وزارة التعليم العالي والبحث
العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية
قسم الرياضيات

اساسيات
في
التحليل الرياضي

اعداد :
زينب اباذر محمد

الفــصــل الاول

المجموعات

الفصل الأول
المجموعات SETS

1.1 مقدمة

يعتبر مفهوم المجموعة من المفاهيم الاولية الغير قابلة للتعريف لان اي محاولة لتعريف المجموعة تؤدي الى استخدام كلمات مرادفة لها مثلاً اسرة، جملة ، لفيف ، تجمع .

1.2 المجموعة

هي تجمع من الاشياء المحددة والمعرفة تعريفاً تاماً وكل منها يسمى عنصراً ، ويُرمز للمجموعات بحروف لاتينية كبيرة مثل A، B، C ، D، .....الخ وعناصرها بحروف صغيرة a ، b ، c ، d ، .....الخ .وعادة ما تُكتب هذه العناصر بين قوسين من النوع {} وتوضع فواصل بينها ،فبهذا التعريف نكتب المجموعة A التي عناصرها π,1,0,2- كالتالي:

$$A=\{-2,0,1,\pi\}$$

1.3 طرق التعبير عن المجموعة

توجد طريقتان للتعبير عن المجموعة وهي كما يلي :

(1) يمكن تعريف المجموعة بذكر جميع عناصرها وبدون تكرار ، فأذا رمزنا لمجموعة حروف كلمة (basra) بالرمز X فأن :

$$X=\{b,a,s,r\}$$

(2) يمكن تعريف المجموعة بذكر الخواص التي تُميز عناصرها ، فمثلاً وكما في المثال اعلاه يمكن كتابة المجموعة X بالشكل :

X = { x : (basra) حرف من حروف كلمة x}

والتي تقرأ X هي مجموعة العناصر x ، حيث ان x حرف من حروف كلمة basra.

مثال : اذا كانت $x=\{3,6,9,12,15,18,21\}$
فأن x تعني مجموعة كل مضاعفات العدد 3 الاقل من 24. ويمكن كتابتها بشكل اخر
$X = \{ x :$ x يمثل عدد من مضاعفات العدد 3 الاقل من 24 $\}$

ملاحظة : يستخدم الرمز $\in$ (الانتماء) للتعبير عن علاقة عنصر في المجموعة فأذا قلنا ان $a \in X$ فهذا يعني ان a عنصر من عناصر المجموعة X .
بالمثل يمكن التعبير عن عدم انتماء عنصر للمجموعة بالشكل $b \notin x$

مثال : لتكن $x=\{2,4,6\}$ فأن $2 \in X$ لكن $3 \notin x$

1.4 مجاميع الاعداد

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع العديد من المجموعات التي كل منها توسيع وامتداد لسابقتها .
وقد سبق لك عزيزي الطالب دراستها في مراحل التعليم السابقة ، وفيما يلي تذكير وتأصيل هذه المجموعات

1.4.1مجموعة الاعداد الطبيعية Natural Numbers

وهي مجموعة الاعداد الاساسية المألوف عليها ويُرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير N وتُعرف كالاتي :
$$N=\{0,1,2,3,4,\ldots..\}$$

1.4.2 مجموعة الاعداد الصحيحة Integer Numbers

وهي مجموعة الاعداد الطبيعية مضافاً اليها مجموعة الاعداد السالبة ويُرمز لها بالحرف Z وتُعرف كالاتي :
$$Z =\{\ldots..,-2,-1,0,1,2, \ldots..\}$$

1.4.3 مجموعة الاعداد النسبية او الكسرية Rational Numbers

وهي المجموعة التي تكون فيها الاعداد على شكل كسر لعددين صحيحين (بسط ومقام) بشرط ان لا يساوي المقام فيها الصفر ويُرمز لها بالحرف Q وتُعرف كالاتي :

$$Q = \{\frac{a}{b} \mid b \neq 0, \text{ اعداد صحيحة b و a}\}$$

1.4.4 مجموعة الاعداد الغير نسبية Irrational Number

يُرمز لها بالرمز I وتُعرف كالاتي :

I={x| كسر عشري غير منته وغير مدور x}

1.4.5 مجموعة الاعداد الحقيقية Real Number

وتحتوي على مجموعة الاعداد الطبيعية والاعداد الصحيحة والاعداد النسبية والغير النسبية ويُرمز لها بالحرف R وتُعرف كالاتي :

R=IUQ

1.5 المجموعة الخالية

وهي المجموعة التي لا تحتوي على اي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ او { }

مثال: {x عدد صحيح ϕ , $=\{x:x^2=-3$

مثال: A={x:x<0 و x>0} هي مجموعة خالية لانه ليس هناك عنصر يحقق الشرط المذكور.

ملاحظة : تعتبر المجموعة الخالية مجموعة وحيدة وجزئية من اي مجموعة اخرى

1.6 المجموعة الجزئية

لتكن A و B مجموعتين يقال ان B مجموعة جزئية من A (Proper subset) اذا كانت محتواة في A ونرمز لها كالاتي :A ⊂ B ويمكن كتابتها رياضياً كالتالي :

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

اذا كانت $B \subseteq A$ و $A \neq B$ فنقول ان B مجموعة جزئية فعلية من A ونكتب $A \supset B$. اما اذا كانت B ليست مجموعة جزئية من A فنكتب $B \not\subset A$.

مثال : $N \supset \{0, 1, 2\}$ لكن
$\{-1, 0, 2\} \not\subset N$

مثال : لتكن المجموعات التالية : $C = \{3,11,12\}$ ، $B = \{5,24\}$ ، $A = \{3,5,11,24\}$ نلاحظ عند مقارنة B وC مع A ان : $A \supset B$ لكن $A \not\supset C$ لان العدد 12 لا ينتمي الى A.

مثال : اذا كانت $A = \{x \mid -2 < x < 2$, عدد صحيح $x\}$ فأن A مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الصحيحة Z اي ان $A \subseteq Z$ حيث ان
$Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
لاحظ ان $A \not\subset N$ حيث ان N مجموعة الاعداد الطبيعية
$N = \{0,1,2,3,\ldots\}$

مثال : لتكن $A = \{2,4,6,8\}$ و $B = \{3,6,9\}$ لاحظ ان
$A \not\subset B$ و $B \not\subset A$

1.7 تساوي المجموعات

يقال ان المجموعتين A و B متساويتين اذا وفقط اذا كانت A مجموعة جزئية من B و B مجموعة جزئية من A اي ان :

$$A = B \longleftrightarrow A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A$$

مثال : اذا كانت

$A = \{ x : (x-2)(x-3) = 0$, عدد صحيح $x\}$
و $B = \{ 2, 3 \}$
لاحظ ان $A = \{ 2, 3 \}$ و $B = \{ 2, 3 \}$

وان $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$ اي ان $A = B$

مثال: هل المجموعتان التاليتان متساويتان :

$A=\{0,1\}$ ، $B=\{x : x \in N , x^2-x=0\}$

الحل : عناصر المجموعة A معروفة ومحددة ولكن علينا تحديد عناصر المجموعة B بحل المعادلة المعطاة:

$x^2-x= x(x-1)=0 \Longrightarrow x=0$ او $x=1$

اذن $B=\{0,1\}$ ومنه نستنتج ان $A=B$

1.8 مبرهنة (1-1)

(1) اي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها اي ان $A \subset A$

(2) المجموعة الخالية Φ هي مجموعة جزئية من اي مجموعة كانت A اي ان $\Phi \subset A$

1.9 المجموعة المنتهية

يُقال لمجموعة ما انها منتهية (Finite) اذا كانت خالية او انها تحتوي على عناصر يمكن عدها او حصرها والا فأنها تُسمى غير منتهية (Infinite) .

مثال : A مجموعة الاعداد الطبيعية الاقل من 25 مجموعة منتهية ، بينما مجموعة الاعداد الطبيعية غير منتهية .

$A = \{ 0 , 1 , 2 , 3, \dots , 24 \}$

$N = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , \dots \}$

1.10 المجموعة الشاملة Universal Set

هي المجموعة التي تكون كل المجموعات قيد البحث جزئية منها ، ويرمز لها بالرمز U.

مثال : اذا كانت $A = \{ 1 , 3 , 5 \}$ ، $B = \{ 2 , 4 , 6 \}$ ،

$C = \{1, 2, 3\}$ فأن المجموعة الشاملة بالنسبة للمجموعات A ، B ، C هي :

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

او ممكن اخذها $U = N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1.11 خصائص المجموعة الجزئية

1) $\Phi \subseteq A \subseteq U$

2) $A \subseteq A$,

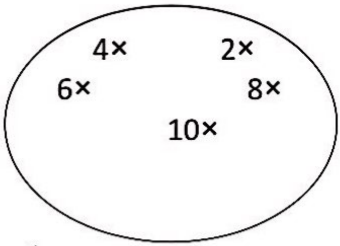
3) $A \subseteq B$ و $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$

4) $A = B \Longrightarrow A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

1.12 مخططات ڤين Venn Diagrams

يمكن تمثيل المجموعة بمنحني مغلق كالدائرة او المستطيل او المربع ويسمى هذا المنحني المغلق بمخطط ڤين .

مثال : المجموعة $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ يمكن تمثيلها بمخطط ڤين بالشكل



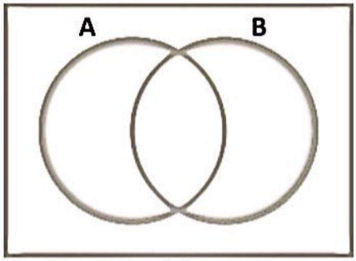
ملاحظة : مخططات ڤين لا يمكن اعتبارها برهاناً رياضياً فقط يمكن الاستفادة منها في توضيح برهان او مفهوم معين من المفاهيم الرياضية .

1.13 اتحاد المجموعات Union of sets

لتكن كل من A ، B مجموعة فأن اتحاد A مع B هو مجموعة العناصر التي تنتمي الى A او الى B او الى كليهما ويرمز له بالرمز $A \cup B$ ويعرف رياضياً كما يلي : $A \cup B = \{x \mid x \in A$ او $x \in B\}$

اي ان $x \in B$ او $x \in A \longleftrightarrow x \in A \cup B$

يمكن توضيح الاتحاد لمجموعتين بمخططات ڤين كالاتي حيث ان الجزء المظلل يمثل الاتحاد :



$A \cup B$

مثال : لتكن المجموعتان $B=\{2,4,6\}$ ، $A=\{1,2,3,5\}$

فأن: $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

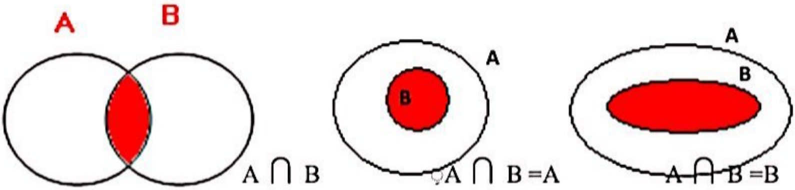
1.14 تقاطع المجموعات Intersection of sets

لتكن A ، B مجموعتين فأن تقاطع A مع B هو مجموعة كافة العناصر المشتركة بين A و B ويرمز له بالرمز $A \cap B$ وتُعرف كما يلي :

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ و } x \in B \}$$

اي ان $x \in B$ و $x \in A \longleftrightarrow x \in A \cap B$

يمكن توضيح التقاطع لمجموعتين بمخططات ڤين كالاتي :



مثال : لتكن المجموعتين $B=\{x:x\in N ,x\geq 11\}$ ، $A=\{x: x\in N,x\geq 6\}$

اذاً : $A\cap B=\{x: x\in N , x\geq 11\}$

الفصل الثاني

العلاقات

الفصل الثاني
العلاقات RELATIONS

2.1 مقدمة
يُعد موضوع العلاقات من المواضيع الاساسية والمهمة في مختلف فروع الرياضيات ، والعلاقة كما درسها الطالب سابقاً ، تُمثل مجموعة الازواج المرتبة وهي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين ، ومن المفيد هنا ان نُذكر الطالب بأنواع العلاقات وبعض العمليات الجبرية عليها.

2.2 الزوج المرتب Order Pair
يقال ان $x = (a,b)$ زوج مرتب حيث ان a المسقط الاول للزوج المرتب x وb المسقط الثاني للزوج المرتب x.
ومن المهم معرفة ان الزوج المرتب (a,b) لا يساوي الزوج المرتب (b,a) .

2.3 الضرب الديكارتي Cartesian Product
لتكن كل من A و B مجموعة غير خالية ، فأن حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين A و B هو مجموعة عناصرها لجميع الازواج المرتبة (a,b) حيث ان $a \in A$ و $b \in B$ ويرمز له بالرمز $A \times B$ وبعبارة اخرى

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \, , \, b \in B\}$$

مثال : لتكن $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{a,b\}$

فأن $A \times B = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,a),(1,b),(2,b),(3,b),(4,b)\}$

وأن $B \times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4)\}$

لاحظ ان $A \times B \neq B \times A$

ملاحظة :
1) اذا كانت المجموعة A تحتوي على m من العناصر وان المجموعة B تحتوي على n من العناصر فأن المجموعة $A \times B$ تحتوي على (mn) من العناصر . ففي المثال اعلاه المجموعة $(A \times B)$ تحتوي على $8=(4)2$ من العناصر وان $B \times A$ تحتوي على $8=(2)4$ من العناصر

2) اذا كانت المجموعة A او المجموعة B تحتوي على عدد غير منتهي من العناصر (مجموعة غير منتهية) فأن $A \times B$ ايضاً تكون غير منتهية.
3) اذا كانت المجموعة A او المجموعة B مجموعة خالية فأن المجموعة $A \times B$ تكون مجموعة خالية.

2.8 العلاقة Relation

لتكن كل من A و B مجموعة فأن اي مجموعة جزئية من A × B تسمى علاقة ، فأذا فرضنا ان R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B فأن

$$R \subseteq A \times B$$

ويمكن التعبير عن العلاقة بأحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الاولى : كتابة عناصرها

الطريقة الثانية : أعطاء الصفة المميزة لعناصرها فتكتب بالشكل :

$$R=\{(x,y)|x \in A \text{ و } y \in B, P(x,y)\}$$

حيث ان P(x,y) هي الصفة المميزة لعناصرها

ملاحظة : اذا كان (x,y) عنصراً في R فأننا نعبر عن هذا الانتماء بالرمز xRy ويُقرأ x يرتبط مع y بالعلاقة R وإذا لم يكن (x,y) عنصراً في R اي ان $(x,y) \not\in R$ فيكتب $x \not R y$ ويُقرأ (x لا يرتبط مع y بالعلاقة R)

تعريف : تُسمى R علاقة على المجموعة A اذا كانت $R \subseteq A\times A$

مثال : لتكن $A=\{2,3,5,7\}$ و $B=\{4,6,8\}$ وان العلاقة R من A الى B مُعرفة كالاتي : aRb اذا وفقط اذا كان $b=a+1$ حيث ان $a \in A$ و $b \in B$ فأن

$$R=\{(3,4),(5,6),(7,8)\}$$

مثال : اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5,9,16,25\}$ والعلاقة R مُعرفة على المجموعة A كما يلي aRb اذا وفقط اذا كان $b=a^2$ حيث ان $a,b \in A$ فأن

$$R=\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)\}$$

2.9 المنطلق والمدى للعلاقة

لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B.

تسمى مجموعة العناصر الاولى من الازواج المرتبة في R بمنطلق العلاقة R ويُرمز لها بالرمز dom R اي ان :

$$\text{dom } R=\{x : \exists\, y \in B: (x,y) \in R\}$$

تسمى مجموعة العناصر الثانية من الازواج المرتبة في R بمدى العلاقة R ويُرمز لها بالرمز ran R اي ان :

$$\text{ran } R=\{y : \exists\, x \in A: (x,y) \in R\}$$

ونلاحظ ان : $\text{dom } R \subseteq A$ ، $\text{ran } R \subseteq B$

مثال : اذا كانت $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{a,b\}$ و $R=\{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ علاقة من A الى B فأن $\text{ran } R=\{a,b\}$ ، $\text{dom } R=\{1,2,3\}$

مثال : اذا كانت R علاقة على مجموعة الاعداد الحقيقية $\Re$ ومعرفة كالاتي :

$R=\{(x,y) \in \Re^2 :y=x\}$ فأن $\text{dom } R=\Re$ ، $\text{ran } R=\Re$

2.12 انواع العلاقات

2.12.1 العلاقة الانعكاسية Reflexive Relation

تُسمى R علاقة انعكاسية على المجموعة A اذا وفقط اذا كان لكل $a \in A$ يكون $(a,a) \in R$.

2.12.2 العلاقة المتناظرة Symmetric Relation

تُسمى R علاقة متناظرة على المجموعة A اذا وفقط اذا كان

$$(a,b) \in R \longleftrightarrow (b,a) \in R$$

2.12.3 العلاقة المتعدية Transitive Relation

تُسمى R علاقة متعدية على المجموعة A اذا وفقط اذا كان

$$(a,b) \in R \text{ و } (b,c) \in R \longrightarrow (a,c) \in R$$

2.12.4 علاقة التكافؤ Equivalent Relation

تُسمى R علاقة تكافؤ على المجموعة A اذا وفقط اذا كان كانت R علاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية .

مثال : لتكن كل من R و T علاقة متناظرة على مجموعة ما ، برهن على ان العلاقة $R \cap T$ علاقة متناظرة على نفس المجموعة ؟

البرهان : لنفرض ان $(x,y) \in R \cap T$

$\longrightarrow (x,y) \in T$ و $(x,y) \in R$

وبما ان R ، T علاقة متناظرة

اذن $(y,x) \in T$ و $(y,x) \in R$

$\longrightarrow (y,x) \in R \cap T$

اذن $R \cap T$ علاقة متناظرة

مثال: اذا كانت $A=\{1,2,3\}$ و R_1 ، R_2 ، R_3 علاقة معرفة على A كالاتي :

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$$
$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)\}$$
$$R_3 = \{(3,1),(2,2),(3,3),(3,2),(1,1),(1,3)\}$$

الحل : (1) العلاقة R_1

أ- R_1 علاقة انعكاسية لان لكل $a \in A$ يكون $(a,a) \in R_1$

ب- R_1 علاقة متناظرة لانه $(1,2) \in R_1$ و $(2,1) \in R_1$

ج- R_1 علاقة متعدية لانه

$(1,1) \in R1 \longrightarrow (2,1) \in R_1$ و $(1,2) \in R_1$

$(1,2) \in R1 \longrightarrow (2,2) \in R_1$ و $(1,2) \in R_1$

د- R1 علاقة تكافؤ لانها انعكاسية ومتناظرة ومتعدية

(2) العلاقة R_2

R_2 ليست انعكاسية لان $R_2 \notin (3,3)$ اذن R_2 ليست تكافؤ

(3) العلاقة R_3

أ- R_3 انعكاسية لانهُ لكل $a \in A$ يكون $(a,a) \in R_3$

ب- R_3 ليست متناظرة لانه $(3,2) \in R_3$ لكن $R_3 \notin (2,3)$ اذن R_3 ليست تكافؤ.

مثال: لتكن S علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R بالشكل التالي :

$$S = \{(x,y) | x+2y=3\}$$

اختبر العلاقة S من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ، تكافؤ .

الحل: (1) S ليست انعكاسية لانه $2 \in R$ لكن $(2,2) \notin S$ لان

$X+2y=2+2(2)=2+4=6 \neq 3$

(2) S ليست متناظرة لانه $(-1,2) \in S$

لكن $(2,-1) \notin S$ لانه $2+2(-1)=2-2=0 \neq 3$

(3) S ليست متعدية لان $(2,\frac{1}{2}) \in S$, $(-1,2) \in S$

لكن $(-1,\frac{1}{2}) \notin S$ اذن S ليست تكافؤ .

مثال: لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الصحيحة كالاتي :

$(x,y) \in R \longleftrightarrow 7$ يقبل القسمة على $(x-y)$

اثبت ان R علاقة تكافؤ.

الحل: (1) بما ان $x \in Z$ فأن $(x,x) \in R$ لان $x-x=0$ والصفر عدد يقبل القسمة على 7 اذن R علاقة انعكاسية.

(2) اذا كان $(x,y) \in R$ اي ان $x-y$ يقبل القسمة على 7 اذن

$y-x=-(x-y)$

اذن $y-x$ يقبل القسمة على 7 اذن $(y,x) \in R$ اذن R علاقة متناظرة

(3) $(x-y)$ يقبل القسمة على 7 و $(y-z)$ يقبل القسمة على 7 فأن

$x-y+y-z=x-z$

حاصل جمع عددين يقبلان القسمة على 7 عدد اخر يقبل القسمة على 7 اي انه $(x-z)$ يقبل القسمة على 7 ، اذن R علاقة متعدية

اي ان R علاقة تكافؤ.

2.13 العلاقة التخالفية Antisymmetric Relation

يقال للعلاقة R المعرفة على المجموعة A انها علاقة تخالفية اذا تحقق الشرط التالي : $(a,b) \in R \ \forall$ و $(b,a) \in R \longrightarrow a=b$

مثال :اذا كانت $A=\{1,2,3,4\}$ و R علاقة معرفة على A بالشكل الاتي:

$$R=\{(2,1),(1,2),(4,3)\}$$

هل ان R علاقة تخالفية ؟

الجواب : R ليست تخالفية لان $(2,1) \in R$ و $(1,2) \in R$ لكن $1 \neq 2$

2.15 علاقة الترتيب الجزئي Partial ordered Relation

يُقال لعلاقة معرفة على المجموعة A انها علاقة ترتيب جزئي اذا وفقط اذا كانت هذه العلاقة انعكاسية ومتخالفة ومتعدية.

مثال: بين ان العلاقة R المعرفة على N علاقة ترتيب جزئي حيث ان :

$R=\{(a,b)\in N\times N \mid a\geq b\}$

الحل: (1) R انعكاسية لان $a\geq a$ لكل $a\in N$

(2) $a\geq b$ و $b\geq a \Longrightarrow a=b$ $\therefore$ R تخالفية

(3) $a\geq b$ و $b\geq c \Longrightarrow a\geq c$ $\therefore$ R متعدية

$\therefore$ R علاقة ترتيب جزئي

مثال: لتكن S علاقة معرفة على N^+ بالشكل

$S=\{(a,b)\in N^+\times N^+ \mid a/b$ (b يقسم a)$\}$ برهن على ان S علاقة ترتيب جزئي؟

الحل: 1) S انعكاسية لان $\forall\ a|a$, $a\in N^+$

2) S تخالفية لان $a|b$ و $b|a \longrightarrow a=b$ $\forall\ a,b\in N^+$

3) S متعدية لان $a|b$ و $b|c \longrightarrow a|c$ $\forall\ a,b,c\in N^+$

اذن S علاقة ترتيب جزئي.

2.16 علاقة الترتيب الكلي Total ordered Relation

يُقال للعلاقة المعرفة على المجموعة A انها علاقة ترتيب كلي اذا كانت R علاقة ترتيب جزئي و لكل $a,b\in A$ اما $(a,b)\in R$ او $(b,a)\in A$.

مثال : لتكن $A=\{1,2,3,4,12\}$ برهن ان علاقة ($\leq$) علاقة ترتيب كلي $R=\{(a,b)\in A\times A \mid a\leq b\}$ ؟

الحل: 1) R انعكاسية لان $a\leq a$ لكل $a\in A$.

2) R تخالفية لان $a\leq b$ و $b\leq a$ فأن $a=b$

3) R متعدية لان $\forall\ a,b,c\in A$ فأنه اذا كان $a\leq b$ و $b\leq c$ فأن $a\leq c$

اذن R علاقة ترتيب جزئي

4) لاحظ ان $1\leq 12$ و $1\leq 4$ و $1\leq 3$ و $1\leq 2$

$2\leq 12$ و $2\leq 4$ و $2\leq 3$

$3\leq 4$ و $3\leq 12$ و $4\leq 12$

$\therefore$ R علاقة ترتيب كلي علي A

مثال: لتكن $A=\{1,2,3\}$ فأن:

$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

العلاقة $R=\{(1,1),(1,3),(2,2)\}$ المعرفة على المجموعة A ليست انعكاسية وليست متناظرة(non-symmetric) ولكنها متعدية ومتخالفة.

العلاقة $Q=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ المعرفة على المجموعة A متناظرة وليست متعدية وليست متخالفة ، ليست انعكاسية ؟

العلاقة $H=\{(1,1),(1,2)(2,1)\}$ المعرفة على المجموعة A متناظرة وليست متعدية (non-transitiv)، وليست متخالفة، ليست انعكاسية (non-reflexive)) .

مثال: اذا كانت N مجموعة الاعداد الطبيعية و R هي العلاقة $\leq$ على N فأن:

R علاقة متخالفة لانه اذا كان $(x,y)\in R,(y,x)\in R$ فأن $x=y$ اي ان

$x\leq y\ ,\ y\leq x \Longrightarrow x=y$

ايضاً العلاقة R انعكاسية لانه لكل $a\in N$ فان $(a,a)\in R$ حي كل عدد طبيعي يساوي نفسه.

العلاقة R ليست متناظرة لان $(1,2)\in R$ بينما $(2,1)\notin R$

الفصــل الثــالــث
الدوال

الفصل الثالث
الدوال THE FUNCTIONS

3.1 مقدمة

سندرس في هذا الفصل نوعاً مهماً من العلاقات ، والتي تسمى بالدوال او التطبيقات ، ولهذه الدوال أهمية كبيرة في تطبيقات عديدة في العلوم المختلفة.

3.2 الدالة

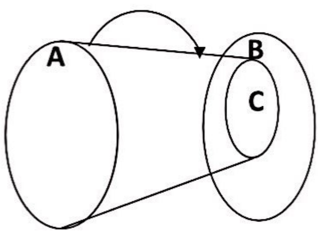
اذا كانت f علاقة من المجموعة $A\neq \Phi$ الى المجموعة B، يُقال ان f دالة من A الى B اذا كان لكل عنصر في A يوجد عنصر وحيد في B ويرمز لذلك بالرمز $f: A \longrightarrow B$ اي ان f دالة من A الى B اذا وفقط اذا كان :

1) f علاقة من A الى B $(f \subseteq AxB)$
2) لكل $x \in A$ يوجد $y \in B$ بحيث ان $(x,y) \in f$
3) اذا كان $y_1=f(x_1)$ و $y_2=f(x_1)$ فأن $y_1=y_2$ لكل $x_1 \in A$

اي انه لكل عنصر في المجموعة A يوجد عنصر وحيد في B بحيث ان $y=f(x)$

3.3 مدى الدالة :

المجموعة A تسمى منطلق الدالة f (Domain of) ويرمز لها بالرمز D_f والمجموعة B تسمى مستقر الدالة f (Co.domain of f) واذا كانت $C\subseteq B$ و $f:A \longrightarrow C$ فأن المجموعة C تسمى مدى الدالة f (Range of f) ويرمز لها بالرمز R_f.



اي ان $R_f=\{f(x)|\ x \in A\}$

<u>3.4 بيان الدالة :</u>

لتكن $f:A \longrightarrow B$ دالة فأن المجموعة التي عناصرها جميع الازواج المرتبة (x,y) في AxB تسمى بيان الدالة ويرمز لها بالرمز G وتُعرف :

$$G= \{(x,y) \in AxB | y=f(x)\}$$

<u>3.5 تساوي الدوال :</u>

اذا كانت $f:A \longrightarrow B$ و $g:A \longrightarrow B$ فيقال ان $f=g$ اذا كان

$$f(x)=g(x); \forall x \in A$$

واذا وجد على الاقل عنصر واحد x في A بحيث ان $f(x) \neq g(x)$ فيقال ان f لا تساوي g ويكتب $f \neq g$.

<u>مثال</u> : لتكن $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{1,2,3\}$ و

$f_1=\{(a,1),(b,2),(d,3),(e,3)\}$

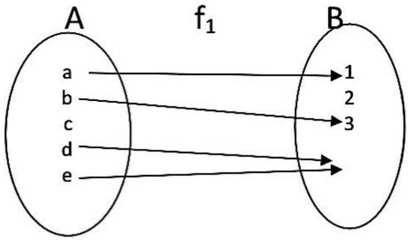
$f_2=\{(a,1),(b,1),(c,1),(d,1),(d,2),(e,3)\}$

$f_3=\{(a,1),(b,1),(c,2),(d,2),(e,2)\}$

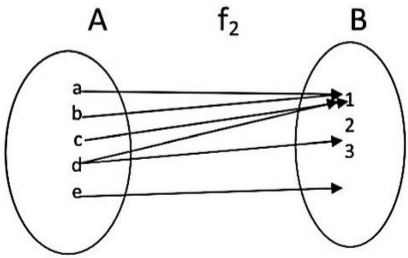
$f_4=\{(a,1),(b,1),(c,2),(d,3),(e,3)\}$

اي من العلاقات اعلاه هي دالة من A الى B ؟

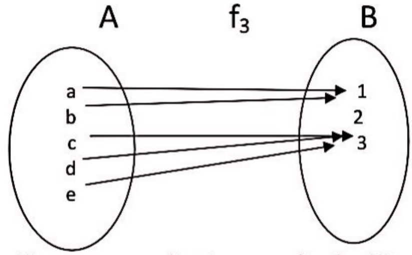
<u>الحل :</u>



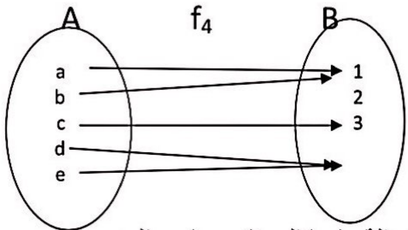
لاحظ ان f_1 ليست دالة لان العنصر $c \in A$ لا يرتبط مع اي عنصر من عناصر المجموعة B .



ايضاً f_2 ليست دالة لان العنصر $d \in A$ له صورتين مختلفتين .

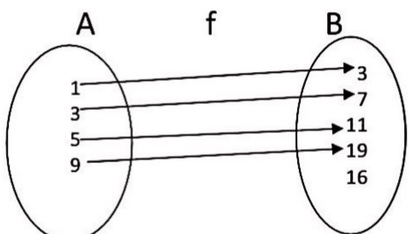


اما العلاقة f_3 هي دالة على الرغم من ان العنصر $3 \in B$ الذي لا يُقابل اي عنصر من عناصر المجموعة A، اي ان مستقر الدالة لا يساوي مداها.



لاحظ ان f_4 دالة وفيها المستقر يساوي المدى.

<u>مثال</u> : لتكن $A=\{1,3,5,9\}$ و $B=\{3,7,11,19,16\}$ ولتكن f علاقة من A الى B معرفة بالشكل: $f=\{(x,y)|y=2x+1\}$ هل ان f تمثل دالة من A الى B ؟

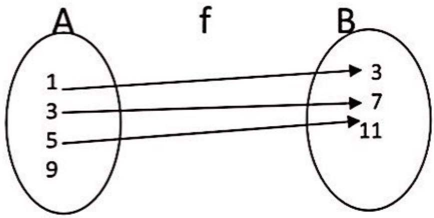


<u>الحل</u> : لاحظ ان كل عنصر في A يرتبط مع عنصر وحيد في B اي ان :

$f=\{(1,3),(3,7),(5,11),(9,19)\}$

اي ان f دالة من A الى B

مثال : لتكن $A=\{1,3,5,9\}$ و $B=\{3,7,11\}$, $f=\{(x,y)|y=2x+1\}$
و f علاقة معرفة من A الى B ، هل ان f تُمثل دالة من A الى B ؟



الحل : f ليست دالة لان العنصر $9 \in A$ ليست له صورة في B اي ان

$$f(9) \neq y \; ; \; \forall \; y \in B$$

3.6 انواع الدوال :

3.6.1 الدالة الشاملة (Surjective Function او Onto)

تسمى الدالة $f{:}A \longrightarrow B$ دالة شاملة اذا وفقط اذا كان المستقر = مدى الدالة ($R_f = B$) او بشكل اخر : $\forall \; y \in B \; , \; \exists \; x \in A \ni y=f(x)$

مثال : لتكن $f{:}N \longrightarrow N$ ومعرفة بالشكل $f(x)=2x$ هل ان f دالة شاملة ؟

الحل : f ليست شاملة لان الاعداد الفردية الموجودة في مستقر الدالة ليست صوراً لعناصر المنطلق وفقاً للدالة او(المنطق) $\ni \forall \; x \in N \; ; \; f(x) \neq 4$ (المستقر) $\exists \; 4 \in N$

مثال : لتكن $f{:}R \longrightarrow R$ (R مجموعة الاعداد الحقيقية) و $f=\{(x,y) \mid y=5x+1\}$ هل ان f شاملة ؟

الحل : f دالة شاملة لان

لنفرض $y \in B$ ولنضع $x = \frac{y-1}{5}$ حيث ان $x \in A$ فأن $f(x)=5x+1$

اذن $f(x) = 5\frac{y-1}{5} + 1 = y$ $\forall \; y \in B \; , \; \exists \; x \in A \ni y=f(x)$ اي f دالة شاملة.

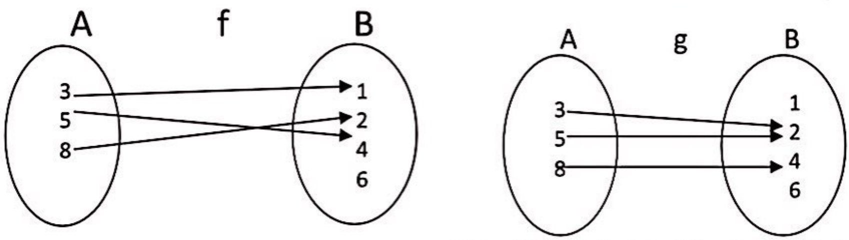
مثال: لتكن $A=\{x \in R | x \geq 0\}$ و $B=R$ وان $f=\{(x,y) | y=x^2+1\}$
هل ان f شاملة ؟
الحل : f ليست شاملة ، وذلك لان $R_f=\{y \in B | y \geq 1\}=[1,\infty)$
$R_f \neq R$ او بمعنى اخر $\exists\ -3 \in B \ni f(x) \neq -3\ \forall x \in A$

مثال : لتكن $f:R \longrightarrow R$ دالة معرفة بالشكل $f(x)=x$ لكل $x \in R$ ،هل ان f دالة شاملة ؟
الحل : نعم لانه (المنطلق) $\forall\ x \in R$ (المستقر) $\exists\ y \in R$
$\ni f(x)=y$

3.6.2 الدالة المتباينة (Injective Function او One-One)

تسمى الدالة $f:A \longrightarrow B$ دالة متباينة اذا تحقق الشرط التالي :
$x_1,x_2 \in A$ حيث ان $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$
اي ان العناصر المختلفة في المنطلق يجب ان يكون لها صور مختلفة في المستقر اي ان $x_1 \neq x_2 \longrightarrow F(x_1) \neq f(x_2)$

مثال :اذا كانت $A=\{3,5,8\}$ ، $B=\{1,2,4,6\}$ و $f,g:A \longrightarrow B$ معرفتين كالاتي :
$f=\{(3,1),(5,4),(8,2)\}$ ، $g=\{(3,2),(5,2),(8,4)\}$
اي الدالتين متباينة ؟



الحل : $\because$ f دالة متباينة لانه لكل $x_1,x_2 \in A$
$x_1 \neq x_2 \longrightarrow F(x_1) \neq f(x_2)$ لاحظ ان $f(3)=1, f(5)=4, f(8)=2$
اي ان لكل عنصر في A له صورة مختلفة في B، لكن الدالة g ليست متباينة لانه $g(3)=g(5)=2$
اي انه يوجد عنصرين مختلفين في A لهما نفس الصورة في B

مثال : اذا كانت $A=\{x\in R|-2\le x\le 5\}$ ، $B=R$ و f دالة من A الى B معرفة بالشكل $f=\{(x,y)\in AxB|y=x^3\}$ ، هل ان f دالة متباينة ؟

الحل : f متباينة لان اذا فرضنا $f(x_1) = f(x_2)$

$x_1=x_2 \Longrightarrow x_1^3=x_2^3$ فأن $x_1=x_2 \Longrightarrow f(x_1)=f(x_2)$ وعليه فأن f دالة متباينة.

مثال : لتكن $g:[-2,2] \longrightarrow R$ دالة معرفة بالشكل $g(x)=3x^2+1$ اختبر فيما اذا كانت الدالة g شاملة ؟

الحل : g ليست شاملة لان لو اخذنا $x_2=2$, $x_1=-2$ فأن

$g(x_1)=g(-2)=13$

$g(x_2)=g(2)=13$ اي ان $g(x_1)=g(x_2)$ لكن $x_1 \neq x_2$

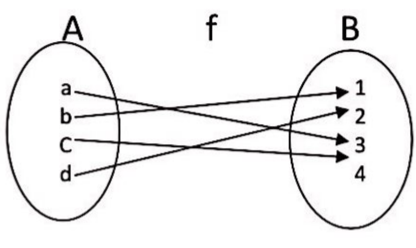
اي انه يوجد عنصران مختلفان $x_1,x_2 \in A$ بحيث ان $g(x_1)=g(x_2)$ لكن $x_1 \neq x_2$ اذن f ليست متباينة

3.6.3 الدالة المتقابلة One-One Correspondence

تسمى الدالة $f:A \longrightarrow B$ دالة تقابلاً اذا وفقط اذا كانت f دالة متباينة وشاملة.

مثال: لتكن $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ و $f:A \longrightarrow B$ مُعرفة بالشكل :

$f= \{(a,3),(b,1),(c,4),(d,2)\}$ لاحظ ان f دالة متباينة (لكل عنصر في A يوجد صورة واحدة فقط في B) و f دالة شاملة (المستقر = المدى) اذن f دالة متقابلة .



مثال : اذا كانت $A=\{1,3,5,7,. . .\}$ و $B=\{2,4,6,8,. . .\}$

و $f:A \longrightarrow B$ دالة مُعرفة بالشكل : $f = \{(x,y) \in AxB \,|y=2x\}$

بين فيما اذا كانت تقابل ؟

الحل : لاحظ ان f لا تكون تقابلاً لانه ليست شاملة ، فأذا أخذنا $y=4$ فلا يوجد عنصر x في A بحيث $f(x)=4$.

مثال : لتكن $g:A \longrightarrow B$ دالة مُعرفة بالشكل :

$g=\{(x,y) \in AxB \mid y=x+1\}$

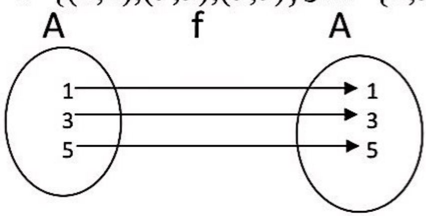
و A و B معرفتين في المثال اعلاه ، هل ان g دالة متقابلة ؟

الحل : g تقابل لانها شاملة ومتباينة ، حيث ان كل عنصر في B يكون صورة لعنصر واحد في A وان المستقر = المدى ، اذن g دالة شاملة .

3.6.4 الدالة الذاتية Identity Function

تسمى الدالة $f:A \longrightarrow A$ دالة ذاتية على A اذا وفقط اذا كان $f(x)=x$ لكل $x \in A$ ويستخدم الرمز I_A للدلالة على الدالة الذاتية على A.

مثال : لتكن $A=\{1,3,5\}$ و $f=\{(1,1),(3,3),(5,5)\}$ اذن $f:A \longrightarrow A$ دالة ذاتية.



3.6.5 الدالة الثابتة Constant Function

تُسمى الدالة $f:A \longrightarrow B$ دالة ثابتة اذا وفقط اذا وجد عنصر b في B بحيث لكل $x \in A$ يكون $f(x)=b$.

مثال: لتكن $f:R \longrightarrow R$ ومعرفة بالشكل $f=\{(x,y) \in RxR \mid f(x)=2\}$ اي ان $f(x)=2$ لكل $x \in R$ اذن f دالة ثابتة

ملاحظة : اذاكانت $f:A \longrightarrow B$ دالة ثابتة فأن :

1) اذا كانت A محتوية على اكثر من عنصر فأن f غير متباينة.
2) اذا كانت B محتوية على اكثر من عنصر فأن f غير شاملة .

3.6.6 دالة الاحتواء Inclusion Function

اذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من B فتسمى الدالة $f:A\longrightarrow B$ بدالة الاحتواء اذا وفقط اذا كان $f(x)=x$ لكل $x\in A$.

<u>مثال</u> : لتكن $f:N\longrightarrow Z$ دالة معرفة كالاتي : $f=\{(x,y)\in NxZ|y=x\}$ هل ان f دالة احتواء ؟

<u>الحل</u> : بما ان $N\subseteq Z$ وان $f(x)=x$ لكل $x\in R$ فأن f دالة احتواء .

<u>مثال</u>: اذا كانت $f_1:[-2,2]\longrightarrow R$ دالة معرفة كالاتي :

$f=\{(x,y)\in AxB|y=x\}$ هل ان f دالة احتواء

<u>الحل</u>: بما ان $R\subseteq[-2,2]$ و $f(x)=x$ فأن f دالة احتواء

<u>ملاحظة</u> : لتكن $f:A\longrightarrow B$ دالة احتواء فأن :

1) اذا كانت $A=B$ فأن $f=I_A$
2) f دالة متباينة
3) اذا كانت $A\subseteq B$ فأن f دالة غير شاملة ؟

3.6.7 دالة القيمة المطلقة Absolute Value Function

لتكن $A=B=R$ و f دالة معرفة على R بالشكل :

$f=\{(x,y)\in RxR|y=|x|\}$ اي ان :

$y=f(x)=\begin{cases} x & ;x\geq 0 \\ -x & ;x\prec 0 \end{cases}$ ، f تُسمى دالة القيمة المطلقة

3.6.8 الدالة العكسية Inverse Function

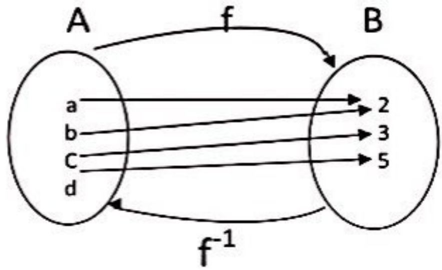
لتكن $f:A\longrightarrow B$ دالة متقابلة فأن $f^{-1}:B\longrightarrow A$ تسمى دالة عكسية .

<u>مثال</u> : لتكن $A=\{a,b,c,d\}$ ، $B=\{2,3,5\}$ ، f علاقة من A الى B ومعرفة بالشكل الاتي : $f=\{(a,2),(c,3),(b,2),(d,5)\}$

لاحظ ان f دالة من A الى B ولها العلاقة العكسية

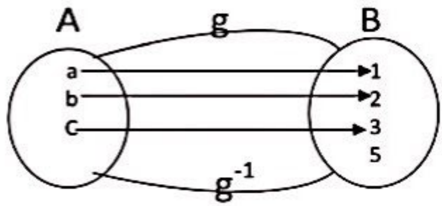
$f^{-1}=\{(2,a),(2,b),(3,c),(5,d)\}$

لاحظ ان f^{-1} ليست دالة من B الى A لان العنصر 2 له صورتين مختلفتين.
ويعود سبب كون f^{-1} ليست دالة الى الدالة f التي هي ليست متباينة اي انها ليست تقابل .



مثال : لتكن $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{1,2,3,5\}$ و $g=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$
العلاقة العكسية لها $g^{-1}=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

لاحظ ان g^{-1} ليست دالة من B الى A وذلك لان العنصر $5 \in B$ ليس له صورة في A وهذا يعود لكون g ليست شاملة.



مما تقدم اعلاه يمكننا ان نستنتج ان الدالة العكسية تكون موجودة فقط عندما تكون الدالة الاولى متقابلة .

ملاحظة : لتكن $f:A \longrightarrow B$ دالة فأن : $(x,y) \in f$ ، اذا وفقط اذا كان $(x,y) \in f^{-1}$
وبعبارة اخرى $y=f(x)$ اذا وفقط اذا كان $x=f^{-1}(y)$

مثال : لتكن f علاقة على $\mathbb{R}$ معرفة كالاتي :

$$f = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y= x^3 \}$$

اذن :

$$f^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x= y^3 \}$$

بما ان $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة اذن الدالة $f^{-1}:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ لها معكوس

الفصـــل الـــرابــــــع
الاعداد الحقيقية

الفصل الرابع
الاعداد الحقيقية REAL NUMBERS

4.1 مقدمة

قبل ان نعرف الحقل لا بد ان نعرف الزمرة ، ونؤكد على ان الزمرة من النظم الرياضية التي تحقق شروطاً معينة وان النظام الرياضي يتكون من عملية ثنائية او اكثر ، لذلك سنبدأ بتعريف للعملية الثنائية.

4.2 العملية الثنائية Binary Operation

لتكن A اي مجموعة غير خالية ويقصد بعملية ثنائية * على المجموعة A دالة : $*: A\times A \longrightarrow A$ هذه الدالة تُخصص لاي زوج مرتب من عناصر Aعنصراً واحداً فقط في A.

اي ان $(a*b) \in A$ لكل $(a,b) \in A$ (اي ان الناتج يجب ان يكون في A)

مثال : لتكن N مجموعة الاعداد الطبيعية والعملية * هي عملية الجمع. هل ان * عملية ثنائية على N ؟

الحل : $*: N\times N \longrightarrow N$, $N=\{0,1,2,\ldots\}$

$*(a,b)=a+b$

وبما ان a,b عددين طبيعيين فأن (a+b) ايضاً عدد طبيعي

اذن عملية الجمع عملية ثنائية على N .

مثال: لتكن * هي عملية الطرح المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية ، هل ان * عملية ثنائية على N.

الحل: $-: N\times N \longrightarrow N$ و $N=\{0,1,2,\ldots\ldots\}$

$-(1,5)=1-5=-4$ و $-4 \notin N$

اذن عملية الطرح غير ثنائية على N.

4.3 النظام الرياضي Mathematical System

هو عبارة عن مجموعة ليست خالية مع عملية واحدة او اكثر من العمليات الثنائية المُعرفة على هذه المجموعة.

النظام الرياضي ذو العملية * والمعرفة على المجموعة $A \neq \Phi$ ويُرمز له بالزوج المرتب $(A,*)$ يُسمى نظاماً رياضياً ذا عملية واحدة.

واذا كانت هناك عمليتين على A مثل * و Θ فأن النظام الرياضي يُكتب بالشكل $(A،*، \Theta)$ ويسمى نظاماً رياضياً ذا عمليتين.

مثال : $(N,+)$ و $(Z,+)$ و $(Q,+)$ انظمة رياضية لان عملية الجمع عملية ثنائية اما $(N,-)$ لا تمثل نظاماً رياضياً وذلك لان عملية الطرح ليست ثنائية على N.

4.3.1 انواع العمليات الثنائية

لتكن A مجموعة و * عملية ثنائية على A يُقال ان :

1) * عملية تبادلية (abelian) اذا وفقط اذا كان $a*b=b*a$ لكل $a,b \in A$

2) * عملية تجميعية (Commulative) اذا وفقط اذا كان $(a*b)*c=a*(b*c)$ لكل $a,b,c \in A$

مثال : لتكن $A=\{0,1\}$ و* هي عملية الضرب المعرفة على المجموعة A فأن $a*b=b*a$ لكل $a,b \in A$ اذن عملية الضرب هي عملية ابدالية على A

*	0	1
0	0	0
1	0	1

مثال : لتكن X مجموعة المصفوفات من الدرجة (2×2) و* عملية ضرب المصفوفات ، هل ان * عملية ابدالية على X.

الحل : لاحظ ان * عملية ثنائية لان $(A*B) \in X$ لكل $A,B \in X$ و * ليست ابدالية لانهُ اذا كانت

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \quad , \quad A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

اي ان $AB \neq BA$

اذن * عملية غير ابدالية لكنها تجميعية لان $(A*B)*C=A*(B*C)$ لكل $A,B,C \in X$

4.4 الزمرة The Group

تتصف بعض الانظمة الرياضية بصفات معينة فتأخذ اسماءاً خاصة حسب تلك الصفات ومن أهم هذه الانظمة الزمرة.

وهي عبارة عن المجموعة A مع العملية الثنائية * المعرفة عليها والتي تحقق:

1) * عملية تجميعية (Cumulative) اي اذا كان a,b,c ЄA فأن :

(a*b)*c=a*(b*c)

2) العنصر المحايد (Identity element)

يوجد eЄA بحيث ان a*e=e*a=a لكل aЄA

او $\exists e \in A \ \ni a*e=e*a=a, \forall a \in A$

3) العنصر النظير(Inverse element)

لكل aЄA يوجد bЄA بحيث ان : a*b=b*a=e

او $\forall a \in A \quad \exists b \in A \ \ni a*b=b*a=e$

b يسمى العنصر النظير للعنصر a

<u>ملاحظة</u>: الزمرة (A,*) تُسمى تبادلية ⟵⟶ كانت العملية الثنائية المعرفة عليها تبادلية.

<u>مثال:</u> بين فيما اذا كان النظام الرياضي (Z,+) زمرة ابدالية حيث ان Z هي مجموعة الاعداد الصحيحة ؟

1) عملية الجمع عملية تجميعية

$\forall a,b,c \in Z$; (a+b)+c=a+(b+c)

2) $\exists 0 \in Z \ \ni a+0=0+a=a \quad \forall a \in Z$

اذن (Z,+) تملك عنصر محايد هو الصفر

3) $\forall a \in Z, \exists -a \in Z \ \ni \ a+(-a)=-a+a=0=e$ اي ان (Z,+) تملك عنصر نظير وهو الصفر ، اذن (Z,+) تشكل زمرة وبما ان a+b=b+a لكل a,b Є Z اذن عملية الجمع ابدالية على Z

اذن (Z,+) تشكل زمرة ابدالية

4.6 حقل الاعداد الحقيقية Field of real numbers

بعد ان تعرفنا على الزمرة كنظام من اهم الانظمة ذات العملية الواحدة . الان سنأخذ نظام رياضي اخر من أهم الانظمة ذات العمليتين (A,*,#) حيث ان العملية الاولى * هي عملية الجمع والتي عنصرها المحايد هو الصفر والنظير الجمعي للعنصر a هو a–.

والعملية الثانية # هي عملية الضرب التي عنصرها المحايد هو (1) والنظير الضربي للعنصر a هو (a^{-1}).

4.6.1 الحقل Field :يُسمى النظام الرياضي (A,+,*) حقلاً اذا وفقط اذا تحقق :

1) (A,+) زمرة ابدالية
2) (A-{0}, ×) زمرة ابدالية
3) العملية × تتوزع على العملية +

<u>مثال :</u> بين ان (Z,+,×) لا تشكل حقلاً.

1) عملية الجمع تجميعية لكل a,b,c ЄZ ⟸ (a+b)+c=a+(b+c)

2) وجود العنصر المحايد $\exists e=0, a+e=e+a=a, \forall a \in Z$

3) $\forall a \in Z, \exists(-a) \in Z \ni a+(-a)=-a+a=e=0$

4) عملية الجمع ابدالية على Z لان $a+b=b+a, \forall a,b \in Z$

اذن (Z,+) تُشكل زمرة ابدالية

الان لنأخذ (Z-{0},×)

1) عملية الضرب تجميعية $\forall a,b,c \in Z, \quad a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

2) وجود العنصر المحايد $\exists e=1 \ni a+e=e+a=a, \forall a \in Z$

3) عدم وجود النظير الضربي في {0}-Z

اذن (×,{0}-Z) لا تشكل زمرة اي ان (Z,+,×) لا تُشكل حقلاً.

مثال: بين ان النظام (Q,+,×) حقلاً حيث Q هي مجموعة الاعداد النسبية.

الحل: (Q,+)

1) عملية الجمع تجميعية على Q لانه

$$\forall a,b,c \in Q \quad (a+b)+c = a+(b+c)$$

2) وجود العنصر المحايد $\exists e=0, a+e=e+a=a$

3) وجود النظير $\forall a \in Q, \exists -a \in Q \ni a+(-a) = -a+a = 0 = e$

4) عملية الجمع ابدالية لان $a+b=b+a \quad , \quad \forall a,b \in Q$

اذن (Q,+) تشكل زمرة ابدالية

الان (Q-{0},x)

(1) عمل الضرب تجميعية $\forall a,b \in Q-\{0\}$

a×(b×c)=(a×b)×c

(2) وجود المحايد $\exists e=1 \ni a\times e = e\times a = a$

(3) وجود النظير

$$\forall a \in Q-\{0\}, \exists \frac{1}{a} \in Q-\{0\} \ni a\times\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\times a = 1 = e$$

(4) عملية الضرب ابدالية لان $a\times b = b\times a \quad , \quad \forall a,b \in Q-\{0\}$

اذن (Q-{0}, ×) تشكل زمرة ابدالية

اي ان (Q,+,×) يُشكل حقلاً

4.7 مجموعة الاعداد النسبية Rational Numbers Set

يُرمز لها بالرمز Q وهي خارج قسمة عددين صحيحين اي ان

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

مثال: $4,6,\frac{-5}{2},\frac{7}{2},\ldots$ حيث ان $Z \subseteq Q$

ملاحظة: بين كل عددين نسبيين يوجد ما لانهاية من الاعداد النسبية.

4.8 مجموعة الاعداد غيرالنسبية Irrational Numbers Set

يُرمز لها بالرمز I وتُعَرف { ×عدد عشري غير منته وغير مدور|×}=I

مثال: $\sqrt{7},\sqrt{5}$ ، الكسور العشرية ، $3.1428....=\frac{22}{7}$

ملاحظة: 1) اذا كان a عدد نسبي و b عدد غير نسبي فأن $\frac{1}{b}$ ، b-a ، a-b اعداد غير نسبية

مثال: a=2 ، $b=\sqrt{3}$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}\in I;b-a=(\sqrt{3-2})\in I,a-b=\left(2-\sqrt{3}\right)\in I$$

2) حاصل جمع وطرح عددين غير نسبيين ليس بالضرورة ان يكون عدد غير نسبي.

مثال: ليكن $a=\sqrt{3},b=1-\sqrt{3}$ اعداد غير نسبية

فأنه $a+b=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1\in Q$

$$a-b=\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1+\sqrt{3}=(2\sqrt{3}-1)\in Q$$

3) حاصل قسمة وضرب عددين غير نسبيين ليس بالضرورة ان يكون عدد غير نسبي.

مثال: ليكن $a=\sqrt{2},b=\frac{1}{\sqrt{2}},c=\Pi$

فان $ab=\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=1\in Q$

$$a.c=\Pi.\sqrt{2}=\sqrt{2}\prod\in I$$

$$c\div c=\pi\div\pi=1\in Q$$

اي ان مجموع الحقيقية تشمل الاعداد النسبية والاعداد غير النسبية

$$\therefore R=Q\bigcup I$$

وسنذكر فيما يلي بعض البديهيات او الخواص على مجموعة الاعداد الحقيقية منها :

4.8.1 خاصية الترتيب :

اذا كان w,z,y,x اعداد حقيقية فأن :

1) واحدة فقط من هذه العبارات تكون صادقة $x<y$, $x>y$, $x=y$
2) العبارة $x>y$ تعني $y<x$
3) اذا كان $x<y$ فأن $x+z<y+z$
4) اذا كان $x>0$ و $y>0$ فأن $xy>0$
5) اذا كان $x>y$ و $y>z$ فان $x>z$
6) اذا كان $x<y$ فأن $xz<yz$ (اذا كان $Z>0$)
7) اذا كان $x<y$ فأن $xz>yz$ (اذا كان $Z<0$)
8) اذا كان $x>y>0$ و $z>w>0$ فأن $xz>yw>0$

4.8.2 خاصية ارخميدس

اذا كان $x>0$ و y اي عدد حقيقي فأنه يوجد عدد صحيح موجب n بحيث ان $nx>y$

<u>مثال:</u> اذا كان $x=0.1$ ، $y=3.4$ فأنه

$$\exists\, n = 100 \ni \quad nx = (100)(0.1) = 10 > 3.4$$

<u>مثال :</u> اذا كان $x=2.5$ و $y=9.6$ فانه يوجد $n=200$ بحيث ان

$$nx=(200)(2.5)=500>9.6$$

4.8.3 متراجحة كوشي–شوارتز : Cauchy – Schwartz Inequality

اذا كان $a_1,a_2,\ldots,a_n$ و $b_1,b_2,\ldots,b_n$ اعداد حقيقية فأن

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

البرهان : بما ان مجموع المربعات لا يمكن ان يكون سالباً اذن

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2 \ge 0$$

$$x^2\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2x\sum_{k=1}^{n}a_k b_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2 \ge 0 \cdots\cdots(1)$$

ولنفرض $\sum_{k=1}^{n}a_k^2 = A \quad , B=\sum_{k=1}^{n}a_k b_k$

$$\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2 = c$$

نعوض في المعادلة (1) $Ax^2 + 2Bx+C \ge 0$

بما ان $A\ge 0$ (مجموع مربعات)اذن اما $A=0$ او $A>0$

في حالة $A>0$ نعوض عن x بالمقدار $-\frac{B}{A}$ فنحصل

$$A(\frac{-B}{A})^2+2B(\frac{-B}{A})+C \ge 0$$

$$\therefore \frac{B^2}{A}-2\frac{B^2}{A}+C \ge 0 \Rightarrow \frac{-B^2}{A}+C \ge 0$$

اي ان $B^2 \le AC \Leftarrow \frac{B^2}{A} \le C$

اذن

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

اما اذا كانت $A=0$ فأن $B=0$ والمتراجحة ستكون صحيحة ايضاً

4.9 القيمة المطلقة Absolute Value

اذا كان xعدد حقيقي فأن $|x| = \begin{cases} x; & x \ge 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$

وهي بعد النقطة x عن نقطة الاصل

4.9.1 مبرهنة (4-6)
اذا كان $a\geq 0$ فأن $|x|\leq a$ اذا وفقط اذا كان $-a\leq x\leq a$

البرهان: نفرض $|x|\leq a$ ونريد اثبات $-a\leq x\leq a$

من تعريف القيمة المطلقة $|x|=x$ او $|x|=-x$ ومن الفرض $|x|\leq a$ اذن

$$|x| = x\leq a \longrightarrow x\leq a$$
$$|x| = -x\leq a \longrightarrow x\geq -a$$

وهذا يعني $-a\leq x\leq a$

الان نفرض $-a\leq x\leq a$ ونريد اثبات $|x| \leq a$

من تعريف القيمة المطلقة $|x|\leq a \longrightarrow |x|=x\leq a$

$$|x|=-x\ ;$$

من الفرض $-a\leq x \longrightarrow -x\leq a$

$$\therefore |x|=-x\leq a \rightarrow |x|\leq a$$

اذن $|x|\leq a$

4.9.2 مبرهنة (4-7)
اذا كان x و y عددين حقيقيين فأن $|x+y|\leq|x|+|y|$

المتراجحة اعلاه تسمى المتراجحة المثلثية Triangular Inequality

البرهان : من تعريف القيمة المطلقة :

$$-|x|\leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq|y|$$

بجمع العلاقتين نحصل على :

$$-|x|+(-|y|) \leq x+y\leq |x|+|y|$$
$$-[|x|+|y|]\leq x+y \leq [|x|+|y|]$$

اذن من المبرهنة اعلاه نستنتج : $|x+y|\leq|x|+|y|$

4.10 الفضاء الاقليدي Eucleadian Space

لتكن n عدد صحيح موجب نعرف $R^n=\{(x_1,x_2,\ldots x_n)|x_i \in R\}$

4.10.1 العمليات الجبرية على R^n

(1) المساواة : ليكن $X,Y \in R^n$

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad ,Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

فأن $x_1=y_1 \ ,x_2=y_2 \ ,\ldots,x_n=y_n \longleftrightarrow X=Y$

(2) الجمع : $X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$

(3) الطرح: $X-Y=X+(-1)Y$

$$=(x_1-y_1,x_2-y_2,\ldots,x_n-y_n)$$

(4) الضرب في عدد ثابت : اذا كان $a \in R$ فأن

$$aX=(ax_1,ax_2,\ldots,ax_n)$$

(5) الضرب الداخلي Inner Product

$$X.Y=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

(6) المعيار The Norm

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

||x-y||يُدعى المسافة بين X و Y

$$\|X - Y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

4.10.2 خصائص المعيار : لتكن $X,Y \in R^n$ فأن

(1) $||X-Y||=||Y-X||$

(2) $||X|>0$ و $||X||=0 \longleftrightarrow X=0$

(3) $||aX||=|a|.||X||$ لكل عدد حقيقي a

(4) $||X.Y||\leq||X||.||Y||$ تسمى متراجحة كوشي-شوارتز

(5) $||X+Y||\leq||X||+||Y||$ تسمى المتراجحة المثلثية

برهان (1) :

$$\|X - Y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = \| Y - X \|$$

اذن $||X-Y||=||Y-X||$

4.11 الفضاء المترى The Metric Space

بعد ان تعرفنا على نظام الاعداد الحقيقية ولاحظنا ان لهذا النظام نوعان من الخواص : النوع الاول هي الخواص الجبرية والتي تتعلق بالجمع والطرح والضرب والقسمة والنوع الثاني من الخواص هي التي تتعلق بمفهوم البعد او المسافة بين عددين سندرس نوع اخر من الفضاءات هو المتري ، وان الغرض من دراسة الفضاء المتري هو دراسة بعض الفضاءات التي يمكن ان يعرف فيها مفهوم البعد او المسافة .

تعريف الفضاء المتري : يُقال ان الزوج المرتب (M,d) فضاء متري اذا كان M مجموعة غير خالية وd هي الدالة $d:M\times M \longrightarrow R$ والتي يُحقق الشروط التالية:

$$(1)\ d(x,y) \ge 0 \quad ; \forall\ x,y \in M$$
$$(2)\ d(x,y) = 0 \longleftrightarrow x=y$$
$$(3)\ d(x,y) = d(y,x) \quad ; \forall\ x,y \in M$$
$$(4)\ d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y); \forall\ x,y,z \in M$$

تُسمى عناصر المجموعة M نقاط الفضاء او (النقاط) ويسمى d(x,y) البعد بين النقطتين x وy كما يُسمى d البعد او المسافة

4.12 انواع الفضاءات المترية :

(1) اذا كان $M=R^n$ ودالة المسافة معرفة بالشكل $d(x,y)=||x-y||$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

(R^n,d) يُسمى الفضاء المتري الاقليدي (Eucleadian Metric Space)

حيث ان $R^n = \{(x1,x2,----,xn)|x_i \in R\}$

واذا كان $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و $Y=(y1,y2,\ldots,yn)$ فأن :

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

(2) اذا كانت M=C حيث ان C مجموعة الاعداد العقدية (المركبة) ودالة المسافة معرفة بالشكل $d(Z_1,Z_2)=|Z_1-Z_2|=|(x_1-x_2)+(y_1-y_2)|$

$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

حيث ان $Z_1=x_1+iy_1$ و $Z_2=x_2+iy_2$

(3) لتكن $M\neq\varphi$ و $d:M\times M\longrightarrow R$ ومعرفة بالشكل

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & ; \quad x\neq y\\ 0 & ; \quad x=y\end{cases}$$

فأن (M,d) يسمى الفضاء المتري المتقطع (Discrete Metric Space)

(4) اذا كانت $M=R^2$ ودالة المسافة d(x,y) معرفة كالاتي :

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

حيث ان $X=(x_1,x_2)$ و $Y=(y_1,y_2)$

وبالامكان تعريف مسافات اخرى على R^2 كالاتي :

$$d(x,y)=Max\{|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\}$$

<u>مثال</u> : جد المسافة بين $X=(1,0,2)$, $Y=(-1,7,0)$

$$d(x,y)=Max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,|x_3-y_3|\}$$
$$=Max\{|1-(-1)|,|0-7|,|2-0|\}$$
$$=Max\{|2|,|-7|,|2|\}$$
$$=Max\{2,7,2\}$$
$$=7$$

<u>مثال</u>: اذا كانت $M\neq\varphi$ و $d:M\times M\longrightarrow R$ ومعرفة

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & ; \quad x\neq y\\ 0 & ; \quad x=y\end{cases}$$ يحقق جميع شروط الفضاء المتري

(1) من التعريف عندما $x=y \Longrightarrow d(x,x)=0$

(2) من التعريف عندما $x\neq y \Longrightarrow d(x,y)=1>0$

(3) $d(x,y)=1=d(y,x)$

(4) خذ $x,y,z \in M$ والمطلوب $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

اذا كان $X=Y=Z$ $\Longleftarrow d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

$0\le 0 + 0$

$0 \le 0$

الا اذا كان $x=y\neq z$ فأن $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

$0 \le 1 + 1 \Longrightarrow 0\le 2$

اما اذا كان $x\neq y$ و $x=z$ و $z\neq y$ فأن

$1\le 0+1 \Longrightarrow 1\le 1$

وفي حالة $x\neq z$ ، $x\neq y$ ، $z=y$ فأن

$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y) \Longrightarrow 1\le 1+0 \Longrightarrow 1\le 1$

اذن الدالة اعلاه $d(x,y)$ تحقق جميع شروط الفضاء المتري

اذن (M,d) تشكل فضاء متري

<u>مثال</u>: لتكن $M=R^n$ لاي n تعرف $d(x,y)$ كالاتي

$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ فهل ان (R^n,d) فضاء متري ؟

<u>الحل</u>:

(1) $d(X,X)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_i|=0$

(2) $d(X,Y)>0$ if $x\neq y$

اي انه يوجد k بحيث $|x_k-y_k|\succ 0 \Leftarrow x_k\neq y_k$

اذن $d(X,Y)>0$

(3) $d(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$

$$=\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|=d(Y,X)$$

$$\therefore\quad d(X,Y)=d(Y,X)$$

(4) $\forall X,Y,Z\in R^n$

$$d(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i+z_i-y_i|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|+\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|$$

$$\le d(X,Z)+d(Z,Y)$$

اذن (R^n,d) فضاء متري

الفصـــل الخامـــس
الغاية
والاستمرارية

الفصل الخامس
الغاية والاستمرارية LIMIT&CONTINUITY

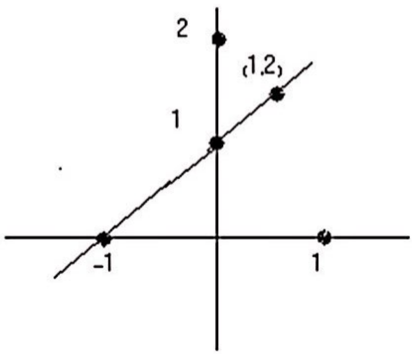
5.1 مقدمة

بعد ان تعرفنا على مفهوم الدالة وبعض انواع الدوال ، سنقوم في هذا الفصل باستعراض مفهوم الغاية ، الذي هو اساس حساب التفاضل والتكامل ونقوم بسرد اهم المبرهنات الخاصة بالغاية ، ومن ثم نتطرق الى شرح مفهوم الاستمرارية مع ذكر براهين بعض المبرهنات الخاصة بالموضوع.

ولاجل ان نقرب مفهوم الغاية ، سنأخذ المثال التالي الذي يساعد على فهم التعريف الرياضي الدقيق للغاية.

مثال : لتكن $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ، $x \neq 1$ لاحظ ماذا يحدث لقيم الدالة f عندما نعطي لـX قيماً قريبة جداً الى العدد 1؟ لاحظ ان الدالة غير معرفة في العدد 1. اي ان f(1) غير موجود. لاجل ان نجيب على هذا السؤال . نكون الجدول رقم (1) الذي يبين ان قيمة f(x) تقترب جداً من العدد 2 كلما اقتربت قيمة x من العدد 1من اليمين او اليسار لذا نقول "ان غاية الدالة f(x) من العدد 1 هي 2" وللتوضيح نرسم مخطط هذه الدالة في الشكل التالي . ان الشكل المكافئ للدالة هو $f(x)=x+1$ ، $x\neq1$.

X	0.5	0.8	0.9	0.99	0.999	1.5	1.2	1.1	1.01	1.001	1.0001
f(x)	1.5	1.8	1.9	1.99	1.999	2.5	2.2	2.1	2.01	2.001	2.0001



5.2 تعريف الغاية

لتكن f دالة حقيقية منطلقها D $(D\subseteq R)$. وليكن a عدد أ جقيقياً ، يقال ان غاية الدالة f في العدد a هي L اذا وفقط اذا تحقق لكل عدد حقيقي $\in>0$ ، يوجد عدد حقيقي $\delta>0$ بحيث $0<|x-a|<\delta$ فأن $|f(x)-L|<\in$ و $x\in D$

اي بمعنى اخر
اذا اعطينا اي عدد حقيقي موجب $\in$ مهما كان صغيراً فأننا نستطيع ان نجد عدداً حقيقياً $\delta>0$ بحيث ان $|f(x)-L|<\in$ عندما $0<|x-a|<\delta$ و $x\in D$
المثال التالي يوضح فكرة تعريف الغاية

مثال : جد $\lim\limits_{x\to 1}(5x-3)$ واثبت ان اجابتك صحيحة ؟

الحل : $f(x)=5x-3$ ، $a=1$ ، $L=2$
لكل $0<\in$ يوجد $\delta>0$
بحيث $|x-1|<\delta$ فأن $|5x-3-2|<\in$

$$-\in<5x-3-2<\in$$

$$2-\in<5x-5<\in+2$$

$$5-\in<5x<\in+5$$

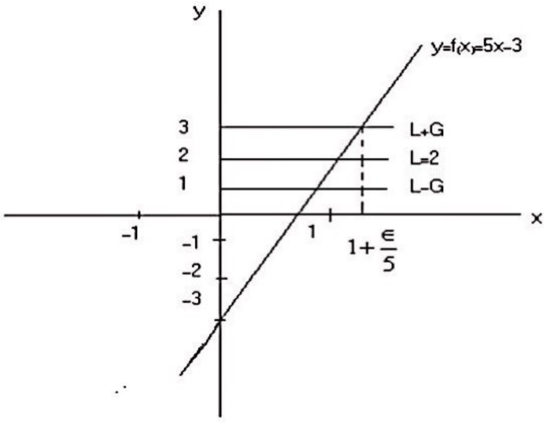
$$1-\frac{\in}{5}\prec x\prec 1+\frac{\in}{5}$$

الفترة $(1-\frac{\in}{5},1+\frac{\in}{s})$ هي جوار لـ a=1 واذا حذفنا 1من الجوار نحصل على :

$$-\frac{\in}{5}\prec x-1\prec\frac{\in}{5}$$

$$0<|x-1|<\frac{\in}{5}$$

والشكل التالي يبين الجوار للنقطة 1 لذا فأن $\lim\limits_{x\to 1}(5x-3)=2$



<u>مثال:</u> لتكن $f:R \longrightarrow R$ ومعرفة بالشكل $f(x)=x^2-3$ لكل $x \in R$ اثبت ان :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -2$$

<u>البرهان</u>: ليكن $\epsilon > 0$ فأن

$$|f(x)-L| < \in \rightarrow |x^2-3-(-2)| < \in$$

$$\rightarrow |x-1|.|x+1| < \in$$

نريد ان نجد قيمة δ التي تحقق شرط الغاية $(0<\delta<1)$ اذن سيكون

$$|x-a|=|x-1|<\delta \quad - \; - \; -(1)$$

$$|x-1| < 1$$

$$|x-1+2|<1+2 \qquad |x+1|<3 \; - \; - \; -(2)$$

بضرب العلاقة (1) في العلاقة (2) نحصل $|x-1|.|x+1| < 3\delta$

Let $\delta = \frac{\in}{3}$

$$|x^2-1| < 3.\frac{\in}{3} \rightarrow |x^2-1| < \in$$

$$|x^2-3-(-2)| < \in$$

$$\therefore \lim_{x\to -1} x^2-3 = -2$$

5.9 الغاية من جهة واحدة One Sided Limit

لقد اشرنا في تعريف الغاية ان غاية الدالة عند النقطة a موجودة من خلال تصرف الدالة على جانبي النقطة a التي قد لا تكون الدالة فيها معرفة ، اذن هنا ينبثق عنها نقاش الغاية من جهة واحدة اي غاية الدالة من يسار النقطة a ويرمز لها بالرمز $\lim\limits_{x \to^- a} f(x)$ وغاية الدالة من يمين النقطة a ويرمز لها بالرمز $\lim\limits_{x \to^+ a} f(x)$

5.10 الغاية اليمنى

لتكن $f:R \longrightarrow R$ دالة و $a \in R$ يقال ان L غاية يمنى (right-hand limit) للدالة f(x) في العدد a اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $(a,a+\delta) \subseteq D$

$$a<x<a+\delta \longrightarrow |f(x)-L|<\epsilon$$

او بمعنى ان قيمة الدالة تقترب من L كلما اقتربت قيمة x من العدد a من الجهة اليمنى على خط الاعداد الحقيقية. ويُعبر عن ذلك بالرمز $\lim\limits_{x \to^+ a} f(x) = L$.

<u>مثال:</u> لتكن $f(x) = \sqrt{x}$ حيث $x \geq 0$ اثبت ان $\lim\limits_{x \to^+ 0} \sqrt{x} = 0$ ؟

<u>البرهان</u>: لتكن $\epsilon > 0$ ولتأخذ $\delta > \epsilon^2$ فتكون $(0,\delta)$ مجموعة جزئية من منطلق الدالة $\sqrt{x}$

$$0<x<\delta \longrightarrow 0<x<\epsilon^2$$

$$\therefore \sqrt{x} < \epsilon \qquad (\epsilon>0)$$

$$\longrightarrow |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$$

اذن حسب التعريف اعلاه $\lim\limits_{x \to^+ 0} \sqrt{x} = 0$

5.11 الغاية اليسرى

لتكن $f:R \longrightarrow R$ دالة و $a \in R$ يُقال ان L غاية يسرى (left-hand limit) للدالة f(x) في العدد a اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $(a-\delta,a) \subseteq D$

$$a-\delta<x<a \longrightarrow |f(x)-L|<\epsilon$$

ويرمز لها بالرمز. $\lim\limits_{x \to -a} f(x) = L$

5.12 دالة الصحيح الاعظم

اذا كان x عددا حقيقياً فأن [x] هو اكبر عدد صحيح لا يزيد على x فمثلاً:

$[2]=2 \quad ,[0]=0 \quad ,[-1.2]=-2 \quad ,[-3]=-3 \quad ,[1.2]=1$

اي ان دالة الصحيح الاعظم هي الدالة $f:X \longrightarrow R$ بحيث ان لكل $x\in X$ ،
$f(x)=[x] \leq x$ لكل $x\in R$ لاحظ ان مدى الدالة هو مجموعة الاعداد الصحيحة .

<u>مثال:</u> لتكن $f:R\longrightarrow R$ بحيث لكل $x\in R$ ، $f(x)=[x]$ اثبت ان $\lim_{x\to 2^-}[x]=1$ ؟

<u>البرهان</u>: ليكن $\epsilon>0$ نأخذ δ عدداً حقيقياً موجباً بحيث $\delta<1$ من تعريف الدالة [x]

$$2-\delta<x<2 \longrightarrow [x]=1$$

$$|[x]-1|=0<\epsilon$$

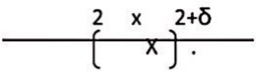
$$\therefore x\in R \quad , \quad 2-\delta<x<2 \rightarrow |[x]-1|<\in$$

اذن $\lim_{x\to 2^-}[x]=1$

<u>مثال:</u> لتكن $f:R\longrightarrow R$ بحيث لكل $x\in R$ ، $f(x)=[x]$ اثبت ان $\lim_{x\to 2^+}[x]=2$ ؟

<u>البرهان</u>: لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث $|f(x)-L|<\epsilon$ عندما $0<|x-a|<\delta$

$$0<x-2<\delta \longrightarrow 2<x<2+\delta$$



من تعريف دالة الصحيح الاعظم لا يزيد على 2

$$[x]=2 \longrightarrow [x]-2=0 \longrightarrow |[x]-2|=0<\epsilon$$

$$|[x]-2|<\epsilon$$

اذن $\lim_{x\to 2^+} f(x)=2$

مثال: لتكن $f:R \longrightarrow R$ دالة معرفة كالاتي :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x\le 2 \\ 8-2x & ; \quad x>2 \end{cases}$$

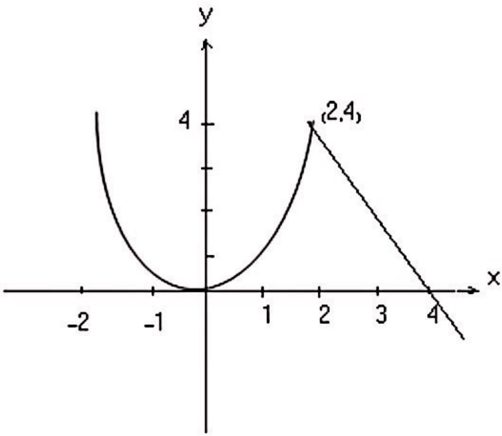
هل ان $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة ؟ ارسم مخطط الدالة

$$\lim_{x\to^{-}2} f(x)=\lim_{x\to^{-}2}(x^2)=(2)^2=4$$

$$\lim_{x\to^{+}2} f(x)=\lim_{x\to^{+}2}(8-2x)=8-4=4$$

$$\lim_{x\to^{-}2} f(x)=\lim_{x\to^{+}2} f(x)=4$$

اذن الغاية لهذه الدالة موجودة عندما $x\to 2$ وان $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$



الفصـــل الســـادس
المتتابعات

الفصل السادس
المتتابعات SEQUENCE

7.1 مقدمة

سنتطرق في هذا الفصل الى المتتابعات لما لها من أهمية في دراسة المتسلسلات وان بعض المصطلحات مثل : متتابعة ، متتابعة متقاربة ، متتابعة متباعدة قد تبدو جديدة لكنها ليست كذلك من حيث المفهوم العام لانها تنطوي تحت مبحث الدوال التي لها غاية والدوال التي ليس لها غاية والتي سبق ان تطرقنا اليها في الفصل الثالث.

7.2 المتتابعة The Sequence

هي كل دالة منطلقها مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة ومستقرها S مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية ($S \subseteq R$) $f:Z^+ \longrightarrow S$

لكل عدد صحيح موجب $n \in Z^+$ يوجد فقط $a_n \in S$ بحيث ان $f(n)=a_n$

سنرمز للمتتابعة بالرمز $\{a_n\}$ ونطلق على العنصر a_n بالحد العام للمتتابعة او الحد ذو الرتبة n (الحد النوني n-th term).

اذا كانت Z^+ مجموعة منتهية فأن المتتابعة تُسمى متتابعة منتهية ، واذا كانت Z^+ مجموعة غير منتهية فأن المتتابعة تُسمى متتابعة غير منتهية ، ويُرمز للمتتابعة المنتهية $\{a_n\}_{n=1}^{k}$ ولغير المنتهية $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

أمثلة :

(1) $\{a_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$ الحد النوني لها هو $a_n = \frac{1}{n}$

(2) $\{a_n\} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...\}$ الحد النوني لها هو $a_n = \frac{n}{n+1}$

(3) $\{(-1)^n\} = \{-1,1,-1,1,.....\}$

(4) $\{\frac{1}{2n}\} = \{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8}.....\}$

(5) $\{(-1)^n+1\} = \{0,2,0,2,.....\}$

(6) المتتابعة الثابتة $\{7\}=\{7,7,7,7,.....\}$

مثال : ليكن $a_1=5$ ، $a_2=7$ و $a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n-a_{n-1})$ لكل $n\in Z^+$ ، $n\geq 2$ ، اوجد حدود المتتابعة ؟

الحل : عندما n=2 $\quad a_3=\frac{1}{3}(a_2-a_1)=\frac{1}{3}(7-5)=\frac{2}{3}$

عندما n=3 $\quad a_4=\frac{1}{3}(a_3-a_2)=\frac{1}{3}(\frac{2}{3}-7)=\frac{-19}{9}$

عندما n=4 $\quad a_5=\frac{1}{3}(a_4-a_3)=\frac{1}{3}(\frac{-19}{9}-\frac{2}{3})=\frac{-25}{27}$

$$\therefore \{a_n\}=\{5,7,\frac{2}{3},\frac{-19}{9},\frac{-25}{27},.....\}$$

مثال : لتكن n : $a_{2n}=(-1)^{2n-1}$, $a_{2n-1}=2n-1$ جد حدود المتتابعة؟

الحل : عندما n=1 ;

$$a_1=2-1=1 \quad , \quad a_2=(-1)^{2-1}.(2)=-2$$

عندما n=2 ;

$$a_3=3, \quad a_4=(-1)^3.(4)=-4$$

عندما n=3 ;

$$a_5=5 \quad , \quad a_6=(-1)^5.6=-6$$

$$\therefore \{a_n\}=\{1,-2,3,-4,5,-6,.....\}$$

7.3 مدى المتتابعة Range of Sequence

هو مجموعة القيم التي تحتوي على حدود مختلفة وبدون تكرار ودون الاخذ بنظر الاعتبار موقع العنصر.

أمثلة :

(1) $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1,1,-1,1,.....\}$ المدى $\{-1,1\}$

(2) $\{a_n\} = \{3,3,3,3,.....\}$ المدى $\{3\}$

(3) $\{a_n\} = \{\frac{1}{2^n}\} = \{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},.....\}$ المدى $\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},.....\}$

7.4 المتتابعة المقيدة Bounded Sequence

يُقال للمتتابعة انها مقيدة من الاعلى او مقيدة من الاسفل تبعاً الى مدى المتتابعة . اي اذا كان مدى المتتابعة مقيد فأن المتتابعة مقيدة ،او انها مقيدة اذا كان هناك عدد حقيقي M بحيث ان $|a_n|<M$ لجميع قيم n.

أمثلة : في الامثلة السابقة اعلاه :

(1) $\{(-1)^n\} = \{-1,1,-1,1,.....\}$ مقيدة من الاعلى ومن الاسفل لان المدى $= \{-1,1\}$ حيث ان القيد الاسفل =-1 والقيد الاعلى =1

(2) $\{3\} = \{3,3,3,3,.....\}$ المتتابعة غير مقيدة

(3) $\{\frac{1}{2^n}\} = \{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},.....\}$ المتتابعة مقيدة حيث ان القيد العلوي= $\frac{1}{2}$ والقيد السفلي =0

(4) $\{(-1)^n + 1\} = \{0,2,0,2,.....\}$ المتتابعة مقيدة حيث ان القيد العلوي=2 والقيد السفلي=0

(5) $\{2n\} = \{2,4,6,8,.....\}$ المتتابعة مقيدة من الاسفل فقط حيث القيد السفلي لها=2 والقيد العلوي لها غير معرف.

(6) $\{(-1)^{n-1} n\} = \{1,-2,3,-4,5,-6,.....\}$ المتتابعة غير مقيدة لعدم وجود القيد العلوي والقيد السفلي لها.

7.5 المتتابعة الرتيبة The Monotonic Sequence

يُقال للمتتابعة $\{a_n\}$ انها رتيبة متزايدة (متزايدة) اذا كان

$a_{n+1} \geq a_n$; لكل $n \in Z^+$

وتُسمى رتيبة متزايدة بأطراد (غير متناقصة) اذا كان

$a_{n+1} > a_n$; لكل $n \in Z^+$

ويُقال للمتتابعة $\{a_n\}$ انها رتيبة متناقصة (متناقصة) اذا كان

$a_{n+1} \leq a_n$; لكل $n \in Z^+$

وتسمى رتيبة متناقصة بأطراد(غير متزايدة) اذا كان

$a_{n+1} < a_n$; لكل $n \in Z^+$

كما يُقال للمتتابعة انها غير رتيبة اذا لم يتحقق اي من الشروط أعلاه.

<u>أمثلة :</u>

(1) $$\{a_n\} = \{\frac{1}{\sqrt{n}}\} = \{1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, ...\}$$

لاحظ ان $a_{n+1} < a_n$ لكل n

اذن المتتابعة متناقصة (رتيبة متناقصة)

(2) $$\{2n\} = \{2,4,6,8,.....\}$$

لاحظ ان $a_{n+1} > a_n$ لكل n

اذن المتتابعة متزايدة (رتيبة متزايدة)

(3) $$\{3\} = \{3,3,3,3,.....\}$$

غير رتيبة لانها غير متزايدة وغير متناقصة

7.6 المتتابعة المتقاربة Converging Sequence

يُقال للمتتابعة $\{a_n\}$ بأنها متقاربة اذا وجد عدد حقيقي a_0 بحيث ان لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب m (m يعتمد على ϵ) بحيث ان $|a_n - a_0| < \epsilon$ لكل $m<n$.

او المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة اذا وجد a_0 بحيث ان كل فترة مفتوحة $(a_0-\epsilon , a_0+\epsilon)$ مركزهما a_0 تحتوي على معظم حدود المتتابعة ، ويطلق على a_0 نقطة التقارب ويُكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$

واذا لم تكن المتتابعة متقاربة فهي متباعدة (divergent).

مثال : برهن على ان المتتابعة $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة الى الصفر؟

البرهان : لكل $\epsilon>0$ ، يوجد $m \in Z^+$ بحيث ان $n > m > \frac{1}{\epsilon}$ او

$$\forall \epsilon > 0, \exists m \in Z^+, S.t \quad n > m > \frac{1}{\epsilon}$$

$$n > \frac{1}{\epsilon} \to \frac{1}{n} < \epsilon \to \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \to |a_n - a_0| < \epsilon$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

اي ان المتتابعة متقاربة الى الصفر

7.10 المتابعة الاساسية (المتتابعة الكوشية) Cauchy Sequence

يُقال للمتتابعة الحقيقية $\{a_n\}$ انها اساسية (كوشية) اذا كان لكل $\epsilon>0$ يوجد عدد صحيح موجب k (k يعتمد على ϵ) بحيث ان :

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad ; \forall n,m > k$$

ملاحظة : يُسمى هذا النوع من المتتابعات باسم متتابعة كوشية نسبة الى العالم الرياضي الفرنسي كوشي A.L.Cauchy (1787-1857)

7.11 مبرهنة (7-4)

كل متتابعة متقاربة من الاعداد الحقيقية تكون اساسية.

البرهان :

لتكن المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة اي ان $a_n \longrightarrow a_0$

$$\therefore \forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \ni |a_n - a_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad ; \forall n > k$$

وعليه لكل $k<n,m$

$$|a_n-a_m|=|a_n-a_0+a_0-a_m| =|(a_n-a_0)-(a_m-a_0)|$$

$$<|a_n-a_0|+|a_m-a_0|=\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

$$\therefore \ |a_n-a_m|<\epsilon$$

اي ان $\{a_n\}$ متتابعة اساسية.

امثلة :

$$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad (1)$$

بما ان $a_n \longrightarrow 0$ اذن $\{a_n\}$ متتابعة كوشية لانها متقاربة حسب المبرهنة اعلاه

$$\{a_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\} \quad (2)$$

بما ان $a_n \longrightarrow 1$ اذن $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ متتابعة كوشية لانها متقاربة حسب المبرهنة اعلاه

مثال: $\{a_n\}=\{(-1)^n\}$ لاحظ ان المتتابعة $\{-1,1,-1,1\}$ ليست اساسية لانها غير متقاربة ($\lim_{n\to\infty}(-1)^n = \infty$).

7.15 المتتابعة الجزئية The Subsequence

لتكن $\{a_n\}$ متتابعة معرفة بالشكل $f(n)=a_n$ و $f:Z^+ \longrightarrow R$ و $\{b_n\}$ متتابعة متزايدة بأطراد و $g:Z^+ \longrightarrow Z^+$ فأن المتتابعة بالشكل $gof:Z^+ \longrightarrow R$ حيث ان $b_n=f(g(n))$ فأن $\{b_n\}$ متتابعة جزئية للمتتابعة $\{a_n\}$.

مثال :اذا كانت $a_n=n^2$ و $g(n)=2n+1$ حيث و $f:Z^+ \longrightarrow R$ و $g:Z^+ \longrightarrow Z^+$ فأن

$$b_n=(fog)_{(n)}= f(g(n))$$
$$=(2n+1)^2$$

اي $\{b_n\}$ متتابعة جزئية من $\{a_n\}$.

7.16 مبرهنة (7-8)

اذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة متزايدة و $\{b_n\}$ متتابعة جزئية لـ$\{a_n\}$ فأن $\{b_n\}$ متزايدة ايضاً.

البرهان : بما ان $b_n=f(g(n))$ فأن $b_{n+1}=f(g(n+1))$

الان بما ان g متزايدة بأطراد $\longrightarrow g(n+1)>g(n)$

و f متزايدة $\longrightarrow f(m)\geq f(n)$

لكل $m\geq n$

$$F(g(n+1))\geq f(g(n))$$

$$\therefore b_{n+1} \geq b_n \quad \forall n \in Z^+$$

الفصـــل السابع

المتسلسلات اللانهائية

الفصل السابع
المتسلسلات اللانهائية INFINITY SERIES

8.1 مقدمة

عرفنا فيما سبق أن المتتالية هي مجموعة مرتبة من الأعداد الحقيقية وفق قاعدة معينة ويفصل بين حدودها الإشارة (,) ولكن إذا استبدلنا إشارة (,) بإشارة الجمع (+) فإن المتتالية تسمى متسلسلة فمثلا: 2 ، 5 ، 8 ، . . . متتالية أم المجموع : 2 + 5 + 8 + . . . فيسمى متسلسلة وللتعبير عن هذا المجموع نستخدم رمزا خاصا يسمى $\sum$ (ويقرأ سيكما Sigma) .

8.2 المتسلسلة اللانهائية

المتسلسلة اللانهائية من الاعداد الحقيقية

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ هي عبارة عن متتابعة اعداد حقيقية $\{s_n\}$

حيث ان :

$s_1=a_1$
$s_2=a_1+a_2$
$s_3=a_1+a_2+a_3$
:
:
$s_n=a_1+a_2+a_3+.....+a_n$

تُسمى الاعداد a_1،a_2،a_3،.....،a_n حدود المتسلسلة والعدد الحقيقي s_n يُسمى بالمجموع الجزئي النوني للمتسلسلة او المجموع النوني لها احياناً.

سوف نرمز للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بالرمز $\sum a_n$ (للاختصار)

أمثلة :

امثله

$$\sum n = 1+2+3+4+\dots\quad (1)$$

$$\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}\dots\quad (2)$$

$$\sum\frac{(-1)^n}{n^2} = -1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\dots\quad (3)$$

<u>مثال</u> : جد المتتابعة $\{S_n\}$ للمتسلسلة اللانهائية $\sum\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

<u>الحل</u> : لنأخذ $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ فأن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ اي ان

$a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ وبتجزئة الكسور :

$$a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1}+\frac{B}{k+2} = \frac{A(k+2)+B(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(A+B)k+2A+B}{(k+1)(k+2)}$$

وبمساواة معاملات البسط للطرفين:

A+B=0 --------(1)

2A+B=1 -------(2)

وبحل المعادلتين انيأ ، نطرح (1) من (2) :

A=1

من المعادلة (1) A=-B

$\therefore$ B=-1

$$a_k = \frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2} = \frac{n+2-2}{2(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$

اذن المتتابعة $\{S_n\} = \left\{\frac{n}{2(n+2)}\right\}$

المتسلسلة اعلاه تُسمى متسلسلة تلسكوبية (Telescoping Series)

8.3 المتسلسلة التلسكوبية Convergent Sequence

هي المتسلسلة التي ليس لها صيغة عامة مثل متسلسلة القوى

(p-series) $\sum \frac{1}{n^p}$ او المتسلسلة الهندسية $\sum ar^{n-1}$ والتي يمكن ايجاد مجموعها

بطريقة تجزئة الكسور كما في المثال اعلاه.

8.4 المتسلسلة المتقاربة Convergent Sequence

يُقال للمتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة اذا كانت متتابعة مجاميعها الجزئية متقاربة اي

ان $\lim_{n\to\infty} S_n = S_0$ حيث ان s عدد حقيقي والا فهي متباعدة .

<u>مثال :</u> اثبت ان المتسلسلة $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ متقاربة ؟

<u>الحل:</u> من المثال اعلاه $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+2)} = \frac{1}{2}$

اذن المتسلسلة اللانهائية $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ متقاربة وان مجموعها يساوي $\frac{1}{2}$.

مثال :

$$\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\ldots$$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

اي ان متتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\} = \left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

بما ان متتابعة المجاميع الجزئية متقاربة اذن المتسلسلة $\sum \frac{1}{2^n}$ متقاربة.

ملاحظة: يُقال للمتسلسلة $\sum a_n$ بأنها متباعدة اذا كانت $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ فأنها تتباعد الى (+∞) وتكتب $\sum S_n = \infty$ وبالمثل ، اذا كانت $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$ ، يُقال للمتسلسلة بأنها تتباعد الى (-∞) وتكتب $\sum S_n = -\infty$.

مثال: المتسلسلة $\sum(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+1-1+.....$

وهكذا نجد $S_1=1$, $S_2=1-1=0$, $S_3=1-1+1=1$, $S_4=1-1+1-1=0$,.....

ان $\lim_{n\to+\infty} S_n$ غير موجودة والمتسلسلة متباعدة (ولكن ليس الى ∞ او -∞) .

مثال: المتسلسلة $\sum n = 1+2+3+4+.....$

$S_1=1$, $S_2=1+2$, $S_3=1+2+3$, $S_n=1+2+3+4+.....+n$

$$2S_n=2+4+6+8.....+2n$$

$$2S_n=n(n+1)$$

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n^2+n)=\infty$$

$\therefore$ $\sum n$ متباعدة

مثال : المتسلسلة $\sum\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......$ تُسمى متسلسلة توافقية (Harmonic)

لاحظ المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة :

$$S_2 = 1+\frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{2}{2} \rightarrow S_4 > 1+\frac{2}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{3}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > S_8 + \frac{8}{16} = S_8 + \frac{1}{2}$$

$$S_{16} > 1 + \frac{4}{2}$$

$$\vdots$$

$$S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2} \quad ; \quad k > 1$$

اذن $\lim S_n = \infty$ $\leftarrow$ المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة لكن $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

ملاحظة: يُقال للمتسلسلة $\sum a_n$ بأنها متباعدة اذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ فانها تتباعد الى $(+\infty)$ وتكتب $\sum S_n = \infty$ وبالمثل ، اذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\infty$ ، يُقال للمتسلسلة بأنها تتباعد الى $(-\infty)$ وتكتب $\sum S_n = -\infty$.

مثال: المتسلسلة $\sum(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+1-1+.....$

$S_1=1$, $S_2=1-1=0$, $S_3=1-1+1=1$, $S_4=1-1+1-1=0$,..... وهكذا نجد ان $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ غير موجودة والمتسلسلة متباعدة (ولكن ليس الى ∞ او $-\infty$) .

مثال: المتسلسلة $\sum n = 1+2+3+4+.....$

$S_1=1$, $S_2=1+2$, $S_3=1+2+3$, $S_n=1+2+3+4+.....+n$

$2S_n=2+4+6+8.....+2n$

$2S_n=n(n+1)$

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n^2+n) = \infty$$

$\therefore$ $\sum n$ متباعدة

مثال : المتسلسلة $\sum\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......$ تُسمى متسلسلة توافقية (Harmonic)

لاحظ المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة :

$$S_2 = 1+\frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{2}{2} \to S_4 > 1+\frac{2}{2}$$

$$S_8 = S_4+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > S_4+\frac{1}{2} > 1+\frac{3}{2}$$

$$S_{16} = S_8+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} > S_8+\frac{8}{16} = S_8+\frac{1}{2}$$

$$S_{16} > 1+\frac{4}{2}$$

$\vdots$

$$S_{2^k} > 1+\frac{k}{2} \quad ; \quad k>1$$

اذن $\lim S_n = \infty$ ← المتسلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة لكن $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

8.15 اختبارات التقارب Teste Of Convergence

الاختبارات التالية يمكن بواسطتها معرفة فيما اذا كانت بعض المتسلسلات اللانهائية متقاربة او متباعدة دون اللجوء الى التعاريف السابقة.

8.16 اختبار القوى Power Test

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^p}$ تدعى متسلسلة القوى وتكون :

أ) متقاربة (Convergent) اذا كان $p>1$

ب) متباعدة (divergent) اذا كان $p\leq 1$

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n}$

هنا $p=1$ اذن $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة حسب الاختبار p

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

هنا $$\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$p = \frac{3}{2} > 1 \leftarrow \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$ متقاربة .

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n^3}$ متقاربة لان $p=3>1$

8.17 اختبار المقارنة Comparison Test

لتكن المتسلسلة $\sum u_n$ موجبة فان :

أ) اذا كانت المتسلسلة $\sum v_n$ معلومة متقاربة وكان $\sum u_n \le \sum v_n$

فأن $\sum u_n$ متقاربة .

مثال : $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

الحل: $n(n+1)=n^2+n$

$n^2+n>n^2$

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum \frac{1}{n^2+1} < \sum \frac{1}{n^2}$$

بما ان $\sum \frac{1}{n^2}$ متسلسلة متقاربة حسب اختبار p

فأن $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة حسب اختبار المقارنة

مثال : $\sum \frac{1}{n^2+2}$

الحل: $n^2+2>n^2$

$$\frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum \frac{1}{n^2+1} < \sum \frac{1}{n^2}$$

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب اختبار p فان $\sum \frac{1}{n^2+2}$ متقاربة حسب اختبار المقارنة .

ب) اذا كانت المتسلسلة $\sum v_n$ متباعدة وكان $\sum u_n \ge \sum v_n$ فأن $\sum u_n$ متباعدة .

مثال : اختبر تقارب المتسلسلة $\sum \frac{1}{n+10}$

$$n+10 \le 11n \rightarrow \frac{1}{n+10} \ge \frac{1}{11n}$$

$$\sum \frac{1}{n+10} \ge \frac{1}{11} \sum \frac{1}{n}$$

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة حسب اختبار p اذن $\sum \frac{1}{n+10}$ متباعدة حسب اختبار المقارنة .

8.19 اختبار التكامل Integral Test

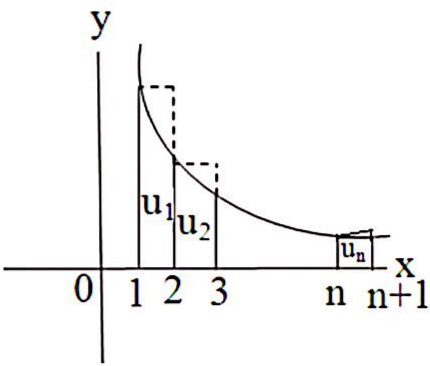
لنفرض $u_n=f(x)$ وان :

1) $f(x)$ مستمرة لجميع قيم $x\geq 1$

2)

3) $f(x)\geq 0$ (موجبة)

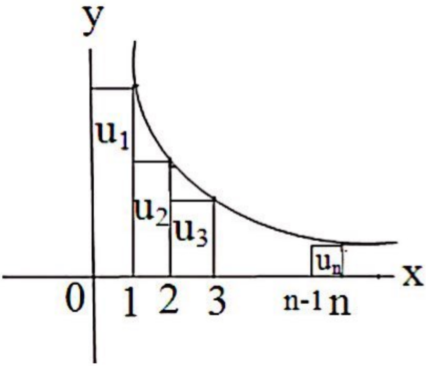
فأذا كان $\int_1^{\infty} f(x)dx$ كمية محدودة فأن $\sum u_n$ متقاربة والان فأن $\sum u_n$ متباعدة .



<u>البرهان</u> : من ملاحظة الشكل المجاور مثلثات المساحات u_1 ، u_2 ، u_3 تحتوي على مساحات التي تحت المنحني من $x=1$ الى $x=n+1$ اي

$$u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n>\int_1^{n+1} f(x)dx$$

وفي هذا الشكل لاحظ ان



$$u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n < \int_1^n f(x)dx$$

وبأضافة u_1 للطرفين

$$u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n < u_1 + \int_1^n f(x)dx$$

اي ان

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n < \int_1^{n1} f(x)dx$$

اذا كان التكامل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ محدداً فأن الطرف الايمن للمتراجحة اعلاه يبين

ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ محددة ايضاً .

8.22 التقارب المطلق والتقارب الشرطي Absolut Convergence and Conditional Convergence

يقال للمتسلسلة $\sum a_n$ بأنها متقاربة مطلقة عندما تكون المتسلسلة $\sum |a_n|$ متقاربة.ويقال ان المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة شرطية عندما تكون $\sum |a_n|$ متباعدة .

<u>مثال</u> : المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة حسب المثال السابق

وبما ان $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum |a_n|$

$\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة حسب اختبار P لان ($1 > \frac{1}{2}$=p)

اذن المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة تقارباً شرطياً

<u>مثال</u> : اختبر تقارب المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ ؟

<u>الحل</u> : ليكن $a_n = \frac{1}{n^2}$ فأن $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow a_{n+1} < a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

اي ان المتسلسلة المتذبذبة متقاربة ولاختبار نوع التقارب

$$\sum \frac{1}{n^2} = \sum |a_n|$$

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب اختبار p ‏(p=2>1).

اذن المتسلسلة المتذبذبة متقاربة تقارب مطلق .

8.24 اختبار النسبة Ratio Test

في المتسلسلة $\sum a_n$ اذا كان $a_n \neq 0$ لكل قيم و $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ فأن

(1) اذا كان $\rho < 1$ فأن $\sum a_n$ متقاربة مطلقة.

(2) اذا كان $\rho > 1$ فأن $\sum a_n$ متباعدة .

(3) اذا كان $\rho = 1$ فأن الاختبار يفشل .

مثال : اختبر تقارب المتسلسلة $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{4.2^4} + \ldots\ldots$

الحل : يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n.2^n}$

نستخدم اختبار النسبة

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad , \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)2^{n+1}} ; a_n = \frac{(1-)^{n+1}}{n.2^n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)2^{n+1}} - \frac{n.2^n}{(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-n}{2(n+1)}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

اذن المتسلسلة متقاربة

مثال : هل ان المتسلسلة $\sum (-1)^{n+1} \frac{n^2}{3^n}$ متقاربة ؟

الحل : $|a_{n+1}| = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}, |a_n| = \frac{n^2}{3^n}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \right| = \frac{1}{3} < 1$$

اذن المتسلسلة متقاربة مطلقة .

8.25 اختبار الجذر Root Test

لتكن $\sum a_n$ اي متسلسلة وان $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ فان $\sum a_n$ تكون :

(1) متقاربة مطلقة اذا كان L<1

(2) متباعدة اذا كان L>1 او L=∞

(3) يفشل الاختبار اذا كان L=1

مثال : المتسلسلة $\sum \frac{2^{2n}}{n^n}$

الحل : $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0 < 1$

اذن المتسلسلة متقاربة مطلقة

8.26 متسلسلة القوى **Power Series**

متسلسلة القوى حول النقطة a هي متسلسلة دوال تكون صيغتها عند كل عدد حقيقي x بالشكل الاتي :

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ حيث ان a عدد ثابت يسمى مركز مفكوك المتسلسلة

وان الاعداد a_n هي معاملات متسلسلة القوى ، واضح ان المتسلسلة اعلاه تكون متقاربة دائماً الى القيمة a_0 عندما x=a .

قد تكون المتسلسلة اعلاه متقاربة فقط عند هذه النقطة او قد تكون متقاربة عند جميع قيم x .

فاذا لم تتحقق احدى هاتين الحالتين ، تكون هنالك وجود لعدد موجب I بحيث تكون المتسلسلة متقاربة .

عندما $|x-a|<I$ ومتباعدة عندما $|x-a|>I$.

العدد الثابت I يدعى نصف قطر دائرة التقارب للمتسلسلة .

وتُدعى الفترة (a-I,a+I) بفترة تقارب المتسلسلة .

عندما $|x-a|=I$ فأن المتسلسلة قد تكون متقاربة او متباعدة ويمكن ايجاد نصف قطر تقارب متسلسلة القوى باستخدام اختبار النسبة بوضع $I= \rho$

<u>مثال</u> : جد فترة تقارب المتسلسلة $\sum x^n$

<u>الحل</u> : $a_n = x^n$ ، $a_{n+1} = x^{n+1}$

$$I = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| < 1$$

اي ان $-1<x<1$

الان للتحقق عندما x=1 , x=-1

عندما x=1 $\leftarrow \sum x^n = \sum (1)^n$ المتسلسلة متباعدة

عندما x=-1 $\leftarrow \sum x^n = \sum (-1)^n$ المتسلسلة متباعدة

اذن فترة التقارب هي (-1,1)

8.27 متسلسلة تايلور وماكلورين Taylor &Maclourin Series

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق لانهائياً عند x=c ، اي انه توجد مشتقات $f^{(n)}(c)$ لكل قيم n الصحيحة الموجبة ، ان متسلسلة تايلور لـf حول c هي متسلسلة القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + ... \qquad (1)$$

حيث ان $a_n = \frac{f^n(c)}{n!}$ لكل قيم n .

لاحظ ان $f^{(0)}$ هي القيمة الوسطى للدالة f نفسها ، بحيث ان $a_0=f(c)$

ان متسلسلة ماكلورين لـf هي متسلسلة تايلور لـf حول الصفر اي متسلسلة القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \qquad (2)$$

حيث ان $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$ لكل قيم n .

مثال : جد متسلسلة ماكلورين لـe^x وفترة التقارب ؟

الحل : لتكن $f(x)=e^x$ الان نحسب قيم المشتقات عند x=0

$$f(x)=e^x \quad ; \quad f(0)=1$$
$$f'(x)=e^x \quad ; \quad f'(0)=1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f^n(x)=e^x \quad ; \quad f^n(0)=1$$

نعوض في المتسلسلة (2) اعلاه :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ولايجاد فترة التقارب نستخدم اختبار النسبة

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

اذن المتسلسلة متقاربة لكل قيم x.

مثال : جد متسلسلة ماكلورين لـ f(x)=sinx ثم جد فترة التقارب للمتسلسلة؟

الحل : $f(x)=\sin(x) \quad ; \quad f(0)=0$

$$f'(x)=\cos x \quad ; \quad f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\sin x \quad ; \quad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-\cos x \quad ; \quad f'''(0)=-1$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x \quad ; \quad f^{(4)}(0)=0$$
$$f^{(5)}(x)=\cos x \quad ; \quad f^{(5)}(0)=1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

وهي متقاربة لجميع قيم x (بتطبيق اختبار النسبة)

مثال : جد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ؟

الحل : $f(x) = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad f(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad ; \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad ; \quad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{3.2}{(1-x)^4} = \frac{3!}{(1-x)^4} \quad ; \quad f'''(0) = 3.2 = 3!$$