مبرهنة. إذا كان (X,d) فضاءاً مترياً كاملاً و كانت **S** مجموعة جزئية غير خالية **مغلقة** في X فان (S,d) يكون كاملاً.

البرهان. لتكن $\langle x_n \rangle$ متتابعة كوشية في S . إذا اعتبرنا $\langle x_n \rangle$ متتابعة في X فإنها تقترب إلى نقطة و لتكن $x_0 \in X$ لان X فضاء كامل. لذا $x_0 \in S$ او $x_0 \in \acute{S}$. و بما أن S مجموعة مغلقة لذا ستكون $x_0 \in S$.

تعريف. لتكن (X,d) فضاء متري و لتكن S مجموعة جزئية غير خالية في X فان **قطر** **diameter** المجموعة S هو $diam(S)$:

$$diam(S) = sup\{d(x,y)\ \ \forall x,y \in S\}$$

تعريف. لتكن (X,d) فضاء متري و لتكن S مجموعة جزئية غير خالية في X تكون S مجموعة مقيدة bounded set إذا كان

$$\forall x_0 \in S \ \exists\ n \in \mathbb{N}: d(x,x_0) < n \ \ \forall x \in S$$

إن معنى التعريف أعلاه **هندسياً** هو أن المجموعة S تكون مقيدة إذا كان لكل $x_0 \in S$ توجد كرة في X مركزها x_0 و تحتوي على S.

أمثلة.

١. $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ غير مقيدة. لماذا؟
٢. الفترات $[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]$ مجموعات مقيدة و قطر كل منها يساوي $b-a$. لماذا؟
٣. كل كرة نصف قطره r في $\mathbb{R}^n$ تكون مقيدة و قطرها يساوي 2r. لماذا؟
٤. ليكن (X,d) فضاء متري بحيث

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

و لتكن x_0 نقطة في X و لتكن

$$S = \{x \in X: d(x,x_0) < 1/2\}$$

لاحظ أن S تتكون من نقطة واحدة فقط x_0. لذا ستكون S مجموعة مقيدة.

و بما أن

$$d(x,y)=0\ \forall x,y\in S$$

لذا سيكون قطر المجموعة S يساوي صفر في حين أن نصف قطرها يساوي $1/2$.

مبرهنة كنتور للمجموعات المعشعشة. ليكن (X,d) فضاء متري و لتكن $\langle E_n\rangle$ متتابعة من المجموعات الجزئية المقيدة في X بحيث أن

$\ldots E_1\supseteq E_2\supseteq E_3\supseteq E_4$ و كل من E_n مجموعة مغلقة و غير خالية و

$$diam(E_n)\longrightarrow 0$$

إذا كان (X,d) فضاء كامل فان $\cap_{n\in\mathbb{N}}E_n$ يتكون من نقطة واحدة فقط و بالتالي يكون مجموعة غير خالية.

تعريف. ليكن (X,d) فضاء متري و $T:X\to X$ تطبيق يحقق الشرط

$$\exists\, r\in[0,1]:\forall x,y\in X, d(T(x),T(y))\le rd(x,y)$$

يسمى هذا النوع من التطبيقات باسم تطبيقات انكماشية contraction mapping.

مبرهنة التطبيقات الانكماشية. ليكن (X,d) فضاء متري كامل و $T:X\to X$ تطبيق انكماشي فانه توجد نقطة واحدة فقط x في X بحيث ان $T(x)=x$ (نقطة صامدة).

الفضاءات المرصوصة

Compact Spaces

ليكن X فضاء متري و لتكن S مجموعة جزئية من X اذا كانت $\{V_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ طائفة من المجموعات المفتوحة في X. يقال ان $\{V_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ غطاء مفتوح open cover لـ S إذا كان

$$S\subseteq\cup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$$

إذا كانت Λ منتهية فيقال ان $\{V_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ غطاء مفتوح منتهي finite open cover.

تعريف. إذا كان كل من $\{V_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ و $\{G_\emptyset, \emptyset \in \Phi\}$ غطاء مفتوح لـ S فيقال ان $\{V_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ غطاء جزئي subcover من $\{G_\emptyset, \emptyset \in \Phi\}$ إذا كان كل عنصر ينتمي الى $\{V_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ينتمي إلى $\{G_\emptyset, \emptyset \in \Phi\}$.

تعريف. يقال إن المجموعة الجزئية S مرصوصة compact في X إذا كان كل غطاء مفتوح $\{V_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ لـ S يمتلك غطاء جزئي منته.

ملاحظة. ان الغرض من التعريف أعلاه هو ليس اختبارنا أن المجموعة S تمتلك غطاءاً جزئياً منتهياً لان هذه العبارة تافهة بل الغرض هو تمييز صنف معينه من المجموعات التي يمكن فيها الاستغناء عن الغطاءات غير المنتهية و الاكتفاء بالغطاءات المنتهية. سنجد ان هذا الصنف من المجموعات يمتلك بعض مميزات المجموعات المنتهية.

امثلة.

1.كل مجموعة منتهية في أي فضاء المتري X تكون مرصوصة. كيف؟

2.الفترة المفتوحة $(0,1)$ غير مرصوصة.

البرهان. لكل $n \in \mathbb{N}$ لتكن $A_n = (\frac{1}{n}, 2)$ من الواضح أن كلاً من A_n مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$.

$$(0,1) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

$$A_n \subset A_{n+1} \ldots\ldots *$$

في الواقع: اذا كان $r \in (0,1)$ فانه حسب خاصية ارخميدس يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث ان $\frac{1}{k} < r$ و هذا يعني أن

$$r \in \left(\frac{1}{k}, 2\right) = A_k \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

و هذا يؤدي إلى أن

$$(0,1) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

ان هذا الغطاء لا يحتوي على غطاء جزئي منته. لان اتحاد أي عدد منته من الفترات A_n سيكون واحدة من الفترات و ذلك حسب * و لذلك لا يغطي $(0,1)$.

3. الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ غير مرصوص.

إذا كان $B_k(0)$ الكرة التي مركزها 0 و نصف قطرها k. فان الطائفة $\{B_k(0), k \in \mathbb{N}\}$ تكون غطاءاً مفتوحاً لـ $\mathbb{R}^n$ و لكن هذا الغطاء لا يحتوي على غطاء جزئي منته لان اتحاد أي عدد منته من الكرات سيكون واحدة من الكرات.

4. المجموعة $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots 0\right\}$ مرصوصة في $\mathbb{R}$.

نفرض ان $\{V_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ غطاء مفتوح لـ S أي أن

$$S \subseteq \cup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

و إن كل مجموعة V_λ هي مفتوحة.

يوجد $\lambda_0 \in \Lambda$ بحيث ان $0 \in V_{\lambda_0}$. و بما ان V_{λ_0} هي مجموعة مفتوحة لذا توجد فترة مفتوحة $(-r, r)$ في V_{λ_0} و هذه الفترة تحتوي *0*. حسب خاصية ارخميدس يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث ان $\frac{1}{k} < r$ لذلك

$$\frac{1}{n} \in (-r, r) \quad \forall n > k$$

أي أن المجموعة V_{λ_0} تحتوي جميع عناصر S ما عدا من المحتمل العناصر

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k-1}, \frac{1}{k}.$$

و الان لكل واحدة من هذه العناصر يوجد V_{λ_i} بحيث ان

$$\frac{1}{i} \in V_{\lambda_i}, \quad 1 \le i \le k$$

و هكذا $\{V_{\lambda_i}, \mathrm{i} = 0,1, \dots, \mathrm{k}\}$ غطاء جزئي منته من الغطاء $\{V_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ للمجموعة S. نستنتج من هذا أن S مرصوصة.

تمرين.

برهن ان المجموعة $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ غير مرصوصة في $\mathbb{R}$.

المبرهنة الاتية تبين اهمية الفضاءات المرصوصة عند دراسة نقاط التجمع.

مبرهنة. اذا كان X فضاء مرصوص. فكل مجموعة جزئية غير منتهية في X تمتلك نقطة تجمع واحدة على الاقل.

البرهان. نفرض ان المبرهنة غير صحيحة و لتكن S مجموعة جزئية غير منتهية في X لا تمتلك نقطة تجمع. أي ان $\acute{S} = \emptyset$ بما ان $\acute{S} = \emptyset \subset S$ فان S مجموعة مغلقة لذا ستكون متممتها مجموعة مفتوحة. بما ان كل نقطة في S هي ليست نقطة تجمع لـ S. لذا توجد كرة $B(x)$ بحيث ان

$$B(x) \cap S = \{x\} \ \forall x \in S$$

و بما ان $X = S \cup S^c$ لذا ستكون $X \subseteq \cup_{x\in S} B(x) \cup S^c$ و بما ان X فضاء مرصوص توجد $x_1, x_2, \dots x_n$ في S بحيث ان

$$X \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i) \cup S^c.$$

و بتقاطع الطرفين مع S نحصل على

$$S \subseteq \cup_{i=1}^{n} \{x_i\}$$

و هذا يناقض الفرض القائل ان S مجوعة غبر منتهية. نستنتج من هذا التناقض ان S تمتلك نقطة تجمع واحدة على الاقل.

مبرهنة. اذا كان X فضاء مرصوص. فكل مجموعة مغلقة في X تكون مرصوصة.

البرهان. لتكن S مجموعة مغلقة في X . لذا ستكون متممتها مجموعة مفتوحة. و ليكن $\{V_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ غطاء مفتوح لـ S.من الواضح ان

$$X = S \cup S^c \subseteq (\cup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda) \cup S^c$$

و بما ان X فضاء مرصوص يوجد $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ بحيث ان

$$X \subseteq \left(\cup_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}\right) \cup S^c$$

و بتقاطع الطرفين مع S سنحصل على ان

$$S \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$$

وهذا يؤدي إلى أن S مجموعة مرصوصة.

المبرهنة الاتية هي عكس المبرهنة السابقة

مبرهنة. اذا كان X فضاء متري. فكل مجموعة مرصوصة في X تكون مغلقة.
البرهان. واجب.

مبرهنة. إذا كان (X, d) فضاء متري. فكل مجموعة مرصوصة في X تكون مقيدة.
البرهان. لتكن S مجموعة مرصوصة. و لتكن x_0 نقطة في S. نضع $B_n(x_0)$ لكل عدد طبيعي n. إن $S \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n(x_0)$ و بما ان S مجموعة مرصوصة يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث ان

$$S \subseteq \cup_{n=1}^{k} B_n(x_0)$$

و بما ان

$$B_1(x_0) \subset B_2(x_0) \subset \cdots \subset B_k(x_0)$$

فان

$$S \subseteq \cup_{n=1}^{k} B_n(x_0) = B_k(x_0)$$

أي أن S مجموعة مقيدة.

ملاحظة. من المبرهنتين أعلاه نستنتج إن **كل مجموعة مرصوصة تكون مغلقة و مقيدة**.
كما إن عكس العبارة أعلاه لا يكون صحيحاً دائماً. لتكن A مجموعة غير منتهية. و(A, d) هو فضاء متري بحيث ان

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

لاحظ أن كل مجموعة جزئية من A تكون مغلقة و مقيدة (لماذا؟). لتكن T هي مجموعة جزئية غير منتهية من A. لاحظ إن

$$H = \{\{t\}, t \in T\}$$

هو غطاء مفتوح إلى T لكنه لا يحتوي على غطاء جزئي يغطي T. و هذا يعني ان T مجموعة غير مرصوصة.

مبرهنة هاين و بوريل. **كل مجموعة مغلقة و مقيدة في $\mathbb{R}^n$ تكون مرصوصة.**