناميكي:

$$K_{fp}F_e + K_{fi}\int F_e(t)dt = 0 \qquad (10.36)$$

وفي حال كون الاضطراب في القوة في الجانب الأيمن من المعادلة (10.36) (والناجم عن النموذج الغير صحيح لتأثيرات الجاذبية $\hat{g}(\theta)$ على سبيل المثال) ثابتاً، فبإجراء عملية الاشتقاق نجد:

$$K_{fp}\dot{F}_e + K_{fi}F_e = 0 \qquad (10.37)$$

وهذه المعادلة تظهر أن F_e تتقارب نحو الصفر من أجل القيم الموجبة لـ K_{fp} و K_{fi}.

إن قانون التحكم المبين في المعادلة (10.35) يبدو بسيطاً، لكن إذا تم تطبيقه بصورة غير صحيحة، فإن العواقب ستكون وخيمة، فإذا لم يكن هناك أي شيء يجعل الروبوت يطبق قوى دفع ضده، فإن الروبوت سوف يتسارع في محاولة فاشلة منه لخلق قوى عند النهاية العاملة للروبوت. وبما أن عملية التحكم بالقوة بصورة عامة تتطلب وجود القليل من الحركة، فإننا يمكن أن نقيد تسارع الحركة بإضافة مخمد للسرعة. وبذلك فإننا نحصل على قانون التحكم المعدل:

$$\tau = \hat{g}(\theta) + J^T(\theta)\left(F_d + K_{fp}F_e + K_{fi}\int F_e(t)dt - K_{damp}V\right) \qquad (10.38)$$

حيث K_{damp} هو مقدار موجب.

10.4. التحكم الهجين بالحركة والقوة Hybird Motion-Force Control:

إن معظم المهمات الموكلة إلى الروبوتات تتطلب توفر كل من المتحكمات التي تتحكم بالقوة بالإضافة إلى المتحكمات التي تتحكم بالسرعة. ونظام التحكم الذي يجمع بين تطبيقات هذين المتحكمين يسمى بنظام التحكم الهجين للحركة والقوة Hybird Motion-Force Control. فإذا كان فضاء المهمة أو العمل من المرتبة البعدية n، فإنه وبكل حرية يمكننا أن نفصل القوى والحركات ذات الأبعاد n من مجمل القوى والحركات ذات الأبعاد 2n في أي وقت، حيث الحركات والقوى ذات الأبعاد n (الأخرى) يتم تحديدها اعتماداً على معطيات البيئة المحيطة بالروبوت. وتجب الإشارة أنه لا ينبغي فصل القوى والحركات التي تقع في "اتجاه واحد" وذلك لكونهما غير مستقلين عن بعضهما البعض.

فعلى سبيل المثال، لنفترض أن نموذج البيئة الميحطة نثائي الأبعاد لمخمد ما معطى بالعلاقة التالية: $F = B_{env}V$، حيث:

$$B_{env} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبتعريف مركبات كل من V و F كالآتي (V_1,V_2) و (F_1,F_2)، فإننا نجد $F_1 = 2V_1+V_2$، و $F_2 = V_1+V_2$. وبالتالي فإنه لدينا الحرية بأن نختار $n = 2$ من إجمالي $2n = 4$ من السرعات والقوى في أي وقت نريد. فمثلاً يمكننا أن نحدد F_1 و V_1 بشكل مستقل، وذلك لكون المصفوفة B_{env} غير قطرية. ومن ثم فإن V_2 و F_2 يمكن تحديدهما اعتماداً على B_{env}. وهنا ننوه بإنه لا يمكننا أن نتحكم بكل من F_1 و $2V_1+V_2$ بصورة مستقلة عن بعضهما، وذلك بسبب كونهما في "نفس الاتجاه" بالنسبة للمخمد.

10.4.1. القيود الطبيعية والاصطناعية:

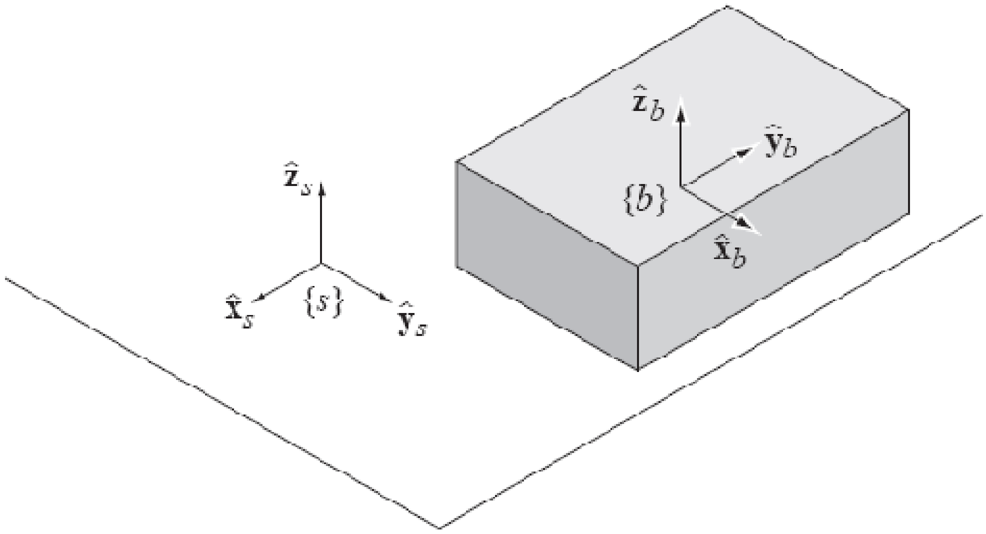
إحدى الحالات الخاصة المهمة التي يجب التنويه إليها هي تلك التي تكون فيها البيئة المحيطة بالروبوت جاسئة (ذات قيود صلبة) في عدد k من الاتجاهات، وتكون غير جاسئة (غير مقيدة بقيود صلبة) في الاتجاهات n – k الأخرى. في هذه الحالة، نحن لا نستطيع أن نختار أياً من الحركات والقوى ذات العدد الإجمالي 2n بحيث نقوم بتحديدها بشكل منفصل (يكون أفضل خيار بالنسبة لمناطق التماس مع البيئة المحيطة هي الاتجاهات k والتي يستطيع فيها الروبوت وبكل حرية أن يطبق القوى، ويكون أفضل خيار من أجل الحركة هو الاتجاهات n – k والتي يستطيع فيها الروبوت الحركة وفقها بكل حرية).وكمثال على ذلك، لنفترض أن فضاء المهمة أو العمل هو فضاء سداسي الأبعاد n = 6 من أجل SE(3)، بالتالي فإن الروبوت الذي مهمته مثلاً أن يقوم بفتح باب الخزانة يمتلك درجة حرية واحدة من أجل الحركة 6 – k = 1، وهي عبارة عن الدوران حول مفاصل باب الخزانة، وبالتالي فإنه يمتلك k = 5 درجة حرية من أجل القوى، أي أن الروبوت يستطيع أن يطبق أية قوى وأية عزوم دوران والتي سيكون مقدارعزومها مساوياً للصفر حول محرور مفاصل باب الخزانة.

كمثال آخر، يستطيع الروبوت الذي مهمته هي الكتابة على لوح الطبشور أن يتحكم بكل حرية بالقوة فقط باتجاه اللوح (k = 1)، لكنه من غير أن يخرق اللوح. وبالتالي فإن هذا الروبوت يمتلك 6 – k = 5 درجات من الحرية حيث يمكنه الحركة بكل حرية وفقها (اثنان من أجل تحديد الموقع لطرف الطبشورة وبالتالي حركتها على مستوي اللوح، والثلاث الباقية من أجل وصف اتجاه الطبشورة)، ولكن لا يمكن التحكم بشكل مستقبل بالقوى وفقاً لهذه الاتجاهات.

في المثال الأخير الذي يتحدث عن الروبوت والكتابة بالطبشور، فإنه يجب التنويه إلى أمرين مهمين. الأمر الأول يتعلق بمسألة الاحتكاك، فالروبوت الذي يقوم بمهمة الكتابة باستخدام الطباشير بإتقان يمكنه في الحقيقة أن يتحكم بالقوى التي تكون على تماس مع مستوي اللوح، فإذا كانت هذه القوى لا تتجاوز حد الاحتكاك الستاتيكي المحدد بمعامل الاحتكاك والقوة الناظمية على سطح اللوح (رد الفعل)، فإن الحركة الناتجة من هذه القوى ستكون معدومة كما هو مطلوب. ومن هذ المنطلق، فإن الروبوت يمتلك ثلاث درجات من الحرية من أجل الحركة وثلاث درجات من الحرية من أجل التحكم بالقوى. الأمر الثاني، هو أن الروبوت قد يقرر في مرحلة من المراحل أن يبتعد عن اللوح. ووفقاً لذلك، فإن الروبوت ستة درجات من الحرية لأجل الحركة فقط. ونتيجة لذلك يمكن القول أن هيئة الروبوت ليست هي المحدد الوحيد لاتجاهات درجات الحرية لكل من القوى والحركة. ومع ذلك، فإننا في هذه الفقرة سوف ندرس الحالة المبسطة حيث يمكن تحديد درجات الحرية للحركة وللقوى اعتماد فقط على هيئة الروبوت، مع اعتبار جميع المقيدات عبارة عن مقيدات تعادل Equality Constraints. فعلى سبيل المثال، فإن مقيد عدم التعادل Inequality Constraint للسرعة الناتج من اللوح (حيث لا يمكن للطبشورة أن تخرق اللوح) يمكن معالجته على أنه مقيد تعادل (الروبوت من جهة أخرى لن يقوم بإبعاد الطبشورة عن اللوح).

كمثال أخير، لنفترض أن روبوتاً مهمته مسح لوح الطبشور باستخدام مسّاحة اللوح (الممحاة) والتي يمكن نمذجتها على هيئة كتلة صلبة (الشكل (10.16)). ولتكن الهيئة X(t) بحيث يتم

التعبير عنها بالإحداثيات $q = (\phi,p) = (\phi_x,\phi_y,\phi_z,x,y,z)$، حيث ϕ هي عبارة عن الإحداثيات الأسية للدوران. ويمكن تمثيل السرعة بالشكل $V = \dot{q}$. وعندما تكون الممحاة على تماس مع اللوح، فإن الهيئة $X(t)$ تكون خاضعة للقيود التالية:



الشكل 10.16: جملة محاور الفضاء الثابتة {s} المرتبطة بلوح الطبشور وجملة محاور الجسم {b} المربوطة بالممحاة.

$$\phi_x = 0$$

$$\phi_y = 0$$

$$z = c$$

حيث c هي نصف سماكة الممحاة. وهذه المقيدات يمكن التعبير عنها بشكل مختلف كالتالي:

$$\dot{\phi}_x = 0$$

$$\dot{\phi}_y = 0$$

$$\dot{z} = 0$$

ووفقاً للفصل الثاني من هذا الكتاب، فإن هذه القيود تسمى قيوداً هولونومية Holonomic (أي أنها قيود تامة) حيث يمكن مكاملة القيود التفاضلية من أجل الحصول على قيود الهيئة.

هذه القيود تسمى قيوداً طبيعية Natural Constaints، والتي يتم تحديدها اعتماداً على معطيات البيئة المحيطة. وفي ضوء القيود الطبيعية، يمكننا أن نحدد أية حركة للممحاة تحقق مقيدات السرعة هذه، حيث $k = 3$، معطية بالنتيجة $6 - k = 3$ درجات من الحرية من أجل الحركة. وفي المقابل، نحن أيضاً قادرين على تحديد القوى F_z و $F_{\phi x}$ و $F_{\phi y}$، حيث $k = 3$. وهذا التحديد

للحركة وللقوى يطلق عليه اسم القيود الاصطناعية Artificial Constraints. وفيما يلي مجموعة القيود الاصطناعية القياسية العامة الناتجة عن القيود الطبيعية:

Artificial Constraints	Natural Constraints
$F_{\phi_x} = 0$	$\dot{\phi}_x = 0$
$F_{\phi_y} = 0$	$\dot{\phi}_y = 0$
$\dot{\phi}_z = 0$	$F_{\phi_z} = 0$
$\dot{x} = k_1$	$F_x = 0$
$\dot{y} = 0$	$F_y = 0$
$F_z = k_2$	$\dot{z} = 0$

وهنا نلاحظ أن القيود الاصطناعية ستسبب حركة الممحاة وفقاً للاتجاه x وبالسرعة k_1، بينما ستتسبب بتطبيق قوة ثابتة k_2 باتجاه اللوح.

10.4.2. المتحكم الهجين Hybird Controller:

سنعود الآن إلى مسألة تصميم المتحكم الهجين بالحركة والسرعة. إذا كانت البيئة المحيطة بالروبوت صلبة، فإننا يمكن التعبير عن القيود الطبيعة، التي عددها k، على السرعة في فضاء المهمة كالتالي:

$$A(X)V = 0 \qquad (10.39)$$

حيث $A(X) \in R^{k\times n}$. (وبدلاً من ذلك، يمكن كتابة هذه القيود بدلالة المجموعة الأدنى لإحداثيات المهمة بالشكل $A(q)\dot{q} = 0$ أو في فضاء المفاصل بالشكل $A(\theta)\dot{\theta} = 0$). وهذه الصيغة تتضمن قيود التماس الهولونومية والغير هولونومية مع البيئة المحيطة، تماماً كما هو الحال بالنسبة لقيود الحلقة المغلقة في ميكانيزمات الروبوتات المتوازية.

فإذا كان التمثيل الديناميكي لفضاء المهمة للروبوت بغياب هذه القيود هو:

$$F = \Lambda(\theta)\dot{V} + \gamma(\theta, V) + \eta(\theta)$$

بالتالي فإن التمثيل الديناميكي بوجود تلك القيود سيكون:

$$F = \Lambda(\theta)\dot{V} + \gamma(\theta, V) + \eta(\theta) + A^T(X)\lambda \quad , \quad F_{app} = A^T(X)\lambda \qquad (10.40)$$

حيث $\lambda \in R^k$ هي عبارة عن مضاعفات لاغرانج Lagrange، و F_{app} هي عبارة عن القوة التي يطبقها الروبوت على القيود.

وبما أن المعادلة (10.39) يجب أن تكون محققة في أي وقت، فإنه يمكن أن نستخدم المشتق الزمني لهذه المعادلة بدلاً منها:

$$A(X)\dot{V} + \dot{A}(X)V = 0 \qquad (10.41)$$

والآن، وبحل المعادلة (10.40) من أجل $\dot{V}$، وبالتعويض في المعادلة (10.41)، ومن ثم إيجاد الحل من أجل λ، فإننا نجد:

$$\begin{aligned}\lambda &= (A\Lambda^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\big(A\Lambda^{-1}(F-\gamma-\eta)+\dot{A}V\big)\\ &= (A\Lambda^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\big(A\Lambda^{-1}(F-\gamma-\eta)+A\dot{V}\big) \qquad (10.42)\end{aligned}$$

ومن خلال المعادلة (10.42)، يمكننا حساب القوى $F_{app} = A^T(q)\lambda$ والتي يقوم الروبوت بتطبيقها على القيود.

وبتعويض المعادلة (10.42) في المعادلة (10.40) وإجراء بعض العمليات الحسابية، فإن معادلات التمثيل الديناميكي بوجود القيود والتي عددها n يمكن التعبير عنها بشكل معادلات حركة مستقلة عددها $n - k$، كالتالي:

$$P(X)F = P(X)\left(\Lambda(\theta)\dot{V} + \gamma(\theta,V) + \eta(\theta)\right) \qquad (10.43)$$

حيث:

$$P = I - A^T(A\Lambda^{-1}A^T)^{-1}A\Lambda^{-1} \qquad (10.44)$$

و I هي عبارة عن المصفوفة الواحدية. المصفوفة P(X) ذات الأبعاد $n\times n$ لها الرتبة $n - k$، وهي تقوم بإسقاط أية قوة F من قبل الروبوت المناول على الفضاء الفرعي للقوى التي تقوم بتحريك النهاية العاملة للروبوت بشكل يتماشى مع القيود. في حين أن المصفوفة $I - P(X)$ ذات الرتبة k تقوم بإسقاط القوة F على الفضاء الفرعي للقوى التي يقاوم هذه القيود. ولذلك فإن P تقوم بتقسيم فضاء القوى ذي البعد n إلى القوى التي تعالج مسألة التحكم بالحركة، وإلى القوة التي تعالج مسألة التحكم بالقوى.

إن المتحكم الهجين بالحركة والقوة هو ببساطة يجمع بين مهمتي التحكم بالحركة في فضاء المهمة (وذلك عن طريق قانون التغذية الراجعة الخطية (10.31))، والتحكم بالقوة في فضاء المهمة وفق القانون (10.35)، وذلك بعد إسقاطهما على الفضاء الفرعي للقوى الموافق:

$$\begin{aligned}\tau = J^T(\theta)\Big[&P(X)\Big(\widehat{\Lambda}(\theta)\Big[\dot{V}_d + K_pX_e + K_i\int X_e(t)dt + K_dV_e\Big]\Big)\\ &+ \big(I + P(X)\big)\Big(F_d + K_{fp}F_e + K_{fi}\int F_e(t)dt\Big)\\ &+ \hat{\gamma}(\theta,V) + \hat{\eta}(\theta)\Big] \qquad (10.45)\end{aligned}$$

حيث الحد المضروب بـ P(X) في السطر الأول يمثل الجزء المخصص للتحكم بالحركة، في حين أن الجزء المضروب بـ $I - P(X)$ في السطر الثاني يمثل الجزء المخصص للتحكم بالقوة. أما الحدين الموجودين في السطر الثالث فيمثلان التعويضات الغير خطية في المعادلة الديناميكية.

وبما أن التمثيل الديناميكي للمتحكمين تم تحليله عن طريق الإسقاطين المتعامدين P و I – P، فإن هذا المتحكم الهجين سيكون له نفس الأخطاء الديناميكية ونفس تحاليل الاستقرار لكل من نظام التحكم بالحركة ونظام التحكم بالقوة وذلك بتعاً للفضاء الفرعي الموافق.

إن إحدى الصعوبات التي يمكن أن تواجهنا عند تطبيق قانون التحكم (10.45) عندما تكون البيئة المحيطة بالروبوت صلبة هي المعرفة الدقيقة للقيود النشطة $A(X)V = 0$ في أي وقت كان. وهذا الأمر ضروري من أجل تحديد الحركة والقوة المطلوبتين ومن أجل حساب الإسقاطات، ولكن في الحقيقة، لا يخلو أي نموذج ممثل للبيئة من بعض النقص في مستوى الدقة. وهناك منهجية متبعة من أجل التعامل مع هذه القضية وهي تتلخص باستخدام خوارزمية تقدير الزمن الحقيقي من أجل تعريف اتجاه القيود استناداً إلى المعلومات القادمة من التغذية الراجعة للقوة. وهناك طريقة أخرى تقتضي التضحية بدرجة أداء المتحكم وذلك عن طريق اختيار قيم أرباح قليلة في عملية التحكم عن طريق التغذية الراجعة، وهذا ما يجعل المتحكم بالحركة "ناعماً" ويصبح المتحكم بالقوة أكثر تسامحاً مع أخطاء القوة. ويمكن أيضاً أن نقوم بتزويد هيكل الروبوت بأنظمة مطاوعة ذات انفعال امتصاصي Passive Compliance (كالنوابض مثلاً) من أجل الحصول على تأثير مشابه. وفي جميع الأحول، فإن مرونة المفاصل والوصلات قد تكسب الروبوت بعضاً من هذا النوع من المطواعية.

10.5. التحكم بالمقاومة Impedance Control:

إن التحكم الهجين المثالي بالحركة والقوة في البيئات الصلبة يتطلب التركيز على مسألة مقاومة الروبوت Robot Impedance، والتي تشخص حركة نقطة النهاية للروبوت على شكل تابع لاضطرابات القوى. فالتحكم بالحركة المثالي يكون موافقاً للمقاومة العالية (وجود تغير ضئيل في الحركة بسبب حدوث الاضطرابات في القوى) في حين أن التحكم المثالي بالقوة يكون موافقاً للمقاومة المنخفضة (وجود تغير ضئيل في القوة بسبب حدوث الاضطرابات في الحركة). وفي التطبيقات العملية، تكون هناك بعض الحدود على معدل المقاومة الذي يستطيع الروبوت تحقيقه.

وسنقوم في هذه الفقرة بدراسة مسألة التحكم بالمقاومة، حيث يحاكي الروبوت في هذه الحالة خصائص المخمد المزود بكتلة ونابض[6]. على سبيل المثال، الروبوت المستخدم في جهاز المحاكاة الجراحي اللمسي Haptic Surgical Simulator والذي تكون مهمته أحياناً هي محاكاة خصائص التخميد والصلابة والكتلة للمعدات الجراحية الافتراضية والتي تكون على تماس مع الأنسجة الافتراضية.

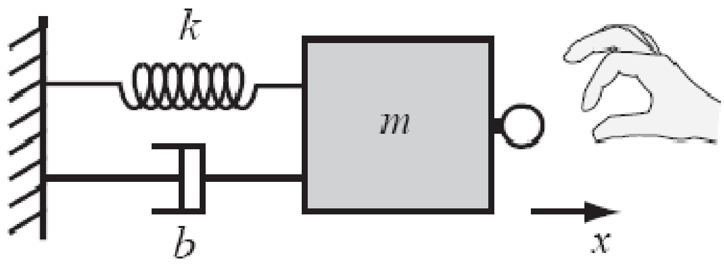
ومن أجل بيئة ذات درجة حرية واحدة ويمكننا أن نكتب:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \qquad (10.46)$$

حيث x هي عبارة عن الموقع، و m هي الكتلة، و b هو التخميد، و k هي عبارة عن الصلابة. والقوة f هي عبارة عن القوة المطبقة على هذا النظام (الشكل (10.17)). وبصورة عامة، فإننا

[6] إحدى التصنيفات الفرعية للتحكم بالمقاومة هي مايسمى بالصلابة Stiffness أو التحكم بالمطاوعة، حيث يقوم الروبوت بمحاكاة النابض الافتراضي فقط.

نطلق على جملة البارامترات {m,b,k} اسم المقاومة. وبالتالي فإنه يمكن القول أن البيئة تمتلك مقاومة عالية إذا كان واحد او أكثر من هذه البارامترات كبيراً (عادة ما يكون البارامتر b أو k). وبالمثل، فإننا نقول أن المقاومة منخفضة إذا كانت جميع البارامترات ذات قيم صغيرة.



الشكل 10.17: روبوت يحاكي بيئة افتراضية ذات درجة حرية واحدة ويمثل خصائص التخميد والكتلة والنابض. يد الإنسان تقوم بتطبيق قوة على هذا النظام.

وبإجراء تحويل لابلاس Laplace على المعادلة (10.46)، نجد:

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = F(s) \qquad (10.47)$$

وتعرف المقاومة على أنها تابع التحويل من اضطرابات في الموقع إلى قوى، ويعبر عن ذلك بـ $Z(s) = F(s)/X(s)$. وبالتالي فإن المقاومة هي تابع للتردد Frequency، مع استجابة تردد منخفضة يتحكم بها النابض واستجابة تردد عالية تتحكم بها الكتلة. إن مفهوم السماحية Admittance هو معاكس لمفهوم المقاومة، أي أن $Y(s) = Z^{-1}(x) = X(s)/F(s)$.

إن المتحكم بالحركة الجيد يمكن تشخيصه خلال المقاومة العالية (السماحية القليلة)، حيث يكون $\Delta X = Y\Delta F$. فإذا كانت السماحية Y قليلة، فإن اضطرابات القوى ΔF تنتج اضطرابات صغيرة في الموقع فقط ΔX. وبصورة مشابهة، فإن المتحكم بالقوة الجيد يمكن تشخيصه من خلال المقاومة المنخفضة (السماحية العالية)، حيث يكون $\Delta F = Z\Delta X$، والقيم الصغيرة لـ Z تعني أن اضطرابات الحركة ينتج عنها اضطرابات صغيرة في القوى فقط.

إن الهدف من التحكم بالمقاومة هو تحقيق السلوك المرغوب في فضاء المهمة أو العمل:

$$D\dot{V} + BV + KX = F_{ext} \qquad (10.48)$$

حيث $X \in R^n$ و $V = \dot{X}$ وهما عبارة عن الموقع والسرعة في فضاء المهمة. D و B و K هي عبارة عن قيم موجبة تمثل العطالة الافتراضية والتخميد الافتراضي والصلابة الافتراضية التي ينبغي على الروبوت أن يحققها. والقوة F_{ext} هي القوة المطبقة على الروبوت. إن قيم كل من D و B و K يمكن أن تتغير تبعاً لتغير الموقع في النظام البيئي الافتراضي وذلك للتمييز بين الأجسام بصورة لحظية، ولكننا سنركز على الحالة التي تكون فيها هذه القيم ثابتة.

يمكن أن نستبدل X و V في معادلة السلوك (10.48) ونضع بدلاً منهما $X(t) - X_{ref}(t)$ و $V(t) - V_{ref}(t)$. فإذا كان المقدار $X_{ref}(t)$ يتغير مع الزمن، فإنه سيقوم "بسحب" الروبوت بصورة تقريبية على طول مسار الحركة. وهذا يسمح لنظام التحكم بالمقاومة بتحقيق التحكم

بالحركة، تماماً كما هو الحال بالنسبة للمتحكم PD في فضاء المهمة. وكلما كانت قيمة الصلابة والتخميد كبيرتان، كلما زاد ذلك من دقة التتبع للمسار.

وهناك على الأقل طريقتان من أجل تحقيق السلوك المرغوب (المعادلة (10.48)):

- الروبوت يتحسس الحركات ويرسل الأوامر إلى المفاصل من أجل توليد عزوم الدوران التي تؤدي إلى تحقيق القوة F_{ext}، ويتم إظهار القوة للمستخدم. مثل هذا الروبوت يقال عنه بأنه يتم التحكم به عن طريق المقاومة Impedance Controlled Robot، وذلك لأنه يقوم بتنفيد تابع التحويل Z(s) الذي يقوم بتحويل الحركات إلى قوى. إن الروبوتات التي تندرج تحت هذا النوع تميل لأن تكون خفيفة الوزن وذات قابلية للقيادة الخلفية Back-Drivable. وهذه الروبوتات جيدة في المجالات التي تتطلب مقاومة منخفضة، وهي غير مناسبة في المجالات التي تكون فيها البيئة ذات مقاومة وصلابة مرتفعة.

- الروبوت يتحسس القوة F_{ext} من خلال استخدام حساس القوى والعزوم المعصمي (سداسي المحاور)، ومن ثم يتحكم بالحركة كاستجابة لذلك. ومثل هذا الروبوت يقال عنه بأنه يتم التحكم به عن طريق السماحية Admittance Controlled Robot، وذلك لأنه يقوم بتنفيذ تابع التحويل Y(s) والذي يقوم بتحويل القوى إلى حركات. والروبوتات المندرجة ضمن هذا النوع تميل لأن تحتوي على منظومات مسننية كثيرة. وبصورة عامة، هي مناسبة في المجالات التي تكون فيها البيئة ذات مقاومة وصلابة مرتفعة، وغير مناسبة في المجالات التي تكون فيها البيئة ذات مقاومة منخفضة.

10.5.1. خوارزمية التحكم بالمقاومة:

في خوارزمية التحكم بالمقاومة، عادة ما يتم استخدام حساسات لقياس عدد الدورات Encoders، ومقاييس لقياس سرعة الدوران (التاكومتر) Tachometer، وربما يتم استخدام مقاييس لقياس التسارعات Accelerometers، وذلك من أجل تقدير مواقع ودورانات وسرعات وتسارعات المفاصل والنهاية العاملة للروبوت. وفي أغلب الأحيان لا تكون الروبوتات مجهزة بحساس قياس القوة - العزم، وبدلاً من ذلك يتم الاعتماد على قابلية هذه الروبوتات على التحكم الدقيق بعزوم الدوران في مفاصلها مع وجود قدر قليل من الاحتكاك من أجل إظهار قيمة القوة عند النهاية العاملة للروبوت للمستخدم F_{ext} (من المعادلة (10.48). وقانون التحكم المثالي يمكن أن يكون بالشكل:

$$\tau = J^T(\theta)\left[\hat{\Lambda}(\theta)\dot{V} + \hat{\gamma}(\theta, V) + \hat{\eta}(\theta) - \left(D\dot{V} + BV + KX\right)\right] \qquad (10.49)$$

حيث يمثل الحد الأول من بين الحدين الموجودين داخل القوسين التعويضات الديناميكية للذراع، في حين يمثل الحد الثاني القوة التي يتعرض لها الروبوت F_{ext}. وإن إضافة حساس القوة - العزم إلى النهاية العاملة للروبوت سيتيح لنا استخدام الحد المتعلق بالتغذية الراجعة من أحل الحصول بدقة أكثر على القوة F_{ext} المطلوبة.

في قانون التحكم (10.49)، يفترض أن كلاً من $\dot{V}$ و V و X يتم قياسهم بشكل مباشر. وقد تكون مسألة قياس التسارع $\dot{V}$ أمراً صعباً، وقد تكون هناك مشكلة في محاولة تعويض عطالة

الروبوت بعد أن يتم تحسس التسارع. ولذلك، فمن الشائع أن يتم التخلص من حد تعويضات العطالة $\Lambda(\theta)\dot{V}$ وأن يتم جعل $D = 0$. وسيبقى تأثير العطالة ظاهراً بكل الأحول، ولكن الروبوتات التي يتم التحكم بها عن طريق المقاومة عادة ما يتم تصميمها بحيث تكون خفيفة الوزن من أجل الحد قدر الإمكان من تأثيرات العطالة.

بالإضافة إلى ذلك، فإنه يمكن أن تنشأ حالة من عدم الاستقرار عند استخدام المعادلة (10.49) من أجل محكاة البيئات الصلبة. حيث إن تغيرات صغيرة في الموقع، والتي يتم قياسها على سبيل المثال من قبل مقاييس عدد الدورات Encoders، تؤدي إلى تغيرات كبيرة في عزم دوران المحرك. وهذا الأمر بالإضافة إلى حدوث بعض التأخيرات في الاستجابة، وبسبب عدم الدقة الكافية للحساسات وأخطاء التحسس الناتجة منها، يؤدي إلى نشوء سلوك تذبذبي للروبوت. ولهذا السبب، تكون الروبوتات المناورة الخفيفة الوزن هي المرغوبة أكثر عند استخدام التحكم بالمقاومة.

10.5.2. خوارزمية التحكم بالسماحية:

في خوارزمية التحكم بالسماحية، يتم تحسس القوة المطبقة على الروبوت F_{ext} باستخدام حساس القوة - العزم المعصمي (سداسي المحاور)، والروبوت سيستجيب لهذه القوة بإعطاء تسارع للنهاية العاملة للروبوت بما يحقق المعادلة (10.48). وإن أبسط الطرق هو حساب تسارع النهاية العاملة للروبوت المطلوب $\dot{V}_d$ وفقاً لـ:

$$D\dot{V}_d + BV + KX = F_{ext}$$

حيث (X,V) هو عبارة عن تمثيل الوضع الحالي. وبالحل نجد:

$$\dot{V}_d = D^{-1}(F_{ext} - BV - KX) \qquad (10.50)$$

وبمعرفة كل من $\dot{V}_d$ و V و X، فإنه بإجراء عملية التكامل على الخطوة الزمنية للمؤازرة، يمكن الحصول على السرعة والموقع X_d و V_d. وبعد ذلك يمكن تعويض كل من X_d و V_d و $\dot{V}_d$ في معادلة التحكم عن طريق التغذي الراجعة الخطية (10.31) من أجل جعل الاستجابة تبدو أنعم وأسلس.

إن محاكاة البيئة منخفضة المقاومة يعد مسألة مهمة بالنسبة لصياغة خوارزمية التحكم بالسماحية، وذلك بسبب أن المقادير القليلة من القوى ستتسبب بتسارعات كبيرة. ولذلك تكون الروبوتات الحاوية على منظومات مسننية كثيرة هي المرغوبة أكثر في حال كان المطلوب هو استخدام التحكم بالسماحية بسبب قدرتها على محاكاة البيئات الصلبة.

10.6. موضوعات أخرى:

التحكم المتين Robust Control: على الرغم من أن جميع المتحكمات عن طريق التغذية الراجعة تتصف ببعض المتانة تجاه التأثيرات التي لا يمكن ضبطها بشكل تام، إلا أن المجال الذي يتمحور حول التحكم المتين يركز حول موضوع تصميم المتحكمات والتي تضمن وبشكل كبير جودة أداء الروبوت الذي من الممكن أن يتأثر بجملة من البارامترات قد تتسم بصعوبة تحديدها

بشكل دقيق. على سبيل المثال، الصعوبة التي تواجهنا عند محاولة تقدير خصائص العطالة للروبوت.

التحكم التأقلمي Adaptive Control: إن موضوع التحكم التأقلمي بالروبوتات يدور حول تقديرات بارامترات العطالة للروبوت خلال مرحلة التنفيذ، وتحديث قانون التحكم في الزمن الحقيقي من أجل توحيد هذه التقديرات.

التحكم عن طريق التعلم المتكرر Iterative Learning Control (ILC): تركز أنظمة التحكم عن طريق التعلم المتكرر على المهمات والوظائف ذات الطبيعة التكرارية. على سبيل المثال، إذا كان الروبوت يؤدي مهمة التقاط الجسم ونقله من مكان لآخر مرة تلوة المرة، فإنه يمكن استخدام أخطاء مسار الحركة الناتجة عن التنفيذ الأول للعملية لتعديل نظام التحكم عن طريق التغذية الأمامية من أجل إجراء التنفيذ التالي للمهمة بشكل دقيق أكثر. وبهذه الطريقة، يقوم الروبوت بتحسين أداء عمله مع الوقت حيث تتقارب أخطاء التنفيذ إلى الصفر شيئاً فشيئاً. تختلف متحكمات ILC عن المتحكمات التأقلمية من حيث أن المعلومات التي يتم "تعلّمها" لا يمكن توصيفها بشكل بارامتري بصورة عامة، وفي كون متحكمات ILC تركز على مسار واحد للحركة فقط.

المطاوعة الذاتية Passive Compliance والروبوتات المناورة المرنة: جميع الروبوتات وبصورة قطعية تمتلك شيئاً من المطاوعة الذاتية. وبعض من نماذج هذه المطاوعة يمكن أن يكون بسيطاً كوجود نابض التوائي (حلزوني) في كل مفصل دوراني (وذلك في حال استخدام المحركات التوافقية Harmonic Drive Motor والتي يكون فيها الجزء المسنن الداخلي المرن قليل الصلابة) أو يكون معقداً كمعاملة الوصلات على أنها جوائز Beams مرنة. وهناك تأثيران مهمان للمرونة Flexibility هما: (1) عدم التوافق بين قراءة زاوية المحرك والزاوية الحقيقة للمفصل. و (2) زيادة درجة المعادلات الديناميكية للروبوت. وهذه القضايا تزيد من صعوبة مسألة التحكم بالروبوتات.

هناك بعض الروبوتات صممت بحيث تمتلك أنظمة مطاوعة ذاتية بدرجة عالية، وبشكل خاص تلك الروبوتات التي تكون على تماس وتفاعل مباشر مع الإنسان أو البيئة. في مثل هذه الروبوتات قد تتم التضحية بإداء نظام التحكم بالموقع لصالح زيادة عامل الأمان.

أنظمة التحريك المتغيرة المقاومة Variable Impedance Actuators: عادة ما يتم التحكم بمقاومة المفصل من خلال قانون التحكم عن طريق التغذية الراجعة، كما رأينا في الفقرة (10.5). ولكن هناك حدود لهذا التحكم، حيث يمكن التحكم بالمفصل بشكل فعال على أنه نابض فقط في حال الترددات المنخفضة للاضطرابات.

وهناك صنف جديد من أنظمة التحريك يسمى بأنظمة التحريك المتغيرة المقاومة أو المتغيرة الصلابة Stiffness، والتي تقوم بمساعدة جملة التحريك على الحصول على المقاومة الميكانيكية المطلوبة بدون وجود أية حدود أو مقيدات على قانون التحكم المطبق. فعلى سبيل المثال، يمكن لأنظمة التحريك المتغيرة المقاومة أن تجمع بين محركين بشكل يسمح لنظام التحريك بالتحكم بشكل مستقل بصلابة أو مقاومة المفصل، وبالتالي بعزم الدوران الناتج عن نظام التحريك هذا.

تم بحمد الله

المراجع

References

ملاحظة: المراجع مرتبة أبجدياً.

1- A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, R. M. Murray - Z. Li - S. S. Sastry, CRC Press 1994, United States of America.

2- Advanced Engineering Dynamics, H. R. Harrison - T. Nettleton, Arnold 1997, United Kingdom.

3- Advanced Engineering Mathematics, E. Kreyszig - H. Kreyszig - E. J. Norminton, 10th Edition, Wiley 2011, United States of America.

4- Advances in Polynomial Continuation for Solving Problems in Kinematics, ASME - Journal of Mechanical Design - Vol. 126 March 2004, A. J. Sommese - J. Verschelde - C. W. Wampler, United States of America.

5- An Introduction to Numerical Analysis, K. E. Atkinson, 2nd Edition, Wiley 1989, United States of America.

6- Animating Rotation with Quaternion Curves, Siggraph - Volume 19, Number 1985, K. Shoemaker, United States of America.

7- Compliance Controlof Robot Manipulator for Safe physical Human Robot Interaction, M. R. Ahmed, Orebro University 2011, Sweden.

8- Control of Robot Manipulators in Joint Space, R. Kelly - V. Santibanez - A. Loria, Springer 2005, Germany.

9- Design of Mechanical Properities for Serial Manipulators, B. M. Hill, Doctorate of Phelosophy Dissertation, University of Texas 1997, United States of America.

10- Dynamics of Mechanical Systems, H. Josephs - R. L. Huston, CRC Press LLC, 2002, United States of America.

11- Elementary Linear Algebra, H. Anton – C. Rorres, 7th Edition, Wiley 1994, United States of America.

12- Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods and Alghorithms, J. Angeles, 3nd Edition, Springer 2003, United States of America.

13- Geometric Fundamentals of Robotics, J. M. Selig, 2nd Edition, Springer 2003, United States of America.

14- Handbook of Mathematical Functions: Formulas, Graphs and Mathematical Tables, M. Abramowitz - I. A. Stegun, 10th Edition, Department of Commerce 1972, United States of America.

15- Handbook of Robotics, B. Siciliano - O. Khatib - Editors, Springer 2008, Germany.

16- Industrial Robotics: Theory, Modeling and Control, Editor: S. Cubero, pro literatur Verlag 2007, Germany.

17- Introduction to Robotics, H. H. Asada, Massachusetts Institute of Technology - Department of Mechanical Engineering 2005, United States of America.

18- Introduction to Robotics: Mechanics and Control, J. J. Craig, 2nd Edition, Addison Wesley Longman 1989, Canada.

19- Introduction to Statics and Dynamics, A. Ruina - R. Pratap, Pre-print for Oxford University Press 2002, United Kingdom.

20- Modeling, Performance Analysis and Control of Robot Manipulators, E. Dombre - W. Khalil, ISTE Ltd 2007, United Kingdom.

21- Newton-Raphson Method of Solving a Nonlinear Equation, A. Kaw, Lecture in University of South Florida - Holistic Numerical Methods Institute, United States of America.

22- Numerical Methods for Scientists and Engineers, H. M. Antia, Birkhauser 2002, Switzerland.

23- On Computing Three-Finger Force-Closure Grasps of 2D and 3D Objects, IEEE – Robotic and Automation (Vol. 19, No. 1), February 2003, J. W. Li - H. Lio - H. G. Cai, United States of America.

24- On Quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra, W. R. Hamilton (Philosophical Magazine, (1844-1850)), Editor: D. R. Wilkins, Cambridge University Press 2000, United Kingdom.

25- On the Existence and Synthesis of Multifinger Positive Grips, B. Mishra - J. T. Schwartz - M. Sharir, New York University - Dept. of Computer Science 1986, United States of America.

26- Operational Research: Applications and Algorithms, 4th Edition, W. L. Winston, Thomson 2004, Canada.

27- Rigid Body Dynamics Algorithms, R. Featherstone, Springer 2008, United States of America.

28- Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators, L. W. Tsai, Wiley 1999, Canada.

29- Robot Dynamics and Control, M. W. Spong, University of Illinois at Urbana-Champaign - Department of General Engineering 2007, United States of America.

30- Robot Kinematics and Dynamics, H. Bruyninckx, Katholieke Universiteit Leuven - Department of Mechanical Engineering 2010, Belgium.

31- Robot Mechanices and Control, F. C. Park, Seoul National University 2014, South Korea.

32- Robot Modeling and Control, M. W. Spong - S. Hutchinson - M. Vidyasagar, 1st Edition, Wiley 2005, United States of America.

33- Robotics: Modelling, Planning and Control, B. Siciliano - L. Sciavicco - L. Villani - G. Oriolo, Springer 2009, United States of America.

34- Robotics and Automation Handbook, T. R. Kurfess, CRC Press 2005, United States of America.

35- Robotics and Control, R. K. Mittal - I. J. Nagrath, 6th Edition, Tata McGraw-Hill 2007, India.

36- Singularity Analysis of Closed Kinematic Chains, ASME - Journal of Mechanical Design - Vol. 121 March 1999, F. C. Park - J. W. Kim, United States of America.

37- Statics and Dynamics with Background Mathematics, A. P. Roberts, Cambridge University Press 2003, United Kingdom.

38- Synthesis of Stable Force Closure Grasps, V. D. Nguyen, Massachusetts Institute of Technology – Department of Electrical Engineering and Computer Science 1986, United States of America.

39- Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics and Control, R. N. Jazar, 2nd Edition, Springer 2010, United States of America.