saadi fatima

الاجابة النموذجية لأعمال الموجهة

جامعة عبد الحميد مهري قسنطينة- 2-

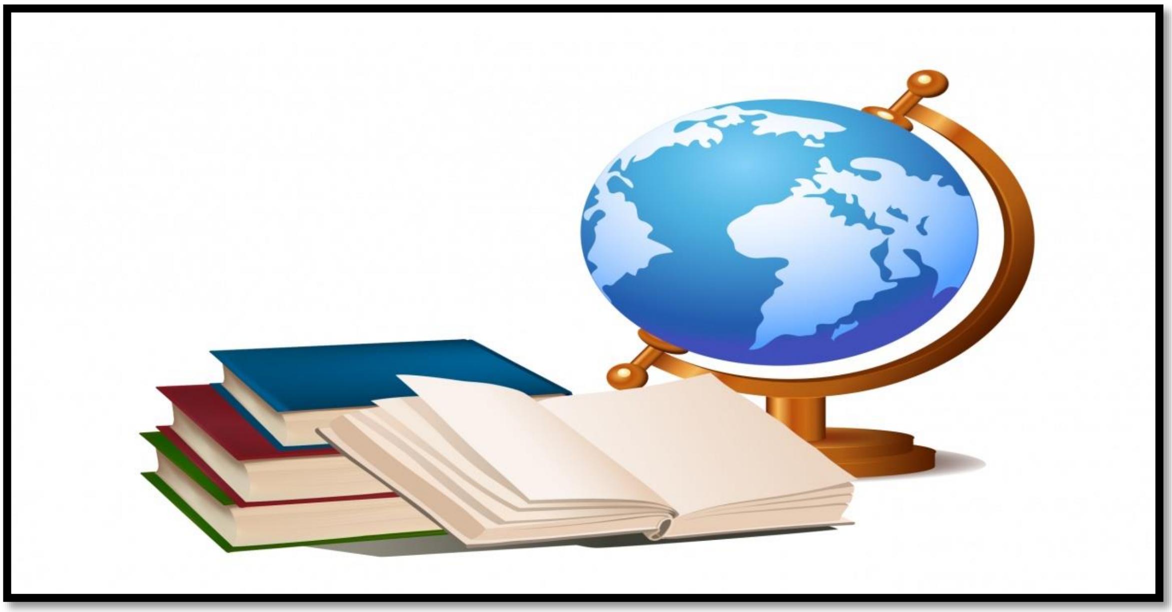
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير

هذا العمل للجميع و قيمته دعوة بالهداية لك و لي
اسال الله التوفيق و السداد فان أصبت فذلك بفضل من الله و منه ، و ان
اخطأت فالرجاء مراسلتي على البريد الالكتروني

kaakaa17000@gmail.com

جمع و تنسيق من اعداد

سعدي فاطمة



2021/2020

مقـــدمـــة

الحمد لله ربنا رب العالمين ورب كل شيء، وصلي اللهم وسلم وبارك على سيدنا وشفيعنا يوم الدين، سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم، وعلى أله وصحبه وسلم،

لقد وفقنا **الله** واجتهدنا لتقديم باقة عمل لمساعدتكم في إتمام وفهم دروس ، متجلية في مجموعة هائلة **من التصحيح النموذجي لسلاسل لأعمال الموجهة في مختلف التخصصات و المقاييس (الاحصاء الرياضي و الرياضيات و الاقتصاد الجزئي) ،المتواجدة في كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير لجامعة عبد الحميد مهري قسنطينة– 2–** ، والتي اقدم الأساتذة الأفاضل على وضعها **لنا مع الاجابة النموذجية لها** ، وحتى نستفيد من خبراتهم، ونقوم بتطوير أنفسنا، وتفادي كل العيوب بإذن **الله تعالى**،،

أسعى من خلالها من إفادتكم بمعلومات كافية تغنيكم عن اللهث وراء جمع هذه المواضيع وحلها النموذجي الذي يأخذ قسطا لا باس به من وقت التحضير لامتحانات، لكي ينتفع به كل من أهتم بهذا الأمر ونحن نقدمه أيضاً إلى كل الأفراد المهتمين بالعلم ، ونحن نأمل ونطمع أن ينال إعجابكم جميعاً، ونتمنى من **الله** أن نكون قد وفقنا الله في ترتيب و تجميع و تنسيق هذا الباقة المتواضعة، وهذا لكي تشمل كل المعلومات التي تطمح أن تجدها في أي بحث المختص بهذا العلم، ونحن يشرفنا أن نستقبل اقتراحاتكم على هذا الباقة، أو أي تعليق على الباقة، ونعدكم أننا سوف نأخذ في الاعتبار كل توجيهاتكم وملاحظاتكم ، **والله الموفق والمستعان** .

ونتمنى من الله عز وجل أن يوفقنا ، ويسدد خطانا وأن يديم علينا نعمته وعلمه، ويحفظنا ويحفظكم جميعاً، ونسأل الله العلي العظيم أن يكتب لنا التوفيق والنجاح.

وأخيرًا لا تنسى مشاركة الموضوع مع أصدقائك على مواقع التواصل الاجتماعي حتى تعم الفائدة.و تكون صدقة جارية .

اللهم وفق جامعها ومعدها وناشرها إلى ما يصبوا إليه.

saadi fatima

قسم جذع مشترك

قسم العلوم المالية و المحاسبة

قسم العلوم الاقتصادية

قسم العلوم التسيير

قسم العلوم التجارية

2020-2019

saadi fatima

جامعة عبد الحميد مهري قسنطينة 02 كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

الجذع المشترك سنة اولى ل م د، المجموعة D السنة الجامعية 2020 /2019

السلسلة الاولى في مقياس الاحصاء01

التمرين الاول: قام بنك القرض الشعبي الوطني بإجراء دراسة احصائية بغرض التعرف على مدى رضا الزبائن المتعاملين معه حول جودة الخدمات الالكترونية المقدمة من طرف البنك

- ما هو الهدف العام من الدراسة؟
- ما هي الوحدة الاحصائية والمجتمع الاحصائي في هذه الدراسة؟
- ما هو المتغير الاحصائي المدروس؟ اذكر نوعه؟
- ما هو الاسلوب المستخدم وماهي المصادر المعتمدة لجمع البيانات في مثل هذه الدراسة؟ علل ذلك؟

التمرين الثاني: حدد المجتمع الاحصائي، الوحدة الاحصائية، الصفة وطبيعتها.

- اطوال 250 طالب في كلية التسيير.
- تصنيف 50 ملاكم حسب الوزن.
- ترتيب 5 ولايات حسب عدد السكان.
- توزيع العمال حسب الشهادات.

التمرين الثالث: صنف المتغيرات التالية حسب نوعها: الجنس، الدخل، عدد الاطفال في الاسرة، لون العينين، الجنسية، ضغط الدم، انواع المنتجات، طول الطلبة، عدد الاسرة في فندق، نقاط الطلبة، المستوى التعليمي.

التمرين الرابع: في مداولات نهاية السنة لتخصص مكون من 30 طالب كانت النتائج كالتالي:

راسب، ناجح، ناجح، منتقل، منتقل، ناجح، ناجح، ناجح، ناجح، راسب، راسب، اسب، ناجح، ناجح، ناجح، ناجح، ناجح، ناجح، منتقل، منتقل، منتقل، منتقل، ناجح، ناجح، ناجح، ناجح، ناجح، ناجح، راسب، منتقل.

- ضع في جدول تكراري هذه البيانات.
- مثل بيانيا هذه النتائج.

التمرين الخامس: اذا كانت لديك مراكز الفئات التالية: 128،138،158،168،178،188 حدد طول الفئة ثم اوجد حدود الفئات.

التمرين السادس: فيما يلي اوزان 80 فأر من فئران التجارب بالغرام وذلك عند دراسة نقص الفيتامين.

132	125	117	124	103	117	110	127	96	129
130	122	118	114	103	119	106	125	114	100
125	128	106	111	115	123	119	114	117	143
136	92	115	118	121	137	139	120	104	125
119	115	101	129	87	108	110	133	135	126
127	103	110	126	118	82	104	137	120	95
146	126	119	105	132	126	118	100	113	119
106	125	117	102	146	129	124	113	95	148

- كون جدول التوزيع التكراري حيث يكون طول الفئة هو9 .
- حدد الحد الادنى للفئة الثالثة، الحد الاعلى للفئة الخامسة، مركز وطول الفئة الثانية، الفئة ذات التكرار الاكبر.
- ارسم المدرج التكراري والمضلع التكراري والمنحنى التكراري.
- ارسم المدرج التكراري النسبي والمضلع التكراري النسبي.
- ارسم المنحنى المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع الهابط.
- اوجد عدد الفئران الذين تقل اوزانهم عن 120 جرام.

سلسلة تمارين رقم 3

التمرين الاول:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (2x + 3y, x - 2y + z)$$

- بين أن هذا التطبيق هو تطبيق خطي
- أوجد أساس و بعد $kerf$
- أوجد أساس و بعد Imf
- هل التطبيق تقابلي و لماذا؟

التمرين الثاني:

ليكن التطبيق

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

- بين أن هذا التطبيق هو تطبيق خطي
- أوجد $kerf$
- استنتج Imf
- هل التطبيق تقابلي و لماذا؟

التمرين الثالث:

- ليكن لدينا:
- $f_1(x, y, z) = x - y;\ f_2(x, y, z) = y - z$
- $E = \{(x, y, z) \in IR^3 : f_1 = 0 \wedge f_2 = 0\}$
- بين ان E هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء IR^3 على الحقل IR, ثم اوجد اساس و بعد E.
- ليكن :

$$f(x, y, z) = (f_1, f_2, z)$$

- بين أن هذا التطبيق هو تطبيق خطي.
- اوجد النواة و بعدها
- استنتج صورة هذا التطبيق مبينا ما إذا كان هذا التطبيق هو تطبيق تقابلي؟

حل سلسـلــة تمــاريــن رقــم 3

حل التمرين الاول:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (2x + 3y, x - 2y + z)$$

- نبين ان هذا التطبيق تطبيق خطي:

$$\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: f\big(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')\big) = \alpha f(x, y, z) + \beta f(x', y', z')$$

$$\begin{aligned} f\big(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')\big) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ &= (2\alpha x + 2\beta x' + 3\alpha y + 3\beta y', \alpha x + \beta x' - 2\alpha y - 2\beta y' + \alpha z + \beta z') \\ &= (2\alpha x + 3\alpha y, \alpha x - 2\alpha y + \alpha z) + (2\beta x' + 3\beta y', \beta x' - 2\beta y' + \beta z') \\ &= \alpha(2x + 3y, x - 2y + z) + \beta(2x' + 3y', x' - 2y' + z') \\ &= \alpha f(x, y, z) + \beta f(x', y', z') \end{aligned}$$

و منه التطبيق هو تطبيق خطي

- إيجاد نواة هذا التطبيق

$$kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: f(x, y, z) = (0,0)\}$$

$$f(x, y, z) = (0,0) \Leftrightarrow (2x + 3y, x - 2y + z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y \\ -\frac{3}{2}y - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y \\ z = -\frac{7}{2}y \end{cases}$$

$$\forall (x, y, z) \in kerf: (x, y, z) = \left(-\frac{3}{2}y, y, -\frac{7}{2}y\right) = y\left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{7}{2}\right)$$

$$\forall (x, y, z) \in kerf; \exists \alpha \in \mathbb{R}: (x, y, z) = \alpha\left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{7}{2}\right)$$

أي ان الشعاع $\left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{7}{2}\right)$ مولد للفضاء الشعاعي الجزئي $kerf$ أي :

$$kerf = \left[\left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{7}{2}\right)\right] \Rightarrow dim(kerf) = 1$$

بما أن $kerf \neq \{(0,0,0)\}$ فإن التطبيق ليس متباين

إيجاد صورة هذا التطبيق

$$dimE = dim(kerf) + dim(Imf) \Rightarrow dim(Imf) = dimE - dim(kerf) \Rightarrow$$

$$dim(Imf) = dim\mathbb{R}^3 - dim(kerf) = 3 - 1 = 2 = dim\mathbb{R}^2$$

$$dim(Imf) = dim\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow Imf = \mathbb{R}^2$$

أي ان التطبيق غامر

نتيجة : التطبيق غامر و ليس متابين فهو غير تقابلي

حل التمرين الثاني:

$$(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$$

- نبين ان هذا التطبيق تطبيق خطي:

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2;\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}: f\big(\alpha(x,y)+\beta(x',y')\big) = \alpha f(x,y)+\beta f(x',y')$$

$$\begin{aligned} f\big(\alpha(x,y)+\beta(x',y')\big) &= f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y') \\ &= (\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y', \alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y') \\ &= (\alpha x+\alpha y, \alpha x-\alpha y)+(\beta x'+\beta y', \beta x'-\beta y') \\ &= \alpha(x+y, x-y)+\beta(x'+y', x'-y') = \alpha f(x,y)+\beta f(x',y') \end{aligned}$$

و منه التطبيق هو تطبيق خطي

- إيجاد نواة هذا التطبيق

$$kerf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0)\}$$

$$f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x+y, x-y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

و منه نجد:

$$kerf = \{(0,0)\}$$

- استنتاج صورة التطبيق الخطي

$$dim\mathbb{R}^2 = \dim(kerf)+dim(\mathrm{Im}f) \Leftrightarrow dim(\mathrm{Im}f) = dim\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$$

- التطبيق f هو تطبيق تقابلي و هذا لأن

$$kerf = \{(0,0)\} \Leftrightarrow f\text{متباين}$$

$$\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow f\text{غامر}$$

حل التمرين الثالث:

اثبات ان E هي فضاء شعاعي جزئي

$$(0,0,0) \in E; (0-0=0 \wedge 0-0=0)$$

$$\forall (x,y,z),(x',y',z') \in E;\ \forall \alpha,\beta \in IR: \alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z') \in E?$$

$$\Leftrightarrow (\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z') \in E? \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y'=0 \\ \alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z'=0 \end{cases}?$$

$$(x,y,z) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x-\alpha y=0 \dots\dots 1 \\ \alpha y-\alpha z=0 \dots\dots 2 \end{cases} \forall \alpha \in IR$$

$$(x',y',z') \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x'-y'=0 \\ y'-z'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta x'-\beta y'=0 \dots\dots 3 \\ \beta y'-\beta z'=0 \dots\dots 4 \end{cases} \forall \beta \in IR$$

بجمع 1 مع 3 و 2 مع 4 نجد المطلوب و من تم نستنتج ان E هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء IR^3 على الحقل IR.

ايجاد اساس و بعد الفضاء الجزئي E:

$$(x,y,z) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases} (x,y,z) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in E \Leftrightarrow (x,y,z)=(y,y,y)=y(1,1,1)$$

اي ان :

$$E=[\{(1,1,1)\}]$$

بمعنى ان E مولد بالشعاع $(1,1,1)$ و بما ان الشعاع وحيد فهو يشكل اساس و منه نجد ان

$$dimE=1$$

اثبات أن f تطبيق خطي:

$$\forall (x,y,z),(x',y',z') \in IR^3\ ;\ \forall \alpha,\beta \in IR: f\big(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\big)=\alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')?$$

$$\begin{aligned} f\big(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\big) &= f(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z') \\ &= (\alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y',\alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z',\alpha z+\beta z') \\ &= (\alpha x-\alpha y,\alpha y-\alpha z,\alpha z)+(\beta x'-\beta y',\beta y'-\beta z',\beta z') \\ &= \alpha(x-y,y-z,z)+\beta(x'-y',y'-z',z')=\alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z') \end{aligned}$$

أي أن f تطبيق خطي.

ايجاد النواة:

$$kerf=\{(x,y,z) \in IR^3 : f(x,y,z)=(0,0,0)\}$$

$$f(x,y,z)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

$$kerf=\{(0,0,0)\}$$

و منه نستنتج مباشرة أن:

$$dimkerf=0$$

اي ان التطبيق هو تطبيق متباين

و بما ان مجموعة البدء هي نفسها مجموعة الوصول فان التطبيق هو غامر اي تقابلي و منه فان الصورة هي نفسها مجموعة الوصول اي:

$$Imf=IR^3$$

سلسلــة تمــاريــن رقــم 4

التمرين الاول: لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&3\\1&-1\\-2&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&-1&3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}4&-1&1\\1&2&-4\\-2&1&3\end{pmatrix}$$

1. أحسب مجموع المصفوفات الممكنة.
2. أحسب $3C$, $-D$, $-2B$ و $4A$ ثم أحسب المجموع الممكن.
3. أحسب كل الجداءات الممكنة.
4. أحسب منقول المصفوفات و أثرها إن أمكن.

التمرين الثاني: لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}$$

- أحسب الجداء $A.B$ ثم إستنتج أن المصفوفة A قابلة للقب و أوجد مقلوبها.

التمرين الثالث: لتكن المصفوفة المعرفة بالعلاقة:

$$A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$$

1. أحسب المصفوفة A^2 .
2. أوجد الأعداد الحقيقية α,β,λ حيث: $\lambda A^2+\alpha A+\beta I=0$ حيث I هي مصفوفة الوحدة و 0 هو المصفوفة الصفرية.
3. من العلاقة السابقة بين أن A قابلة للقب و أوجد مقلوبها.

التمرين الرابع: لتكن المصفوفة المعرفة بـ:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix}$$

- تحقق من وجود مقلوب المصفوفة A باستعمال الاعمدة (الاسطر) كأشعة في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.
- أوجد مقلوبها باستعمال التحويلات الاولية (المصفوفة الموسعة).

التمرين الخامس: أحسب محدد المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&1&3\\1&-1&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-1&3\\0&0&2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\22&15&3\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&9\end{pmatrix}$$

التمرين السادس: أحسب محدد المصفوفة التالية بثلاث طرق مختلفة:

$$B=\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}$$

التمرين السابع: من نتيجة التمرين السابق استنتج قيمة محددات المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-1&8&-3\\1&-5&2\\-1&10&-4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}8&-1&-3\\10&-1&-4\\-5&1&2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}16&-4&-6\\-5&2&2\\10&-2&-4\end{pmatrix}$$

التمرين الثامن: ليكن الفضاءين الشعاعيين $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ على نفس الحق $\mathbb{R}$ و لنعرف التطبيق الخطي من$\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$ بالعلاقة التالية:

$$f(x,y)=(x+2y,2x-y,3x-2y)$$

باستعمال الاساس القانوني في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f.

التمرين التاسع: لتكن المصفوفة المعرفة بـ:

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$$

باستعمال الاساس القانوني في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ أوجد التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A.

التمرين العاشر:

$$f(x,y)=(-x,2x+y,3x+y)$$

$$g(x,y,z)=(x-y,x+z,y-2z)$$

1. أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f وفق الاساس القانوني لمجموعة البدء و مجموعة الوصول؟
2. اوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي g وفق الساس $B=\{(1;0;0),(1;1;0),(1;1;1)\}$ لمجموعة البدء و الاساس القانوني لمجموعة الوصول.
3. أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي gof.

حـل السلسلـة رقـم 4

حل التمرين الاول:

1. **تذكير:** حتى يكون الجمع ممكنا يجب أن تكون المصفوفتان من نفس الدراجة أي لهما نفس عدد الاسطر و نفس عدد الاعمدة $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$.

و بالتالي المجموع الوحيد الممكن هو $A + D$

$$A + D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 1-1 & 2+1 \\ 0+1 & -1+2 & 1-4 \\ 1-2 & 2+1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. **تذكير:** لضرب مقدار سلمي في مصفوفة يكفي ضربه في كل عدد من المصفوفة.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2B = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3C = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -D = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

3. حساب الجداءات الممكنة:

تذكير: حتى يكون الجداء ممكنا يجب أن يتحقق الشرط التالي: عدد أعمدة المصفوفة الاولى يجب ان يساوي عدد اسطر المصفوفة الثانية.

و عليه فإن الجداءات الممكنة هي $A.B, A.D, B.C, C.A, C.B, C.D, D.A, D.B$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 4 + 1\times 1 + 2(-2) & 1\times 3 + 1(-1) + 2\times 0 \\ 0\times 4 + (-1)\times 1 + 1(-2) & 0\times 3 + (-1)(-1) + 1\times 0 \\ 1\times 4 + 2\times 1 + 1(-2) & 1\times 3 + 2(-1) + 1\times 0 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A.D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 4 + 1\times 1 + 2(-2) & 1(-1) + 1\times 2 + 2\times 1 & 1\times 1 + 1(-4) + 2\times 3 \\ 0\times 4 + (-1)\times 1 + 1(-2) & 0(-1) + (-1)\times 2 + 1\times 1 & 0\times 1 + (-1)(-4) + 1\times 3 \\ 1\times 4 + 2\times 1 + 1(-2) & 1(-1) + 2\times 2 + 1\times 1 & 1\times 1 + 2(-4) + 1\times 3 \end{pmatrix}$$

$$A.D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 7 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B.C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -11 & 13 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$CD=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1&1\\1&2&-4\\-2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-5&13\\-3&0&14\end{pmatrix}$$

$$DA=\begin{pmatrix}4&-1&1\\1&2&-4\\-2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7&8\\-3&-9&0\\1&3&0\end{pmatrix}$$

$$DB=\begin{pmatrix}4&-1&1\\1&2&-4\\-2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3\\1&-1\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&13\\14&1\\-13&-7\end{pmatrix}$$

4. حساب منقول المصفوفات:

تذكير: منقول المصفوفة هو تحويل العمود الاول الى السطر الاول و العمود الثاني الى السطر الثاني و هكذا.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow A^T=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&2\\2&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&3\\1&-1\\-2&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow B^T=\begin{pmatrix}4&1&-2\\3&-1&0\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&-1&3\end{pmatrix}\Leftrightarrow C^T=\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\\1&3\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}4&-1&1\\1&2&-4\\-2&1&3\end{pmatrix}\Leftrightarrow D^T=\begin{pmatrix}4&1&-2\\-1&2&1\\1&-4&3\end{pmatrix}$$

حساب أثر مصفوفة

تذكير: أثر مصفوفة يكون في المصفوفات المربعة و هو عبارة عن مجموع عناصر القطر الرئيسي.

$$Tr(A)=1+(-1)+1=1,Tr(D)=4+2+3=9$$

لان عناصر القطر في المصفوفة A هي $1,-1,1$ أما عناصر القطر في المصفوفة D فهي 4,2,3

حل التمرين الثاني:

حساب الجداء $A.B$

$$AB=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16-5-10&-2+1+1&-6+2+4\\0-10+10&0+2-1&0+4-4\\40-10-30&-5++2+3&-15+4-12\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

لنحسب الان الجداء BA

$$BA=\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+0-15&8-2-6&-8-1+9\\-10+0+10&-5+2+4&5+1-6\\20+0-20&10-2-8&-10-1+12\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

و منه نلاحظ ان:

$$A.B=B.A=I_3$$

و هذا يؤكد ان المصفوفة A قابلة للقلب و لدينا:

$$A^{-1}=B$$

حل التمرين الثالث:

حساب A^2

$$A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow A^2=A.A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4&4\\4&8&4\\4&4&8\end{pmatrix}$$

ايجاد الاعداد الحقيقة α,β,λ حيث $\lambda A^2+\alpha A+\beta I=0$

$$\lambda A^2+\alpha A+\beta I=0\Leftrightarrow \lambda\begin{pmatrix}8&4&4\\4&8&4\\4&4&8\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}8\lambda+\beta&4\lambda+2\alpha&4\lambda+2\alpha\\4\lambda+2\alpha&8\lambda+\beta&4\lambda+2\alpha\\4\lambda+2\alpha&4\lambda+2\alpha&8\lambda+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8\lambda+\beta=0\\4\lambda+2\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8\lambda+\beta=0\\2\lambda+\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-8\lambda\\\alpha=-2\lambda\end{cases}$$

و منه بأخذ $\lambda=1$ نجد $\beta=-8$ و $\alpha=-2$ و في النهاية نجد ان:

$$A^2-2A-8I=0$$

تبيان أن المصفوفة A قابلة للقلب:

تذكير: نقول عن المصفوفة A أنها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة B من نفس درجة المصفوفة A حيث تحقق العلاقة التالية $A.B=B.A=I$

من العلاقة السابقة لدينا:

$$A^2-2A-8I=0\Leftrightarrow A^2-2A=8I\Leftrightarrow A(A-2I)=8I\Leftrightarrow A\frac{1}{8}(A-2I)=I\ldots\ldots(1)$$

$$A^2-2A-8I=0\Leftrightarrow A^2-2A=8I\Leftrightarrow (A-2I)A=8I\Leftrightarrow \frac{1}{8}(A-2I)A=I\ldots\ldots(2)$$

من العلاقة 1 و 2 نستنتج أنه توجد مصفوفة $B=\frac{1}{8}(A-2)$ و تحقق العلاقة: $A.B=B.A=I$ أي أن A قابلة للقلب و لدينا:

$$A^{-1}=\frac{1}{8}(A-2I)=\frac{1}{8}\left(\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2&2&2\\2&-2&2\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

حل التمرين الرابع:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix}$$

التحقق من أن المصفوفة A قابلة للقلب:

تذكير: تكون المصفوفة المربعة A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كانت الاعمدة أو الاسطر مستقلة خطيا.

لنأخد الاشعة التالية $(2,0,5);(1,2,2);(-1,1,-3)\in\mathbb{R}^3$ و لتكن $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}$ حيث:

$$\alpha(2,0,5)+\beta(1,2,2)+\lambda(-1,1,-3)=(0,0,0)\Leftrightarrow(2\alpha+\beta-\lambda,2\beta+\lambda,5\alpha+2\beta-3\lambda)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta-\lambda=0\\ 2\beta+\lambda=0\\ 5\alpha+2\beta-3\lambda=0\end{cases}$$

من المعادلة الثانية نجد ان $\lambda=-2\beta$ نعوضها في المعادلة الاولى نجد ان: $\alpha=-\frac{3}{2}\beta$ نعوض القيمتين في المعادلة الاخيرة نجد:

$$5\beta=0\Rightarrow\alpha=\beta=\lambda=0$$

أي أن الاشعة مستقلة خطيا و بالتالي المصفوفة A قابلة للقلب.

نحسب الان مقلوبها:

لهذا سنأخذ المصفوفة الموسعة $(A|I)$ و نحولها إلى مصفوفة $(I|A^{-1})$

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\5&2&-3&0&0&1\end{array}\right)$$

نقسم السطر الاول على العدد 2 نحصل على

$$(A|I)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&2&1&0&1&0\\5&2&-3&0&0&1\end{array}\right)$$

نضرب السطر الاول في العدد -5 و نضيفه للسطر الثالث نجد:

$$(A|I)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&2&1&0&1&0\\5&2&-3&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&0&1\end{array}\right)$$

نقسم السطر الثاني على العدد 2 نحصل على

$$(A|I)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&0&1\end{array}\right)$$

نضرب السطر الثاني في العدد $\frac{1}{2}$ و نضيفه للسطر الثالث ثم نضرب السطر الثاني في العدد $-\frac{1}{2}$ و نضيفه للسطرالاول نجد:

$$(A|I)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&-\frac{1}{4}&-\frac{5}{2}&\frac{1}{4}&1\end{array}\right)$$

نضرب السطر الثالث في العدد -4 نحصل على:

$$(A|I)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4\end{array}\right)$$

نضرب السطر الثالث في العدد $-\frac{1}{2}$ و نضيفه للسطر الثاني و في نفس الوقت نضرب السطر الثالث في العدد $\frac{3}{4}$ و نضيفه للسطر الاول فنحصل على المصفوفة الموسعة التالية:

$$(A|I)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 8 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4\end{array}\right)$$

و هي من الشكل $(I|A^{-1})$ و منه نستنتج ان:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ 10 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

حل التمرين الخامس:

حساب محدد المصفوفات:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow det(A)=|A|=2\times 2-(-1)\times 1=5$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

نختار أحد الاسطر أو أحد الاعمدة و ليكن العمود الاول مثلا نجد:

$$det(B)=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|$$

حيث أن المصفوفة A_{11} هي المصفوفة التي نحصل عليها بحدف السطر الاول و العمود الاول و اما A_{21} هي المصفوفة التي نحصل عليها بحدف السطر الثاني و العمود الاول و A_{31} هي المصفوفة التي نحصل عليها بحدف السطر الثالث و العمود الاول

$$det(B)=1\times\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=(4+3)-2(-8+2)+(-6-2)$$
$$=7+12-8=11$$

أما باقي المصفوفات فهي عبارة عن مصفوفات مثلثية علوية او سفلية او قطرية و بالتالي فإن محددها يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي أي:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\Leftrightarrow det(C)=1(-1)2=-2,$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 22 & 15 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow det(D)=1\times 2\times 3=6,$$

$$E=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow det(E)=3\times 2\times 9=54$$

حل التمرين السادس:

حساب المحدد بثلاث طرق مختلفة:

$$B=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ 10 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

الطريقة الاولى: نختار العمود الثاني:

$$det(B)=|B|=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}|=-a_{12}|A_{12}|+a_{22}|A_{22}|-a_{32}|A_{32}|$$
$$=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 10 & -4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}8 & -3\\ 10 & -4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}8 & -3\\ -5 & 2\end{vmatrix}=0-2+1=-1$$

الطريقة الثانية:

نضيف عمودين للمصفوفة B الاول و الثاني:

$$\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ 10 & -1 & -4\end{pmatrix}\begin{matrix}8 & -1\\ -5 & 1\\ 10 & -1\end{matrix}$$

نضرب العناصر المتواجدة على نفس اتجاه السهم في بعضها ثم نضرب تلك المشار اليها بسهم أحمر في العدد 1 أما تلك المشار اليها بسهم أزرق نضربها في العدد -1 ثم نجمع الكل فنحصل على قيمة المحدد.

$$det(B)=|B|=\big(8\times 1(-4)+(-1)2\times 10+(-3)(-5)(-1)\big)$$
$$+\big(-10\times 1(-1)-(-1)2\times 8-(-4)(-5)(-1)\big)$$
$$=-32-20-15+30+16+20=-1$$

الطريقة الثالثة: تعتمد هذه الطريقة على أن نجعل في أحد الاسطر او الاعمدة أكبر عدد ممكن من الاصفار و هذا بإضافة مزج خطي الى أحد الاعمدة (الاسطر) لبقية الاعمدة (الاسطر).

$$B=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ 10 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

من الواضح أنه إذا أضفنا السطر الثاني للسطر الاول و في نفس الوقت نضيف السطر الثاني للسطر الثالث نحصل على المصفوفة المكافئة للمصفوفة B و زيادة على ذلك يكون لها نفس محدد المصفوفة B.

$$B=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ 10 & -1 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ -5 & 1 & 2\\ 5 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

من المنطقي ان نختار العمود الثاني لأنه يحتوي على أكبر عدد من الاصفار فنجد بسهولة

$$det(B)=|B|=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}|=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-6+5=-1$$

ملاحظة: هذه الطريقة تكون ناجعة أكثر حين يكون المحدد من دراجة اعلى من 3.

حل التمرين السابع:

من أن المصفوفة A هي المصفوفة الناتجة من المصفوفة B و ذلك بتبديل العمود الاول مع العمود الثاني و بالتالي فإن قيمة محدد المصفوفة A هي نفسها قيمة محدد المصفوفة B مضروب في العدد -1 .

$$det(A)=-det(B)=1$$

من أن المصفوفة C هي المصفوفة الناتجة من المصفوفة B و ذلك بتبديل السطر الثاني مع السطر الثالث و بالتالي فإن قيمة محدد المصفوفة C هي نفسها قيمة محدد المصفوفة B مضروب في العدد -1 .

$$det(C)=-det(B)=1$$

أما المصفوفة D فهي ناتجة من المصفوفة B لكن من الواضح ان السطر الاول مضروب في العدد 2 لهذا فان:

$$|D|=\begin{vmatrix}16 & -4 & -6\\ -5 & 2 & 2\\ 10 & -2 & -4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ 10 & -1 & -4\end{vmatrix}=2|B|=-2$$

حل التمرين التامن:

الاساس القانوني في $\mathbb{R}^2$ هو $\{(1,0),(0,1)\}$, و الاساس القانوني في $\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, و لدينا:

$$f(x,y)=(x+2y,2x-y,3x-2y)$$

$$\begin{cases} f(1,0)=(1,2,3)=1(1,0,0)+2(0,1,0)+3(0,0,1)\\ f(0,1)=(2,-1,-2)=2(1,0,0)+(-1)(0,1,0)+(-2)1(0,0,1)\end{cases}$$

و بالتالي المصفوفة المرافقة لهذا التطبيق الخطي وفق الاساس القانوني في $\mathbb{R}^2$ و الاساس القانوني في $\mathbb{R}^3$ معرفة بالشكل التالي:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

حل التمرين التاسع:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

من الواضح من خلال المصفوفة ان التطبيق معرف من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^2$ و هذا لان عدد أعمدة المصفوفة A يساوي بعد مجموعة البدء أما عدد الاسطر فهو بعد مجموعة الوصول و منه فإن:

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z)\longmapsto f(x,y,z)$$

لدينا من المصفوفة A

$$\begin{cases} f(1,0,0) = 3(1,0) + 1(0,1) = (3,1) \\ f(0,1,0) = -1(1,0) + 2(0,1) = (-1,2) \\ f(0,0,1) = 2(1,0) + 3(0,1) = (2,3) \end{cases}$$

بما أن التطبيق f هو تطبيق خطي فإن لدينا:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f\big(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\big) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) \\ &= x(3,1) + y(-1,2) + z(2,3) = (3x,x) + (-y,2y) + (2z,3z) \\ &= (3x - y + 2z, x + 2y + 3z) \end{aligned}$$

حل التمرين العاشر:

$$f(x,y) = (-x, 2x + y, 3x + y)$$

$$g(x,y,z) = (x - y, x + z, y - 2z)$$

1. ايجاد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f وفق الاساس القانوني لمجموعة البدء و مجموعة الوصول:

من الواضح ان

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

من المؤكد ان المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي من الدراجة 2×3 اي لها ثلاثة اسطر و عمودين و نرمز لها بالرمز M_f

$$f(1;0) = (-1;2;3) = \alpha(1,0,0) + \beta(0;1;0) + \lambda(0;0;1) \Leftrightarrow (-1;2;3) = (\alpha;\beta;\lambda)$$

و منه العمود الاول من المصفوفة M_f هو الشعاع $(-1;2;3)$

$$f(0;1) = (0;1;1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0;1;0) + \lambda(0;0;1) \Leftrightarrow (0;1;1) = (\alpha;\beta;\lambda)$$

و منه العمود الثاني من المصفوفة M_f هو الشعاع $(0\,;1\,;1)$

في النهاية نحصل على المصفوفة:

$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. ايجاد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي g وفق الساس $B = \{(1;0;0),(1;1;0),(1;1;1)\}$ لمجموعة البدء و الاساس القانوني لمجموعة الوصول.

من الواضح ان:

$$g: IR^3 \to IR^3$$

اي ان المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي g من الدراجة 3 اي لها ثلاثة اسطر و ثلاثة اعمدة و لنرمز لها بالمرز M_g

$$g(1;0;0) = (1;1;0) = \alpha(1,0,0) + \beta(0;1;0) + \lambda(0;0;1) \Leftrightarrow (1;1;0) = (\alpha;\beta;\lambda)$$

و منه العمود الاول للمصفوفة M_g هو الشعاع $(1;1;0)$

$$g(1;1;0) = (0;1;1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0;1;0) + \lambda(0;0;1) \Leftrightarrow (0;1;1) = (\alpha;\beta;\lambda)$$

و منه العمود الثاني للمصفوفة M_g هو الشعاع $(0;1;1)$

$$g(1;1;1) = (0;2;-1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0;1;0) + \lambda(0;0;1) \Leftrightarrow (0;2;-1) = (\alpha;\beta;\lambda)$$

و منه العمود الثالث للمصفوفة M_g هو الشعاع $(0;2;-1)$

في النهاية نحصل على المصفوفة:

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. ايجاد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي gof.

نعلم ان المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي gof هي جداء المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي g مع المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f أي:

$$M_{gof} = M_g.M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: انطلاقا من الكتابة المصفوفية للتطبيق الخطي gof يمكن ايجاد صيغة هذا التطبيق.

سلسلة تمارين رقم 5

التمرين الأول:

لتكن الجملة التالية

$$(S)\begin{cases}-x+2y-z=1\\ 5x-2z=-1\\ 3y+2z=4\end{cases}$$

أكتب الشكل المصفوفي للجملة ثم أوجد الحلول بطريقة كرامر

التمرين الثاني:

لتكن الجملة التالية

$$(S)\begin{cases}x+y-z=1\\ 2x+z=-1\\ 2x+y-z=2\end{cases}$$

أكتب الشكل المصفوفي للجملة ثم أوجد الحلول بطريقة المقلوب

التمرين الثالث:

لتكن الجمل التالية

$$(S)\begin{cases}x+y-z=8\\ 2x+2y-3z=5\\ 3x-3y-z=2\\ 4x-2y-3z=-1\end{cases}\ ;\quad (S)\begin{cases}x+y-z=1\\ 2x-2y+z=3\\ 3x-y=5\end{cases}\ ;\quad (S)\begin{cases}x+2y-2z=2\\ 3x+6y-5z=7\\ 2x+4y-3z=5\\ 5x+10y-8z=12\end{cases}$$

حل هذه الجمل باستعمال طريقة قوص

التمرين الرابع:

لتكن الجملة التالية

$$(S)\begin{cases}(\lambda+1)x+y+z=1\\ x+(\lambda+1)y+z=1\\ x+y+(\lambda+1)z=1\end{cases}$$

أكتب الشكل المصفوفي للجملة

أوجد القيم λ التي من أجلها تكون الجملة التالية لكرامر

من أجل $\lambda=0$ ادرس الجملة

التمرين الخامس:

لتكن المصفوفة التالية

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\ ;A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{pmatrix};A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

سماقجي محمد الهادي
سلسلة تمارين الخاصة بالسنة الاولى علوم اقتصادية و علوم التسيير

أوجد القيم الذاتية في $\mathbb{R}$و الاشعة الذاتية

تمرين السادس:

لتكن المصفوفتان:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

أحسب الجداء $A.D$ ثم حل الجملة $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$

saadi fatima

حـل سلسلـــة تمــاريــن رقـم 5

حل التمرين الاول:

تذكير: تكون الجملة جملة كرامر إذا وفقط إذا كانت المصفوفة A المرافقة للجملة مربعة و محددها غير معدوم.

$$(S)\begin{cases}-x+2y-z=1\\5x-2z=-1\\3y+2z=4\end{cases}$$

الشكل المصفوفي للجملة:

$$(S)\Leftrightarrow \mathrm{AX}=\mathrm{B}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&2&-1\\5&0&-2\\0&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

من الواضح ان المصفوفة A مربعة بقي ان نحسب محددها:

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix}-1&2&-1\\5&0&-2\\0&3&2\end{vmatrix}=-41\neq 0$$

المصفوفة مربعة و محددها غير معدوم و بالتالي الجملة هي لكرامر.

حل الجملة:

تذكير: إذا كانت الجملة لكرامر فهي تملك حل وحيد يحسب بالطريقة التالية:

$$x_i=\frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}; i=1,\dots,n$$

حيث x_i هي المجاهيل أما Δ فهو محدد المصفوفة المرافقة للجملة و Δ_{x_i} هو محدد المصفوفة المرافقة للجملة لكن باستبدال العمود رقم i بالشعاع B في كل مرة.

و عليه فإن حلول الجملة المعطاة هي:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}; y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

يكفي حساب المحددات التالية:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&0&-2\\4&3&2\end{vmatrix}=-3;\ \Delta_y=\begin{vmatrix}-1&1&-1\\5&-1&-2\\0&4&2\end{vmatrix}=-36; \Delta_z=\begin{vmatrix}-1&2&1\\5&0&-1\\0&3&4\end{vmatrix}=-28$$

و منه الحلول هي:

$$x=\frac{-3}{-41}=\frac{3}{41};; y=\frac{-36}{-41}=\frac{36}{41};\ z=\frac{-28}{-41}=\frac{28}{41}$$

و من تم مجموعة الحلول هي: $S=\left\{\left(\frac{3}{41},\frac{36}{41},\frac{28}{41}\right)\right\}$.

حل التمرين الثاني:

تذكير: تكون الجملة جملة قابلة للحل بطريقة المقلوب إذا كانت المصفوفة A المرافقة للجملة مربعة و محددها غير معدوم.

$$(S)\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+z=-1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي للجملة:

$$(S) \Leftrightarrow \mathrm{AX}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

المصفوفة مربعة و محددها غير معدوم و بالتالي الجملة تقبل حل وحيد نستعمل في هذا التمرين طريقة المقلوب في حلها و هو معطى بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{AX}=\mathrm{B} \Leftrightarrow X=A^{-1}B$$

أي نقوم بحساب A^{-1} ثم إجراء الجداء $A^{-1}B$

حساب A^{-1}:

لدينا:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(com(A)\right)^T=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

بقي الان حساب فقط الجداء $A^{-1}B$ فنحصل على الحل المطلوب:

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

و من تم مجموعة الحلول هي: $S=\{(1,-3,-3)\}$.

حل التمرين الثالث:

ملاحظة: لا يوجد شروط لتطبيق طريقة قوص فهي صالحة لكل الجمل الخطية.

$$(S)\begin{cases} x+y-z=8 \\ 2x+2y-3z=5 \\ 3x-3y-z=2 \\ 4x-2y-3z=-1 \end{cases}$$

نكتب الجملة على الشكل المصفوفي:

$$(S) \Leftrightarrow \mathrm{AX}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

الان نكتب المصفوفة الموسعة و التي هي من الشكل $(A|B)$:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&8\\2&2&-3&5\\3&-3&-1&2\\4&-2&-3&-1\end{array}\right)$$

نقوم بضرب السطر الاول في العدد -2 ثم نضيفه الى السطر الثاني و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثاني, ثم نضرب السطر الاول في العدد -3 و نضيفه للسطر الثالث و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثالث, ثم نضرب السطر الاول في العدد -4 و نضيفه للسطر الرابع و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الرابع فنحصل على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $(A|B)$:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&8\\0&0&-1&-11\\0&-6&2&-22\\0&-6&1&-1\end{array}\right)$$

الان نضرب السطر الثالث في العدد -1 و نضيفه للسطر الرابع و هذا كي ينعدم العنصر الثاني من السطر الرابع:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&8\\0&0&-1&-11\\0&-6&2&-22\\0&0&-1&-11\end{array}\right)$$

نلاحظ جيدا أن السطر الثاني و الثالث متساويان و بالتالي نضرب السطر الثاني في العدد -1 و نضيفه للسطر الرابع نجد:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&8\\0&0&-1&-11\\0&-6&2&-22\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

نلاحظ امران:

أحدهما هو ان: $rg(A)=rg(A|B)$

و الامر الثاني أن رتبة المصفوفة يساوي عدد المجاهيل

نتيجة: نستنتج ان الجملة تملك حلا وحيدا.

نكتب الجملة المكافئة للجملة

$$(S)\sim\begin{cases}x+y-z=8\\-z=-11\\-6y+2z=-22\end{cases}$$

من المعادلة الثانية نجد ان: $z=11$ نعوض في المعادلة الثالثة نجد ان $y=\frac{11}{2}$ ثم نعوض القيمتين في المعادلة الاولى فنجد $x=\frac{27}{2}$

و بالتالي فإن مجموعة الحلول هي: $\left\{\left(\frac{27}{2},\frac{11}{2},11\right)\right\}$.

$$(S)\begin{cases}x+y-z=1\\2x-2y+z=3\\3x-y=5\end{cases}$$

نكتب الجملة على الشكل المصفوفي:

$$(S) \Leftrightarrow \mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

الان نكتب المصفوفة الموسعة و التي هي من الشكل $(A|B)$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

نقوم بضرب السطر الاول في العدد $2-$ ثم نضيفه الى السطر الثاني و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثاني, ثم نضرب السطر الاول في العدد $3-$ و نضيفه للسطر الثالث و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثالث, فنحصل على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $(A|B)$:

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

الان نضرب السطر الثاني في العدد $1-$ و نضيفه للسطر الثالث و هذا كي ينعدم العنصر الثاني من السطر الثالث:

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نلاحظ جيدا أن السطر الثاني و الثالث متساويان و بالتالي نضرب السطر الثاني في العدد $1-$ و نضيفه للسطر الرابع نجد:

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & -6 & 2 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

نلاحظ ان: $rg(A) \neq rg(A|B)$

نتيجة: نستنتج ان الجملة مستحيلة و بالتالي فهي لا تملك حلا.

$$(S) \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 6y - 5z = 7 \\ 2x + 4y - 3z = 5 \\ 5x + 10y - 8z = 12 \end{cases}$$

نكتب الجملة على الشكل المصفوفي:

$$(S) \Leftrightarrow \mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 10 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

الان نكتب المصفوفة الموسعة و التي هي من الشكل $(A|B)$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -5 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 12 \end{array}\right)$$

نقوم بضرب السطر الاول في العدد $3-$ ثم نضيفه الى السطر الثاني و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثاني, ثم نضرب السطر الاول في العدد $2-$ و نضيفه للسطر الثالث و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثالث, ثم نضرب السطر الاول في

العدد -5 و نضيفه للسطر الرابع و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الرابع فنحصل على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $(A|B)$:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

الان نضرب السطر الثاني في العدد -1 و نضيفه للسطر الثالث و هذا كي ينعدم العنصر الثالث من السطر الثالث و نضرب السطر الثاني في العدد -2 و نضيفها للسطر الرابع و هذا كي ينعدم العنصر الثالث من السطر الرابع فنجد في النهاية:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

نلاحظ امران:

أحدهما هو ان: $rg(A) = rg(A|B)$

و الامر الثاني أن رتبة المصفوفة اقل من عدد المجاهيل.

نتيجة: نستنتج ان الجملة تملك عددا غير منتهي من الحلول.

عدد المجاهيل الحرة هو $n - rg(A) = 3 - 2 = 1$

نكتب الجملة المكافئة للجملة

$$(S)\sim\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ z = 1 \end{cases}$$

و بالتالي فإن مجموعة الحلول هي: $S = \{(,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 4 - 2y \wedge z = 1\}$.

حل التمرين الرابع:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

حساب الجداء $A.D$

$$AD = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow D = A^{-1}$$

استنتاج حل الجملة $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$

$$(S)\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ 5x + 2y - 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{X} = A^{-1}B$$

و بالتالي:

$$\mathrm{X} = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

و منه مجموعة الحلول هي: $S = \{(-3,3,-4)\}$.

saadi fatima

السلسلة الأولى

التمرين 01: إستخرج مما يلي: المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، الصفة وطبيعتها، نوع المتغير المدروس

أ- طول 1000 مسمار صنع في شركة ماء.
ب- أجرة عمال شركة ما.
جـ - توزيع البلديات حسب عدد السكان.
د - حجم 50 علبة.
هـ- ترتيب السيارات حسب النوع.
و- ترتيب الولايات حسب عدد الولايات.

التمرين 02: حدد أيا من البيانات متصل وايا منها منفصل

أ- عدد الأفراد n في أسرة ما.
ب- الحالة العائلية لشخص معين.
جـ - أطوال 1000 طالب في قسم ما.
د - أعمار مصابيح منتجة في مصنع ما.
هـ- الدولة y في أوروبا.

التمرين 03: قرب الأعداد التالية

أ. 365,7863، 473,3571 إلى جزء من عشرة ، جزء من مئة، جزء من ألف، وحدة صحيحة.
ب . 2345647 إلى عشرة، إلى مئة، إلى ألف، إلى مليون.

التمرين 04: لتكن لدينا المعلومات التالية والتي تمثل أوزان 64 عامل في مؤسسة ما.

80	85	72	99	72	80	63	82
100	49	52	87	74	75	90	76
67	58	75	82	68	79	78	41
86	83	76	77	74	84	88	64
80	82	56	59	43	73	61	68
98	67	70	58	94	77	83	52
65	89	69	53	70	93	79	80
90	47	77	72	60	83	85	90

المطلوب

1. ماهو أصغر وأكبر وزن لهؤلاء العمال ؟
2. ماهو المدى العام لهذه الاوزان؟
3. هيء البيانات السابقة في شكل جدول توزيع تكراري
4. أحسب كل من التكرارين التجميعيين الصاعد والنازل.
5. أحسب التكرارات النسبية
6. أرسم كل من المدرج والمضلع والمنحنى التكراري.
7. أرسم منحنى التكرار التجميعي الصاعد والنازل.

التمرين 05: تمثل البيانات التالية أطوال 40 ورقة من أوراق نبات الغار إلى أقرب مليمتر

138	146	168	146	161	164	158	126
173	145	150	140	138	142	135	132
147	176	147	135	144	136	163	135
150	125	148	119	153	156	149	152
154	140	145	157	144	165	135	128

المطلوب: – كون توزيعا تكراريا. أرسم المدرج والمضلع والمنحنى التكراري.

التمرين 06: يبين الجدول التالي التوزيع التكراري للأجور اليومية بالدينار لـ 65 عاملا في شركة ما.

فئات الأجور	]60−50]	]70−60]	]80−70]	]90 −80]	]100−90]	]110−100]	]120−110]	المجموع
عدد العمال	8	10	16	14	10	5	2	65

المطللوب:

1. حدد الحد الأدنى للفئة السادسة 2. حدد الحد الأدنى للفئة الرابعة 3. مركز الفئة الثالثة.
4. طول الفئة الخامسة. 5. التكرار النسبي للفئة الثانية. 6. الفئة ذات أكبر تكرار.
7. عدد العمال الذين يحصلون على دخل أقل من 90 دينار يوميا.
8. عدد العمال الذين يحصلون على دخل 70 فأكثر يوميا.
9. عدد العمال الذين يحصلون على دخل 70 فأكثر وأقل من 90 دينار.
10. كون التوزيع التكراري المتجمع الصاعد والنازل
11. أرسم المدرج التكراري 12. أرسم منحنى التكرار التجميعي الصاعد والنازل

التمرين 07: إذا كانت لدينا مراكز الفئات لتوزيع ما كما يلي: 128، 138، 148، 158، 168، 178، 188

– أوجد طول الفئة ثم حدود الفئات لهذا التوزيع.

التمرين 08: يوجد في مؤسسة إنتاجية أربع فئات من العمال (عمال عاديون، عمال نصف مهرة، عمال مهرة، إطارات) متوسط الأجر اليومي لهذه الفئات هو 275، 350، 420، 470 د.ج على الترتيب والفرق بين الحد الأدنى والحد الأعلى للأجور لكل فئة هو 50، 100، 40، 60 دج على الترتيب فإذا علمت أن عدد عمال كل صنف هو: 40، 35، 25، 10 على الترتيب، ضع البيانات السابقة في جدول توزيع تكراري

تمرين رقم (1)

الجدول التالي يشتمل على بيانات افتراضية حول عدد الوحدات المتتالية من إحدى أنواع الفاكهة لأحد المستهلكين والتي نرمز لها بالرمز (x)، والمنفعة التي تكسبه إياها وحدات هذه السلعة، مفترضين إمكانية قياس المنفعة قياسا كميا من طرف هذا المستهلك

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
UT_x	0	20	42	60	75	87	96	103	103	95

والمطلوب

1- بعد تحديدك للعلاقة الرياضية التي تسمح بتقدير القيم المعبرة عن المنفعة الحدية لهذه السلعة قدر هذه القيم.

2- بعد تقديرك للقيم المعبرة عن المنفعة الحدية للسلعة موضوع هذا التمرين، ما نوع المسار تطورها (هل هي متزايدة أم متناقصة؟)، وبماذا تعلل تفسير هذه النتيجة.

3- عند أي وحدة من هذه السلعة ينبغي أن يتوقف هذا المستهلك عن تناول هذه السلعة، وكيف يسمى هذا الوضع.

4- هل بإمكان المستهلك أن يستمر في استهلاك وحدات إضافية من هذه السلعة، بعد بلوغه الوضع المعبر عنه بالسؤال السابق.

5- مثل معطيات هذا الجدول ونتيجة السؤال

الأول بيانيا

6- من الجدول والشكل البيانيين التاليين تبين وضح مختلف العلاقات السائدة بين المنفعة الكلية للسلعة والمنفعة الحدية مع توضيح مختلف الدلالات التي تعبر عنها مختلف العلاقات السابقة.

تمرين رقم (2)

بافتراض مستهلك يستهلك سلعة واحدة (X) وبإمكانه قياس المنفعة التي تكسبه إياها وحدات متتالية من هذه السلعة، وأن هذه المنفعة موضحة بالصيغة الرياضية التالية:

$$UT_x = 11,5x + 12x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

حيث UT_x تمثل المنفعة الكلية للسلعة المعبر عنها بالرمز (X)

x تمثل وحدات السلعة (X)

المطلوب

1- بعد تحديدك للعلاقة الرياضية المناسبة التي تسمح لنا بتحديد الدالة المعبرة عن المنفعة الحدية، حدد هذه الدالة

2- ما هي الوحدة من السلعة (X) التي يبدأ عندها سريان قانون تناقص المنفعة الحدية، كيف ستكون تغير المنفعة الكلية قبل وبعد هذه الوحدة

3- ما هي الوحدة من السلعة (X) التي يجب

1- بعد تحديد العلاقة الرياضية المناسبة التي تسمح بتحديد الدالة الجبرية عن المنفعة الحدية، حدد هذه الدالة

2- حدد الوحدة التي يبدأ عندها سريان قانون تناقص المنفعة الحدية وكيف ستكون تغير المنفعة الكلية قبل وبعد هذه الوحدة

3- حدد الوحدة التي ينبغي على هذا المستهلك أن يتوقف عندها من استهلاك هذه السلعة

4- كيف ستكون المنفعة الكلية والمنفعة الحدية بعد الوحدة المحددة بالسؤال السابق تأكد من ذلك بمثال.

تمرين 3.

بافتراض أحد المستهلكين سيستهلك أكثر من سلعة، ودالة المنفعة الكلية المحققة من وحدات استهلاكه للسلعتين (X) و(Y) معبر عنها بالصيغة الرياضية التالية

$$UT_{(X,Y)} = 4\sqrt{x}\sqrt{y}$$

المطلوب

1- بعد تحديدك للعلاقة الرياضية المناسبة لتحديد الدالة الجبرية من المنفعة الحدية في مثل هذه الحالة، حدد الدالتين المعبرتين عن المنفعة الحدية لكل من السلعتين (X) و(Y)

2- أدرس إحدى هاتين الدالتين

3- بالاعتماد على نتائج الدراسة السابقة، هل يمكن القول عن الدالة المحددة ضمن هذا التمرين أنها دالة متناقصة، وضح ذلك

4- نفترض أن هذا المستهلك استهلك طيلة أسبوع من السلعة (X)، إذا أراد مضاعفة المنفعة الكلية بثلاث مرات وذلك مع محافظته على استهلاكه ثابتا من السلعة (Y)

تمرين 4

الجدول التالي يمثل عدد وحدات سلعة معينة مستهلكة من أحد المستهلكين، والمنفعة الحدية المحققة منها

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Um_x	-	13	20	17	12	8	4	0	-3

saadi fatima

1 - بعد تحديدك للعلاقة الرياضية المناسبة التي تسمح بتفسير التغير الكبير في المنفعة الحدية لهذه السلعة قدر هذا التغير

2 - من خلال النتائج المتحصل عليها في السؤال السابق هل يمكن الوصول إلى نفس النتائج التي توصلنا إليها في التمرين الأول.

تمرين ثالث: يعبر أحد المستهلكين عن منفعة الوحدة الأخيرة من إحدى المواد الغذائية بالصيغة الرياضية التالية

$$Umg_x = 12 + 40 - x^2$$

المطلوب:

بعد تحديدك للعلاقة الرياضية المناسبة لتحديد الدالة المعبرة عن المنفعة الكلية لهذه المادة الغذائية، حدد هذه الدالة

saadi fatima

السلسلة رقم (2)

تمرين رقم (1)

الجدول التالي يشتمل على بيانات رقمية حول وحدات سلعة معينة ، و المنفعة الكلية المقابلة لهذه الوحدات حسب تقدير أحد المستهلكين

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
UT_x	0	25	47	66	82	94	103	109	113

فإذا علمت أن ثمن الوحدة من هذه السلعة يساوي 8 وحدات نقدية ، و أن المنفعة الحدية للنقود تساوي $\frac{2\ \text{وحدة منفعة}}{\text{وحدة نقدية}}$.

و المطلوب :

1 – حدد وضع توازن هذا المستهلك .

2 – قدر قيم المنفعة الكلية المضحى بها .

3 – قدر الفائض الكلي للمستهلك و تأكد من أعظميته عند وضع التوازن .

تمرين رقم (2)

عبر أحد المستهلكين عن المنفعة التي يكتسبها من إحدى المواد الغذائية بالصيغة الرياضية التالية :

$$UT_X = -\frac{1}{3}x^3 + 15x^2 + 20x + 12$$

و المطلوب :

1 – قدر الوحدة من هذه السلعة التي يكون من أجلها هذا المستهلك في وضع التشبع .

2 – إذا علمت أن ثمن الوحدة من هذه السلعة يساوي 5 وحدات نقدية و أن المنفعة الحدية للنقود تساوي $\frac{4\ \text{وحدات منفعة}}{\text{وحدة نقدية}}$، قدر الوحدة من السلعة التي يكون من أجلها هذا المستهلك في وضع التوازن

saadi fatima

3 - بمقارنة نتيجة هذين السؤالين ، ماذا تستنتج ؟ و بماذا تفسر هذا الاستنتاج .

تمرين رقم (3)

الجدول التالي يشتمل على بيانات رقمية حول وحدات السلعتين (X) و (Y) و المنفعة الكلية المقابلة لهذه الوحدات حسب تقدير أحد المستهلكين

x, y	0	1	2	3	4	5	6	7
UT_x	0	42	102	156	204	240	270	288
UT_y	0	26	56	80	100	118	134	146

فإذا علمت أن ثمن الوحدة من السلعتين (X) و (Y) يساوي 6 و 2 وحدة نقدية على الترتيب ، وأن المبلغ المخصص للإنفاق على هاتين السلعتين يساوي 36 وحدة نقدية .

و المطلوب

1 - حدد وضع توزن هذا المستهلك .

2 - قدر قيمة الوحدة النقدية للنقود .

3 – قدر الفائض الكلي للمستهلك عند وضع التوازن .

4 - وضح الآلية التي سلكها هذا المستهلك من بداية انفاقه لدخله إلى نهايته .

5 - صديق لهذا المستهلك يشتري نفس السلعتين و يكون في حالة توازن عند حصوله على 6 وحدات من السلعة (X) و 4 وحدات من السلعة (Y) .

و المنفعة الحدية حسب تقدير هذا المستهلك موضحة في الجدول التالي :

x, y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Umg_x	-	110	130	100	84	50	36	24	12
Umg_y	-	94	104	90	72	60	56	42	33

saadi fatima

وضح فيما إذا كانت عملية التبادل ممكنة بين هذين المستهلكين ، فإذا كانت الإجابة بالإيجاب وضح الكيفية التي تمت بها عملية التبادل بينهما مع توضيح مختلف المراحل التي مرت بها عملية التبادل ، ثم قدر المنفعة الكلية المكتسبة لكل مستهلك من قبل و بعد عملية التبادل .

تمرين رقم (4)

عبر أحد المستهلكين عن المنفعة الكلية التي يكتسبها من وحدات سلعتين (X) و (Y) بالصيغة الرياضية التالية :

$$UT_{(X,Y)} = 50 + x^2y$$

فإذا علمت أن الدخل المخصص للإنفاق على هاتين السلعتين يساوي 54.6 وحدة نقدية و أن ثمن الوحدة من السلعتين (X) و (Y) يساوي 8 و 16 وحدة نقدية على الترتيب .

و المطلوب :

1 - حدد وضع توازن هذا المستهلك .

2 - حدد قيمة المنفعة الحدية للنقود .

saadi fatima

الإجابة النموذجية

السؤال الأول:

- **أولا:**

1. تنعدم المنفعة **الحدية** عندما تبلغ المنفعة **الكلية** أعظم قيمة لها، ويطلق على هذا الوضع ب "وضع أو نقطة **الإشباع**".
2. عند وضع التوازن يكون ميل منحنى السواء **مساو** لميل خط الميزانية.
3. انتقال خط الميزانية بالكامل إلى الأعلى جهة اليمين قد ينتج عن **ثبات** سعري السلعتين **وارتفاع** الدخل النقدي
4. منحنى أنجل بالنسبة لسلعة معينة **ليس** نفسه منحنى الطلب لأنه يعبر عن العلاقة بين الكمية المطلوبة منها **والدخل**.
5. إذا كانت السلعتين x و y بديلتين، فهذا يعني أن **كمياتهما** تميل للتحرك في الاتجاه **المعاكس**.

- **ثانيا**: طبيعة **مرونة الطلب** السعرية:

1- الطلب غير مرن تماما (عديم المرونة) **2-** طلب متكافئ (أحادي) المرونة **3-** الطلب غير مرن نسبيا

السؤال الثاني:

Q	1	2	3	4	5	6	7	8
Utx	**72**	132	180	**216**	244	**264**	276	280
Uty	**28**	52	**70**	82	92	100	**106**	110
Umx	72	60	48	36	**28**	20	12	**4**
Umy	28	**24**	18	**12**	10	**8**	6	4
Umx/Px	18	**15**	**12**	9	7	5	**3**	1
Umy/Py	14	12	9	6	**5**	4	3	**2**

شرطي التوازن: 1) $Umx/Px = Umy/Py$ 2) $R = xPx + yPy$

(1) $\lambda = 12$ (x=2 , y=3) …… R=(2)(4)+(3)(2)= 14 < **34** الشرط غير محقق

(2) $\lambda = 9$ (x=3 , y=4) …… R=(3)(4)+(4)(2)= 20 < **34** الشرط غير محقق

(3) $\lambda = 5$ (x=6 , y=5) …… R=(6)(4)+(5)(2)= 34 = 34 الشرط محقق

(4) $\lambda = 3$ (x=7 , y=7) …… R=(7)(4)+(7)(2)= 42 >**34** الشرط غير محقق

يتوازن المستهلك عند (x=6 , y=5)

المنفعة الكلية: $Ut = Ut_{(x=6)} + Ut_{(y=5)} = (264) + (92) = 356$

السؤال الثالث:

- دوال المنفعة الحدية: $Umy=x$ $Umx=y+1$
- دوال الطلب: $Y=(R-Py)/2Py$ $X=(R+Py)/2Px$
- التوليفة التوازنية : $Y=17$ $X=9$
- استخرج معادلة خط الميزانية: $Y=(R/Py)-(Px/Py)X$ ………. $Y=35-2X$
- معادلة منحنى السواء: $Y=(Ut-x)/x$ ……….. $Y=(162-x)/x$
- تغير Py : Py= 8 (x=9.25 , y=8.25) Py=2 (x=8.87 , y=34.5)

الاستنتاج: تغير Py أدى إلى تغير **كميات السلعتين** x و y في اتجاهين **متعاكسين**، وعليه فالسلعتين **بديلتين**.

السلسلة رقم(1) في مقياس الاقتصاد الجزئي:

المنفعة القياسية

التمرين الأول:

1- عندما تزيد المنفعة الكلية فإن المنفعة الحدية تكون:

أ- سالبة ومتزايدة ب- سالبة ومتناقصة ج-مساوية للصفر د-موجبة ومتناقصة

2- عند نقطة التشبع تكون المنفعة الحدية:

أ- موجبة ب- سالبة ج- منعدمة د- أي من الحالات السابقة

3- إذا كانت منفعة الوحدة الأخيرة المستهلكة من السلعة (X) ضعف المنفعة الحدية للسلعة (Y)، وكان المستهلك في حالة توازن فإن:

أ- سعر السلعة (X) ضعف سعر السلعة (Y) ب- تتساوى الأسعار

ج- سعر السلعة (X) نصف سعر السلعة (Y) د- أي من الحالات السابقة

التمرين الثاني:

الجدول الموالي يتضمن عدد الوحدات المستهلكة من السلعة (X) والمنافع الكلية المقابلة لها:

وحدات السلعة	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
المنافع الكلية	0	7	13	18	22	25	27	28	28	27

1- أحسب التغير الحاصل في قيم المنفعة الكلية، ماذا تستنتج؟ فسر ذلك اقتصاديا؟

2- مثل بيانيا منحنيات المنفعة الحدية والمنفعة الكلية؟ وحدد نقطة التشبع؟

التمرين الثالث:

يوضح لنا الجدول الآتي عدد الوحدات المستهلكة من السلعة (X) والمنافع ~~الكلية~~ الحدية المقابلة لها:

وحدات السلعة	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
المنافع الحدية	-	12	10	8	5	3	2	1	0	2-

أحسب قيم المنفعة الكلية المقابلة لوحدات السلعة (X)؟

التمرين الرابع:

الجدول الآتي يبين عدد الوحدات المستهلكة من السلعة (X)، والمنافع الكلية التي يحصل عليها أحد المستهلكين، مقاسة بوحدات المنفعة:

وحدات السلعة	0	1	2	3	4	5	6	7
المنافع الكلية	0	15	28	38	44	48	48	46

إذا علمت أن : $\lambda=2$ و $P_x=3$

1-أحسب قيم المنفعة الحدية؟

2-حدد عدد الوحدات من السلعة (X) التي تجعل المستهلك في حالة تشبع؟

3-حدد عدد الوحدات من السلعة (X) التي تجعل المستهلك في حالة توازن؟

4-حدد الفائض الكلي للمستهلك عند مختلف مستويات الاستهلاك؟

التمرين الخامس:

بافتراض أن المنفعة الكلية التي يحصل عليها أحد المستهلكين نتيجة استهلاكه وحدات متتالية من إحدى السلع، معطاة وفق الصيغة الرياضية الآتية: $Ut = 16x - x^2$

إذا علمت أن : $Px = 2$ و $\lambda = 3$

1- حدد عدد الوحدات من السلعة x التي تجعل المستهلك في حالة تشبع؟

2- حدد عدد الوحدات من السلعة x التي تجعل المستهلك في حالة توازن؟

3- عند أية وضعية من الوضعيتين السابقتين يتحقق السلوك الرشيد للمستهلك؟

التمرين السادس:

يقوم مستهلك بتركيز استهلاكه على سلعتي الحليب (X) والخبز (Y)، وبعد دراسة معمقة لسلوكه الاستهلاكي تبين أنه يمكن التعبير عنه وفق المعادلة الآتية: $UTxy = \frac{1}{4} x^2 y$

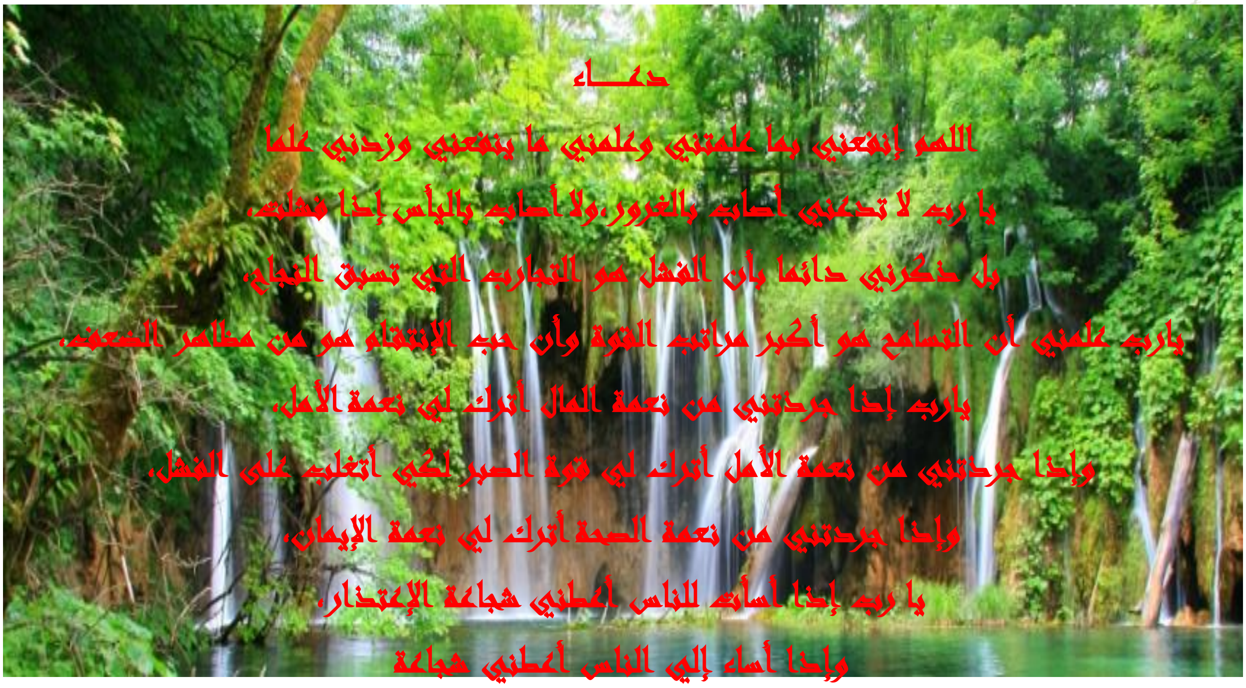
فإذا اعتبرنا أن الدخل الذي خصصه لاقتناء السلعتين خلال فترة زمنية معينة يقدر بقيمة 60 ون مع العلم أن سعر الخبز هو 3 ون، بينما سعر الحليب يمثل ضعف سعر الخبز، والمطلوب:

1- ماهي التوليفة التي تحقق أقصى إشباع ممكن لهذا المستهلك؟ (باستخدام طريقة التعويض المباشر وطريقة مضروب لاغرونج)؟

2- ماهو مقدار هذا الإشباع الأعظمي؟

3- كم تقدر قيمة المنفعة الحدية لكل من الحليب والخبز؟

saadi fatima



دعـــاء

اللهم إنفعني بما علمتني وعلمني ما ينفعني وزدني علما

يا رب لا تدعني أصاب بالغرور،ولا أصاب باليأس إذا فشلت،

بل ذكرني دائما بأن الفشل هو التجارب التي تسبق النجاح،

يارب علمني أن التسامح هو أكبر مراتب القوة وأن حب الإنتقام هو من مظاهر الضعف،

يارب إذا جردتني من نعمة المال أترك لي نعمة الأمل،

وإذا جردتني من نعمة الأمل أترك لي قوة الصبر لكي أتغلب على الفشل،

وإذا جردتني من نعمة الصحة أترك لي نعمة الإيمان،

يا رب إذا أسأت للناس أعطني شجاعة الإعتذار،

وإذا أساء إلي الناس أعطني شجاعة

العفو، اللهم إذا نسيتك فلا تنساني .

سعدي فاطمة

بالتوفيق و النجاح لطلبتنا الأعزاء

سعدي فاطمة