وزراة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية
قسم الرياضيات

التحليل الرياضي

Mathematical Analysis

اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات

Convergence and divergence test for series

إعداد:
زَيْنَبْ أبَاذَر مُحَمَّد

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Phi(\mathbf{p}, s_z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\text{all space}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\Psi(\mathbf{r}, s_z, t)\,d^3\mathbf{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Psi(\mathbf{r}, s_z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\text{all space}} e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\Phi(\mathbf{p}, s_z, t)\,d^3\mathbf{p}_n$$

المتسلسلة اللانهائية

المتسلسلة اللانهائية من الاعداد الحقيقية

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n + \ldots..$$ هي عبارة عن متتابعة اعداد حقيقية $\{s_n\}$

حيث ان :

$s_1=a_1$

$s_2=a_1+a_2$

$s_3=a_1+a_2+a_3$

:

:

$s_n=a_1+a_2+a_3+\ldots..+a_n$

تُسمى الاعداد a_1،a_2،a_3،.....،a_n حدود المتسلسلة والعدد الحقيقي s_n يُسمى بالمجموع الجزئي النوني للمتسلسلة او المجموع النوني لها احياناً.

هناك عدة اختبارات لمعرفة فيما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة.

١-اختبار النسبة

٢-اختبار التكامل

٣-اختبار الجذر

٤-اختبار المقارنة

٥-اختبار القوى

اختبار النسبة *ratio test*

لتكن $\sum a_n$ متسلسلة و ليكن

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

فان

1. أذا كان $L < 1$ فان المتسلسلة مطلقة التقارب و بالتالي ستكون متقاربة.
2. أذا كان $L > 1$ فان المتسلسلة متباعدة .
3. أذا كان $L = 1$ فان المتسلسلة قد تكون متباعدة أو مشروطة التقارب أو مطلقة التقارب (لذا نستخدم اختبار أخر في هذه الحالة) .

مثال١/

اختبر تقارب أوتباعد المتسلسلة $\sum \frac{n^2}{(n-1)!}$ باستعمال اختبار النسبة

الحل :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1-1)!} \times \frac{(n-1)!}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n!} \times \frac{(n-1)!}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n \times (n-1)!} \times \frac{(n-1)!}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{6n} = 0 < 1$$

$\therefore$ المتسلسلة متقاربة .

مثال٢/

اختبر تقارب أوتباعد المتسلسلة $\sum \frac{2^n}{n}$ باستعمال اختبار النسبة

الحل/

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \times 2^n}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 2 > 1$$

∴ المتسلسلة متباعدة .

مثال٣/

اختبر تقارب أوتباعد المتسلسلة $\sum \frac{3}{n^2+1}$

الحل/

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)^2+1} \times \frac{n^2+1}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} \quad \text{لوبيتال}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1$$

∴ يفشل الاختبار ولغرض معرفة ان المتسلسلة متقاربة او متباعدة يجب علينا تطبيق اختبار آخر مناسب وفي مثل هكذا متسلسلات نستعمل اختبار المقارنة أو اختبار التكامل .

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{3dn}{n^2+1} = 3\lim_{k\to\infty} \tan^{-1} n\Big|_1^k = 3\lim_{k\to\infty} (\tan^{-1} k - \tan^{-1} 1) = 3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

لذا فان المتسلسلة متقاربة .