وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان

كلية التربية

قسم الرياضيات

2020-2021

مقاييس الألتواء والتفلطح

بإشراف:

م.د سارة عبدالحسين بندر

إعداد الطالبة:

زينب اباذر محمد

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مقدمة :

تكلمنا في الفصول السابقة عن مقياسين من المقاييس الوصفية التي تصف التوزيعات التكرارية وهما مقاييس التوسط « لايجاد القيمة المتوسطة التي تتمركز حولها مفردات التوزيع » ومقاييس التشتت او الاختلاف « لايجاد درجة تشتت هذه المفردات حول تلك القيمة المتوسطة »

وسنأخذ مقاييس اخرى تحدد شكل المنحنى من حيث التماثل او الالتواء من جهة ، وتدبب القمة او تفلطحها من جهة اخرى وسندرس اولا العزوم ... « لانها تدخل في تقدير هذه المقاييس »

١. العزوم
اوما يسمى بالعزوم المركزية

هي مقاييس شبيهة من حيث طريقة حسابها بالتباين ، وتستخدم غالبا لحساب مقاييس الالتواء وتحديد جهة التواء توزيع البيانات وكذلك تستخدم في حساب مقاييس التطاول وتحديد طبيعة تطاول توزيع البيانات .

وتحسب العزوم المركزية من مراتب :
من المرتبة K يساوي :

من البيانات الاولية $M_K = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^K}{n}$

من البيانات المرتبة $M_K = \frac{\Sigma n_i (x_i - \bar{x})^K}{n}$

من البيانات المبوبة $M_K = \frac{\Sigma n_i (x_i - \bar{x})^K}{n}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

خواص العزوم المركزية :

1. العزم المركزي من المرتبة صفر يساوي الواحد دوماً ، اي $M_0 = 1$
2. العزم المركزي من المرتبة الاولى يساوي الصفر دوماً اي $M_1 = 0$
3. العزم المركزي من المرتبة الثانية يساوي الواحد التباين اي $M_2 = \sigma^2$
4. العزوم المركزية من المراتب الزوجية موجبة دوماً ، اي $M_4, M_6, M_8 \ldots > 0$
5. العزوم المركزية من المراتب الفردية تكون اما موجبة او سالبة او صفر $M_3, M_5, \ldots = 0$

ولحساب تلك المقاييس نستخدم نظرية العزوم.

1) العزم الرائي حول الصفر

أ- البيانات غير المبوبة :

$$y'^r = \frac{\sum y_i^r}{n}$$

فالعزم الاول حول الصفر هو الوسط الحسابي $y'^1 = \frac{\sum y_i^1}{n}$

اما العزم الثاني حول الصفر فهو $y'^2 = \frac{\sum y_i^2}{n}$ وهكذا ...

ب- البيانات المبوبة

$$\bar{y}^r = \frac{\sum f_i y_i^r}{\sum f_i}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2- العزم الرائي حول الوسط الحسابي

أ- للبيانات غير المبوبة

$$m_r = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^r}{n} \quad \text{(فاذا كانت } r=1 \text{ فان } m_1 = 0)$$

واذا $r=2$ فان:

$$m_2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{SS}{n} = \sigma^2$$

ب- للبيانات المبوبة:

$$m_r = \frac{\sum f_i (y_i - \bar{y})^r}{\sum f_i}$$

مثال 1) اوجد العزم الاول والثاني والثالث (حول الصفر) للبيانات التالية:

$$y_i = 4, 7, 5, 9, 8, 3, 6$$

الحل:

$$\bar{y}_i^r = \frac{\sum y_i^r}{n}$$

العزم الاول هو

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+7+5+9+8+3+6}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

والعزم الثاني هو

$$\bar{y}^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} = \frac{4^2+7^2+5^2+9^2+8^2+3^2+6^2}{7} = 40$$

والعزم الثالث هو

$$\bar{y}^3 = \frac{\sum y_i^3}{n} = \frac{4^3+7^3+5^3+9^3+8^3+3^3+6^3}{7} = 288$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال 2/ اوجد العزم الاول والثاني والرابع حول الوسط الحسابي للبيانات

$y_i = 4, 7, 5, 9, 8, 3, 6$

الحل:

$$m_r = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^r}{n}$$

فالعزم الاول حول الوسط الحسابي = صفر لان

$$m_1 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

اما العزم الثاني حول الوسط الحسابي فهو

$$m_2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}$$

$$= \frac{(4-6)^2 + (7-6)^2 + (5-6)^2 + (9-6)^2 + (8-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2}{7}$$

$$\therefore \boxed{m_2 = 4}$$

اما العزم الرابع حول الوسط الحسابي

هو:

$$m_4 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^4}{n}$$

$$= \frac{(4-6)^4 + (7-6)^4 + (5-6)^4 + (9-6)^4 + (8-6)^4 + (3-6)^4 + (6-6)^4}{7} = 25.86$$

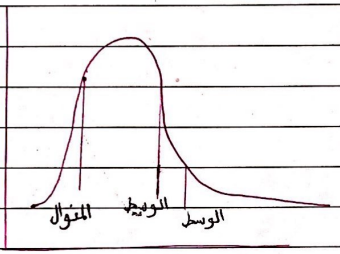
$$\therefore \boxed{m_4 = 25.86}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مقاييس الالتواء

الالتواء هو انحراف منحنى التوزيع التكراري عن التماثل وقد يكون الالتواء موجب (اي الالتواء الى اليمين) أو سالب (اي الالتواء الى اليسار)

ومنحنى التوزيع ذو الالتواء الموجب تكون مفرداته متمركزة في الجهة اليسرى (عند الفئات الدنيا) وطرفه يمتد الى اليمين

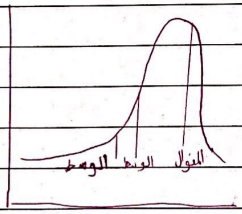


الوسط اكبر من الوسيط اكبر من المنوال

(منحنى ملتوي التواء موجباً "نحو اليمين")

حيث المنحنى له ذيل اكبر الى يمين النهاية العظمى للمنحنى عن يسارها ويقع الوسط الحسابي يمين المنوال (اي الوسط اكبر من المنوال)

اما منحنى التوزيع ذو الالتواء السالب فان مفرداته تتمركز في الجهة اليمنى (عند الفئات العليا) بينما طرفه يمتد الى اليسار.

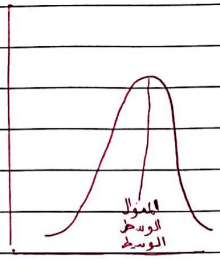


المنوال اكبر من الوسيط اكبر من الوسط

منحنى ملتوي التواء سالباً "نحو اليسار"

حيث المنحنى له ذيل اكبر الى يسار النهاية العظمى للمنحنى عنه الى يمينها ويقع الوسط الحسابي يسار المنوال (المنوال اكبر من الوسط)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



(منحنى متماثل) لان الوسط = الوسيط = المنوال

انواع معاملات الالتواء : (مقاييس الالتواء)

أ- معامل الالتواء الاول (حول المنوال α_1)

$$\alpha_1 = \frac{(\bar{y} - M_o)}{\text{الانحراف القياسي}}$$

(الوسط الحسابي - المنوال)

ب- معامل الالتواء الثاني (حول الوسيط α_2)

$$\alpha_2 = \frac{(\bar{y} - M_e)}{\text{الانحراف القياسي}}$$

(الوسط الحسابي - الوسيط)

ج- معامل الالتواء الثالث (باستخدام العزوم α_3)

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}$$

m_3: العزم الثالث حول الوسط الحسابي

$(\sqrt{m_2})^3$: مكعب الجذر التربيعي للعزم الثاني حول الوسط الحسابي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ويمكن حساب مقاييس الالتواء بالشكل التالي:

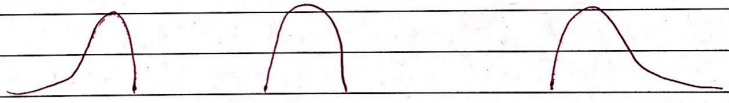
الشكل الاول $Ka = \frac{\bar{X} - M_o}{\sigma}$

الشكل الثاني $Ka = \frac{M_3}{\sigma^3}$

ملاحظة/
ليس بالضرورة ان يعطينا المقياسين السابقين القيمة نفسها ولكن يجب ان يعطينا النتيجة نفسها من حيث جهة الالتواء. فاذا لم يعطينا النتيجة نفسها فيكون البيانات توزيعاً متساوياً.

ولتحديد جهة التواء توزيع البيانات يمكن اتباع الملاحظات ادناه:

1. اذا كان $Ka > 0$ يكون البيانات توزيعاً ملتوياً نحو اليمين.
2. اذا كان $Ka < 0$ يكون البيانات توزيعاً ملتوياً نحو اليسار.
3. اذا كان $Ka = 0$ يكون البيانات توزيعاً منتظماً.



مثال/ احسب معامل الالتواء الاول والثاني والثالث في الجدول التوزيع التكراري:

الفئات	التكرار
50.0 - 59.99	8
60.0 - 69.99	10
70.0 - 79.99	16
80.0 - 89.99	14
90.0 - 99.99	10
100.0 - 109.99	5
110.0 - 119.99	2
المجموع	65

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل:-

نجد اولاً الوسط الحسابي $\frac{\Sigma Xi\,fi}{\Sigma fi}$

التكرار fi	الفئات	مركز الفئة xi	xi fi
8	59.99 - 50.0	54.5	436
10	69.99 - 60.0	63.5	635
16	79.99 - 70.0	72.5	1160
14	89.99 - 80.0	81.5	1141
10	99.99 - 90.0	90.5	905
5	109.99 - 100.0	99.5	497.5
2	119.99 - 110.0	108.5	217
65	المجموع		4991.5 المجموع

+9

مركز الفئة xi = الحد الادنى + $\frac{1}{2}$ (طول الفئة) - 50 + $\frac{1}{2}$ (9) = 54.5

y^1

الوسط الحسابي = $\frac{\Sigma Xi\,fi}{\Sigma fi} = \frac{4991.5}{65} = \boxed{76.79}$

ولايجاد الوسيط نجد جدول التكرار المتجمع الصاعد

التكرار	تكرار المجمع الصاعد
8	8
10	(18)
16	(34)
14	48
10	58
5	63
2	65

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\frac{N}{2} = \frac{\Sigma f}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$ ← نختار رقم اكبر منها او مساوي لها في جدول التكرار الصاعد

$= 34$

$F = 18$, $f = 16$, $L = 70$

$C = 79.99 - 70.0 = 9.99$

$$\bar{M}_e = L + \frac{(\frac{N}{2} - F)}{f} * C$$

$$= 70 + \frac{(\frac{65}{2} - 18)}{16} * 9.99 = 78.99 \simeq 79.06$$

$M_e = 79.06$

ولايجاد المنوال:

$$M_o = L + \frac{(f_1)}{f_1 + f_2} * C$$

$f_1 = 16 - 10 = 6$

$f_2 = 16 - 14 = 2$

$L = 70$

$C = 9.99$

$$= 70 + \frac{6}{6+2} * 9.99$$

$$= 70 + 7.49 = 77.49$$

$M_o = 77.50$

ولايجاد الانحراف المعياري تستخدم القانون

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left[\Sigma f_i x_i^2 - \frac{(\Sigma (f_i x_i)^2}{n} \right]$$

$S = 15,60$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومعامل الالتواء =

$$\alpha_1 = \frac{\bar{y} - Mo}{S} = \frac{79.76 - 77.5}{15.6} = 0.14$$

$$\alpha_2 = \frac{\bar{y} - Me}{S} = \frac{76.79 - 79.06}{15.6} = 0.13$$

ب. α_1, α_2 موجبتان فان المنحنى ملتوي التواء موجباً اي نحو اليمين.

مثال/ احسب معامل الالتواء الثالث لجدول التوزيع التكراري التالي:

الفئات	التكرار
60 - 62	5
63 - 65	18
66 - 68	42
69 - 71	27
72 - 74	8
المجموع	100

الحل/

قبل ايجاد العزوم نجد الوسط الحسابي

$$\frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{\text{مجموع مركز الفئة} \times \text{التكرار}}{\text{مجموع التكرار}}$$

ثم نجد

$$\frac{\sum y_i - \sum (y_i - \bar{y}')^2}{\sum f_i}$$

ثم نجد

كل مركز فئة - الوسط الحسابي

ثم نضرب بالتكرار المقابل لهم

$$\sum (y_i - \bar{y}')^2 * f_i$$

$$\frac{\sum (y_i - \bar{y}')^3 * f_i}{f_i}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

العزم الثاني — العزم الثالث

$M_2 = 8.5275$, $M_3 = -2.6932$

$$\alpha_3 = \frac{M_3}{(\sqrt{M_2})^3} = \frac{-2.6932}{(\sqrt{8.5275})^3} = -0.14$$

لذا فإن المنحنى ملتوي التواء سالباً الى اليسار لان α_3 سالبة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مقاييس التفلطح :

التفلطح او التدبب هو انحراف قمة منحنى التوزيع التكراري عن قمة المنحنى الطبيعي

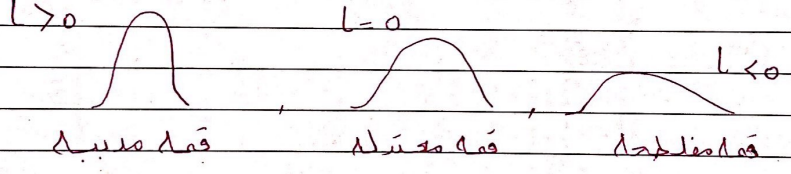
$$L = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3$$

انواع المقاييس

1- اذا كان المقياس موجباً ستكون قمة التوزيع مدببة.
" اي القمة تكون عالية وضيقة حول الوسط الحسابي "

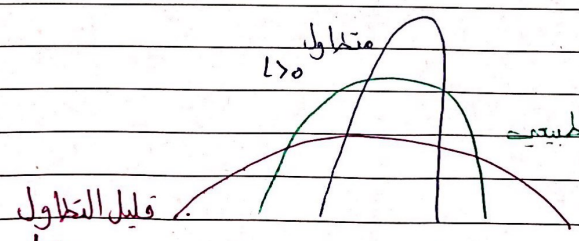
2- اذا كان المقياس سالباً ستكون قمة التوزيع مفلطحة.
" اي القمة تكون منخفضة ومتسعة حول الوسط الحسابي "

3- اذا كان المقياس مساوياً للصفر فان قمة التوزيع معتدلة
" اي القمة المنحنى طبيعية "



معامل التفلطح = العزم الرابع حول الوسط الحسابي / مربع العزم الثاني حول الوسط الحسابي - 3

$$L = \frac{M_4}{M_2^2} - 3$$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال/ احسب معامل التفلطح (L) لجدول التوزيع التكراري

الفئات	التكرار
62 - 60	5
65 - 63	18
68 - 66	42
71 - 69	27
74 - 72	8
المجموع	100

الحل:

$M_2 = 8.5275$

$M_4 = 199.3759$

$$L = \frac{M_4}{M_2^2} - 3$$

$$= \frac{199.3759}{(8.5275)^2} - 3 = -0.26$$

$L < 0$ لذا فان المنحنى له قمة مفلطحة, لان

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner